
Comptes-rendus de la 21^e

Rencontre du Non Linéaire

Paris 2018

Université Paris Diderot
Amphithéâtre Buffon[®]

<http://nonlineaire.univ-lille1.fr/SNL/>

É. FALCON, M. LEFRANC
F. PÉTRÉLIS, C.-T. PHAM
ÉDITEURS

Comptes-Rendus de la 21^e
Rencontre du Non-Linéaire
Paris 2018

Université Paris Diderot
Non-Linéaire Publications

21^e RENCONTRE DU NON-LINÉAIRE
 Université Paris Diderot, PARIS
 27–29 Mars 2018

Nous remercions vivement pour leur soutien matériel et financier l'université Paris Diderot, le CNRS, l'Institut Universitaire de France, le Département de Physique de l'École normale supérieure, le Département de Mécanique, Énergétique et Procédés (MEP) de l'Université Paris-Saclay, l'Institut de Physique de Nice, le laboratoire Matière et Systèmes Complexes, l'Institut Langevin de l'ESPCI, le laboratoire de Physique de l'École normale supérieure de Lyon.

Le comité scientifique est composé de :

Stéphane BARLAND INLN — Nice
 Julien BARRÉ MAPMO — Orléans
 Éric FALCON MSC — Paris Diderot
 Marie-Christine FIRPO LPP — École Polytechnique
 David GÉRARD-VARET IMJ — Paris Diderot
 Mariana HARAGUS LMB — Univ. Franche-Comté
 Xiaoping JIA Inst. Langevin – ESPCI
 Philippe MARMOTTANT LIPhy — UJF Grenoble
 François PÉTRÉLIS LPS — ENS
 Chi-Tuong PHAM LIMSI — Paris-Sud
 Benît ROMAN PMMH — ESPCI
 Valérie VIDAL Lab. de Physique — ENSL

Les Rencontres du Non-Linéaire sont organisées par :

Éric FALCON MSC — Paris Diderot
 Marc LEFRANC PhLAM — Lille
 François PÉTRÉLIS LPS — ENS
 Chi-Tuong PHAM LIMSI — Paris-Sud

Le mini-colloque « *Non-linéarités et tremblements de terre* » est organisé par :

Xiaoping JIA Inst. Langevin — ESPCI
 François PÉTRÉLIS LPS — ENS
 Valérie VIDAL Lab. de Physique — ENS Lyon

Ces Comptes-Rendus et ceux des années précédentes sont disponibles auprès de :

Non-Linéaire Publications, Avenue de l'université, BP 12
 76801 Saint-Étienne du Rouvray cedex

Toutes les informations concernant les Rencontres sont publiées sur le serveur :

<http://nonlineaire.univ-lille1.fr/>

Renseignements :

