

Étude systématique des transitions dans l'équation de Ginzburg–Landau stochastique par l'algorithme “adaptive multilevel splitting”

Freddy Bouchet¹, Joran Rolland², & Éric Simonnet²

¹ Laboratoire de Physique, École Normale Supérieure de Lyon, 46, allée d'Italie, 69007,

² Institut du Non linéaire de Nice, UMR 7335, 1361 route des Lucioles, 06560 Valbonne
joran.rolland@inln.cnrs.fr

Les métastabilités entre deux états se présentent dans de nombreux domaines de la physique, allant des transitions de phases au climat. Un certain nombre de ces systèmes peuvent être décrits par l'équation de Ginzburg–Landau stochastique (parfois dite de Allen–Cahn ou Chafee–Infante), l'équation aux dérivées partielles stochastique la plus simple présentant de la métastabilité. Sa particularité découle du fait qu'elle dérive d'un potentiel. Une fois adimensionnée, elle s'écrit :

$$\partial_t A = \partial_x^2 A + (A - A^3) + \sqrt{\frac{2}{\beta}} \eta, \quad A(0) = A(L) = 0, \quad \langle \eta(x, t) \eta(x', t') \rangle = \delta(t - t') \delta(x - x'), \quad (1)$$

où L est la taille du système. Cette SPDE présente deux états métastables $A \simeq \pm 1$, minima du potentiel. Le nombre de points cols entre ces deux états croît avec la taille. Ils se distinguent par leur nombre de fronts [1]. Le passage d'un minimum à un autre est dit *trajectoire réactive*. On distingue deux types de trajectoires réactives : des retournements globaux de A et des créations de germes de $A = \mp 1$ dans $A \simeq \pm 1$, puis avancement des fronts.

Un certain nombre d'approches théoriques permettent d'étudier la métastabilité entre les deux états $A \simeq \pm 1$. D'une part dans la limite $\beta \rightarrow \infty$ de température nulle où la relation d'Eyring Kramers donne le temps de premier passage moyen [2] et la théorie de Friedlin–Wentzell donne l'instanton, la trajectoire la plus probable entre les deux états ainsi que la probabilité de l'observer [1,3,4]. D'autre part dans la limite $L \rightarrow \infty$, où l'on peut considérer la trajectoire réactive comme une marche aléatoire des fronts [5].

L'algorithme Adaptive Multilevel Splitting utilise N clones de la dynamique du système et calcule itérativement N trajectoires réactives en supprimant une fraction des trajectoires les moins avancées et en les rebranchant sur des trajectoires plus avancées [6]. Après étude de convergence de l'algorithme [7], il est appliqué au cas de Ginzburg–Landau pour une large gamme de β et de L comprenant les deux limites. Grâce aux résultats numériques, on peut vérifier que les prédictions dans la limite $\beta \rightarrow \infty$ sont valides. L'application de l'algorithme à des domaines de très grandes tailles permet de mettre en évidence les marches aléatoires de front. De plus, l'approche numérique permet d'avoir accès à des quantités très partiellement connues théoriquement, comme la distribution de durée des trajectoires réactives.

Les bons résultats de l'algorithme encouragent à l'appliquer à des systèmes non gradients, par exemple issus de la turbulence.

Références

1. W.G. Faris, G. Jona-Lasinio, J. Phys. A : Math. Gen., **15**, 3025–3055 (1982).
2. P. Hänggi, P. Talkner, M. Borkovec, Rev. Mod. Phys., **62**, 251–342 (1990).
3. H. Touchette, Phys. Rep., **478**, 1–69 (2009).
4. W. E, W. Ren, E. Vanden-Eijden, Comm. pure and app. math., **57**, 1–20 (2004).
5. H.C. Fogedby, J. Hertz, A. Svane, Phys. Rev. E, **70**, 031105 (2004).
6. F. Cérou, A. Guyader, Stochastic analysis and application, **25**, 417–443 (2007).
7. E. Simonnet, Submitted to statistics and computing (2013), J. Rolland, to be submitted to the Journal of computational physics (2014).