1 Empilements compacts (jammed) de sphères dures et équilibre de Nash : Indépendantes mais solidaires.

Nicolas Rivier

IPCMS, Université de Strasbourg
rivier@ipcms.unistra.fr

"La mécanique rationnelle, quand elle réduit les corps à de simples points matériels, l'économie pure, quand elle réduit les hommes réels à l'*homo oeconomicus*, se servent d'abstractions parfaitement semblables et imposées par des nécessités semblables." [1]

Nous verrons ici que l'abstraction semblable n'est pas le point matériel, mais la sphère dure. Les mouvements géométriques d'une sphère sont fortement restreints par les autres sphères, sur lesquelles elle ne peut que rouler sans glisser. Notamment, quatre sphères en contact constituent un tétraèdre. La longueur des arêtes est bornée par le contact de deux sphères, mais trois sphères ne peuvent rouler sans glisser l'une sur l'autre sans perdre un contact. Sous cisaillement, le tétraèdre se déforme en un polygone (de Petrie) de quatre contacts et deux arêtes topologiques sans contact physique. Ces deux arêtes topologiques, opposées et orthogonales sur le tétraèdre, sont des déformations indépendantes qui bornent l'espace de phase. Elles en constituent la frontière de Pareto : Les configurations de compacité maximale (de volume minimal) se trouvent aux bords de l'espace de phase. Toute excursion vers l'intérieur de l'espace de phase est moins compacte. On montre qu'on a alors équilibre de Nash. La situation se généralise en dimensions $D = N - 1 > 3$. Le tétraèdre devient alors un simplex de N hypersphères et l'espace de phase est borné par $p = N - 2$ chemins orthogonaux et indépendants, sa frontière de Pareto. On prouve [2] que l'équilibre de Nash existe bien pour des hypersphères en dimensions D infinie ($D + 1$ agents économiques identiques, avec $p = D - 1$ chemins indépendants). L'équation d'état de ce fluide de sphères dures en équilibre de Nash a un seul, non-trivial coefficient du viriel [2] : Les sphères, ou agents économiques, en équilibre de Nash sont en interaction mais leur chemins sont indépendants. On a jeu ou fluide de champ moyen.

Références

1. Pareto, V, 1963 Manuel d'Economie Politique, trad. A. Bonnet, Pichon, Paris, p.17
2. Wyler, D., Rivier, N., Frisch, H. L. 1987 Hard-sphere fluid in infinite dimensions, Phys.Rev.A **36** 2422-2431