rnl@univ-lille1.fr

Table des matières

| | |
|--|----|
| Random waves in a vibrated 2D granular medium with magnetic dipolar interactions <i>Michael Berhanu, Simon Merminod, Éric Falcon, Gustavo Castillo</i> | 1 |
| Violation of the gyrotropic pressure closure due to a velocity shear in a magnetized plasma <i>Daniele Del Sarto, Francesco Pegoraro</i> | 7 |
| Spontaneous magnetic reconnection of thin current sheets <i>Daniele Del Sarto, Maurizio Ottaviani, Fulvia Pucci, Anna Tenerani, Marco Velli</i> | 13 |
| Bifurcation dans la configuration électronique d'un atome soumis à un champ laser de forte intensité <i>Jonathan Dubois, Simon Abraham Berman, Christel Chandre, Turgay Uzer</i> | 19 |
| Des trois actions de la mécanique classique à la fonction d'onde en mécanique quantique <i>Michel Gondran, Alexandre Gondran, Abdel Kenoufi</i> | 25 |
| Émergence d'une nage cohérente induite par des retours sensoriels <i>Johann Herault, Frédéric Boyer, Robin Thandiackal, Kamilo Melo, Auke Ijspeert</i> | 31 |
| Quasi-singularités détectées dans l'écoulement turbulent d'une soufflerie <i>Martine Le Berre, Thierry Lehner, Yves Pomeau</i> | 37 |
| Evolution of the distance between plates in an experimental granular fault. Implications for earthquake forecast. <i>Victor Levy dit Vêhel, Florine Dubourg, Loïc Vanel, Knut Jørgen Måløy, Osvanny Ramos</i> | 43 |
| Simulation d'un modèle à dérivée fractionnaire décrivant l'activité électrique des cellules β du pancréas <i>Saverio Morfu, Bertrand Bodo, Alain Mvogo</i> | 49 |
| Propriétés statistiques multi-échelles de produits satellitaires SMOS d'humidité du sol désagrégés à la résolution kilométrique <i>Mathis Neuhauser, Sébastien Verrier, Sylvain Mangiarotti, Olivier Merlin, Beatriz Molero, Yann Kerr</i> | 55 |
| Dynamique non linéaire des flammes de prémélange : description en pôles <i>Basile Radisson, Christophe Almarcha, Elias Al Sarraf, Joël Quinard, Emmanuel Villermaux, Bruno Denet</i> | 61 |
| Auto-assemblage de colloïdes superparamagnétiques dans un vaisseau quasi-bidimensionnel <i>Nicolás Rojas</i> | 67 |
| Spectral simulations of tidal flows in weakly deformed spheres <i>Jérémie Vidal, David Cébron</i> | 73 |

| | |
|--|----|
| Remontée de bulles dans une suspension dense <i>Valérie Vidal, Clément Picard, Sylvain Joubaud</i> | 79 |
| Formes d'équilibre de chaînes fermées d'aimants sphériques <i>Gérard Vinsard, Stéphane Dufour</i> | 85 |
| Index des auteurs | 93 |
| Annexes | 95 |

Random waves in a vibrated 2D granular medium with magnetic dipolar interactions

Michael Berhanu¹, Simon Merminod^{1,2}, Éric Falcon¹ & Gustavo Castillo³

¹ Université Paris Diderot, MSC, UMR 7057 CNRS, Paris, France

² Martin Fisher School of Physics, Brandeis University, Waltham, Massachusetts 02453, USA

³ Instituto de Ciencias de la Ingeniería, Universidad O'Higgins, Rancagua, Chile

michael.berhanu@univ-paris-diderot.fr

Résumé. Un ensemble de particules granulaires vibrées magnétisées permet d'observer une transition entre un gaz granulaire et un cristal hexagonal dans un système 2D hors équilibre, lorsque le champ magnétique est augmenté à agitation constante [1]. En calculant, les fonctions de corrélation de courant longitudinal et transverse, nous étudions la dynamique de ce système en mesurant le spectre des excitations, indiquant comment l'énergie est répartie à travers les échelles. Des relations de dispersion peuvent être extraites, montrant la propagation d'ondes longitudinales et transverses (dans la phase cristalline seulement), qui sont analogues aux phonons de la physique du solide. Cette analyse nous informe sur les propriétés mécaniques et thermodynamiques du système.

Abstract. Using a 2D out-of-equilibrium system of magnetized and vibrated granular particles, a transition from a granular gas towards a hexagonal crystal has been reported, when magnetic field is increased at constant agitation [1]. By extracting the longitudinal and transverse current correlations in dynamical regime, the spectrum of excitations can be measured to characterize how energy is distributed through the scales. Dispersion relations are obtained, showing propagation of longitudinal waves and of transverse waves (in the crystal phase only), which are analogous to phonons in solid state physics. This analysis provides insights on the mechanical and thermodynamic properties of this system.

1 Introduction

A macroscopic experiment [1, 2] has been developed in MSC laboratory where a tunable magnetic field is applied on a 2D vibrated granular medium made of soft-ferromagnetic spheres. Like in condensed matter, depending on the relative ratio between particle agitation and distance interaction strength, gas-like or solid-like phases can be observed. They are characterized using a particle tracking of individual particles. For a specific choice of the initial particle number in the cell, of the cell acceleration and of the gap size imposing the 2D confinement, a transition from an out-of-equilibrium granular gas to a hexagonal crystal of repelling dipoles (analogous to the Wigner crystal) is observed, when the magnetic field is increased. The protocol, the description of the experimental system and the first results have been reported in a previous publication [1]. Here, we focus on the dynamical properties of this 2D granular system, studied in the spatial Fourier space. The computation of the transverse and longitudinal current correlation functions gives access to the spectrum of excitations and their temporal decay. We evidence strong differences between the dissipative granular gas phase and the hexagonal crystal phase.

The experimental setup (see Fig. 1) consists of an assembly of 2,000 soft magnetic spheres of diameter $a = 1$ mm confined in a square cell (9×9 cm) with a gap of $1.42 a$. The cell is vertically vibrated at $f_v = 300$ Hz with a r.m.s. acceleration $\Gamma = 1.6 g$. Due to the roughness of the cell bottom, the particles are performing Brownian-like motions in the horizontal plane. By imaging with a high speed camera on the area S_0 (5×5 cm) the trajectory of each particle is reconstructed. When the external vertical magnetic field B_0 is increased, each sphere behaves as an induced dipole. In first approximation, two particles separated by a distance $r_{i,j}$ interact according to the repulsive potential $U_{i,j} = \frac{4\pi}{\mu_0} B_0^2 \frac{(a/2)^6}{r_{i,j}^3}$.

The parameters of our experiments are the area fraction $\phi = \frac{N\pi a^2}{4S_0}$ (with N the numbers of balls imaged on S_0), the mean kinetic energy per particle $E_c = \langle \frac{m}{2N} \sum_{i=1}^N v_i^2 \rangle$ (with m mass and velocity v_i of

particle i) and the mean magnetic energy per particle $E_m = \langle \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N U_{i,j} \rangle$. The dimensionless number $\epsilon = E_m/E_c$ quantifies the ratio between interaction strength and kinetic energy. B_0 is varied in $[0.11, 430]$ G corresponding to $\epsilon \in [10^{-4}, 1.5 \times 10^3]$. Each run is repeated five times. After an equilibration time of 100 s, measurements are recorded during 3.85 s. As observed previously [1], in the center of the cell, the dimensionless particle density ϕ decreases with ϵ (Fig. 1 (b)), because particles are concentrating on the non repelling cell boundaries. The crystallization towards a hexagonal crystal is monitored by the hexagonal order parameter $|\Psi_6| = |\langle \frac{1}{n_k} \sum_{k=1}^{n_k} e^{i6\theta_{jk}} \rangle|$ (the sum is performed on the angles of the first neighbours of one particle and averaged over the particles and over the time). $|\Psi_6|$ is of order 0.4 in the granular gas phase to reach 0.9 in the hexagonal crystal phase. The transition is located at $\epsilon \approx 62$ (Fig. 1 (c)), corresponding to a maximal susceptibility, of this order parameter.

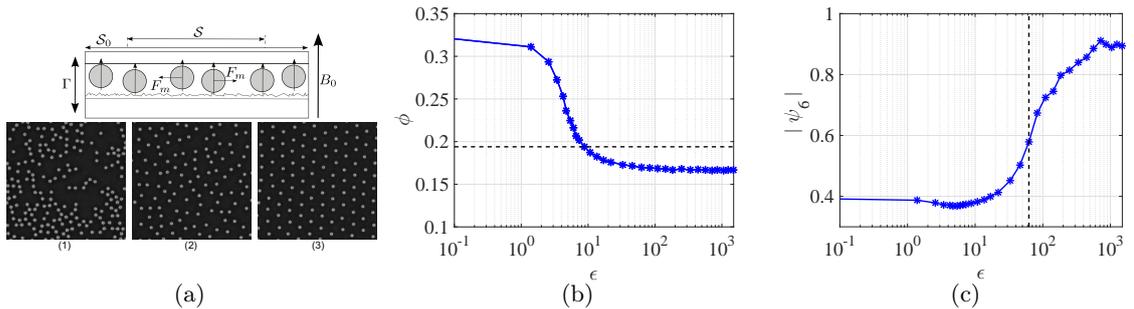


Figure 1. (a) Experimental setup. Snapshots (1) ($\epsilon \approx 0$), (2) ($\epsilon = 16.2$), (3) ($\epsilon = 283$). (b) Area fraction ϕ as a function of $\epsilon = E_m/E_c$. Dashed line, area fraction computed on the totality of the cell. (c) Hexagonal order parameter $|\Psi_6|$ versus ϵ . The black dashed line at $\epsilon = 62.4$ marks the transition between the granular phase and the hexagonal crystal phase.

To characterize how injected energy is transferred through the scales to build a stationary out-of-equilibrium state, a convenient method consists in studying the statistical properties of particle velocity field in spatial Fourier space. Velocity correlations at a particular wavenumber \mathbf{k} appear naturally as a spectrum amplitude at the scale \mathbf{k} . We thus introduce the longitudinal current correlation function $J_l(\mathbf{k}, t)$ and the transverse current correlation function $J_t(\mathbf{k}, t)$, defined as [3, 4]:

$$J_l(\mathbf{k}, t) = \left\langle \frac{1}{N} \sum_{i,j=1}^N (\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{v}_i)(t) (\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{v}_j)(0) e^{i\mathbf{k}[\mathbf{r}_i(t) - \mathbf{r}_j(0)]} \right\rangle, \quad (1)$$

$$J_t(\mathbf{k}, t) = \left\langle \frac{1}{N} \sum_{i,j=1}^N (\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{v}_i)(t) (\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{v}_j)(0) e^{i\mathbf{k}[\mathbf{r}_i(t) - \mathbf{r}_j(0)]} \right\rangle. \quad (2)$$

$\hat{\mathbf{k}}$ is the unitary vector directed along \mathbf{k} . $\langle \cdot \rangle$ denotes a temporal average. These functions are computed on a grid (k_x, k_y) of size 50×50 on the interval $0.0624 < \|\mathbf{k}\| < 3.12 \text{ mm}^{-1}$. Then assuming system isotropy, we define the angular averaged current correlation functions: $J_l(k, t) = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} J_l(\mathbf{k}, t) d\theta$ and $J_t(k, t) = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} J_t(\mathbf{k}, t) d\theta$.

2 Spatial spectra, distribution of energy over spatial scales

The values of $J_l(k, t)$ and $J_t(k, t)$ at $t = 0$, are respectively the structure factor of longitudinal velocity modes and of transverse velocity modes and can be interpreted as spatial power spectra as they

provide the kinetic energy distribution over the spatial scales. A flat spectrum as a function of k denotes equipartition of energy over the modes. Following the fluctuating hydrodynamics theory approach, for an out-of-equilibrium dissipative granular gas, $J_t(k \rightarrow 0, 0) = 2T_b$ and $J_t(k \approx 2\pi/a, 0) = 2T_g$ [4, 5], where T_b is the “bath” temperature and $T_g \approx E_c/m$ the usual granular temperature (these temperatures are defined by analogy with the physics of molecular systems). Due to the collisions at the grain size, in a dissipative granular gas, T_b is assumed larger than T_g . In our experiment, we observe that $J_t(k, 0)$ and $J_l(k, 0)$ are nearly flat (Fig. 2 (a)), except at the three smallest wavenumbers, where higher values are recorded. A plateau at large scale is not really visible maybe due to the lack of resolution in k . We measure the temperatures T_g as the average of $J_t(k, 0)$ on the five last values. The evolution of these temperatures as a function of ϵ are displayed in Fig. 2 (b) and compared with the usual granular temperature E_c/m . We find that $T_g \approx E_c/m$. As reported previously [1], we observe a non monotonous behavior of T_g , which is maximum for $\epsilon \approx 10$. Indeed, a moderate ϵ reduces the rate of dissipative collision. Then at higher amplitude of B_0 , the formation of the hexagonal solid phase limits the horizontal displacements. In the hexagonal crystal phase, we remark that $J_t(k, 0)$ presents a smooth maximum around $ka \approx 1.5$. It is probably related to the propagation of the waves, which will be characterized in the following.

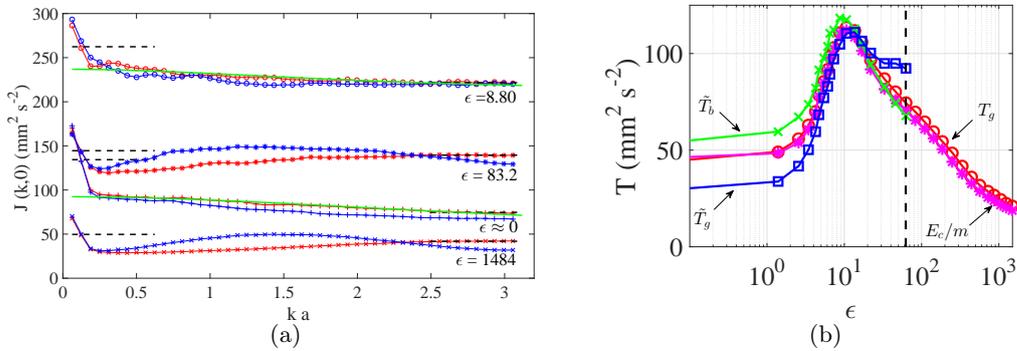


Figure 2. (a) Longitudinal spatial spectrum $J_l(k, 0)$ (blue) and transverse spatial spectrum $J_t(k, 0)$ (red) for few values of magnetic field B_0 : (+) $B \approx 0$ G, $\epsilon \approx 0$, (o) $B = 62$ G, $\epsilon = 8.80$, (*) $B = 185$ G, $\epsilon = 83.2$ and (x) $B = 430$ G, $\epsilon = 1484$. For the two first cases, $J_t(k, 0)$ are fitted by the green line curves using Eq. (3). (b) Evolution of analog temperatures as a function of $\epsilon = E_m/E_c$. Red (o) granular temperature T_g , Magenta (*) E_c/m , Green (x) bath temperature \tilde{T}_b from fits of $J_t(k, 0)$ by Eq. (3) (see Sec. 3), Blue (\square) granular temperature \tilde{T}_g from fit (Eq. (3)) only in the granular gas phase (see Sec. 3). The black dashed line at $\epsilon = 62.4$ marks the transition between the granular phase and the hexagonal crystal phase.

3 Decay of current functions. Characterization of dissipation.

To characterize the dissipative processes at play in the granular gas phase, we measure the temporal decay of the transverse current $J_t(k, t)$. In the granular gas phase, the decay is well approximated by a decreasing exponential $\sim e^{-t/\tau(k)}$, where $\tau(k)$ is the typical lifetime of a perturbation at the scale k (Fig. 3 (a)). In vibrated granular layers, the dissipation is often modeled by the sum of a viscous drag and of a Coulomb friction: $\tau^{-1}(k) = \nu k^2 + \gamma_b$ [4], with ν a kinematic viscosity and γ_b a friction coefficient. This hypothesis appears valid in our measurements in the granular gas phase only. In the solid phase, the correlation functions are mainly oscillating and the exponential fits become questionable. ν rescaled by a^2 and γ_b are plotted as a function of ϵ in the granular gas phase ($0 < \epsilon < 62$) (Fig. 3 (b)). For this set of experiments, the dissipation appears dominated by the friction coefficient. A characteristic length $\xi = (\nu/\gamma_b)$ of order 0.3 mm can be defined. This value is considerably smaller than the one found in Puglisi et al. [4] (without magnetic interactions, without lid, for stronger agitation and for varying area

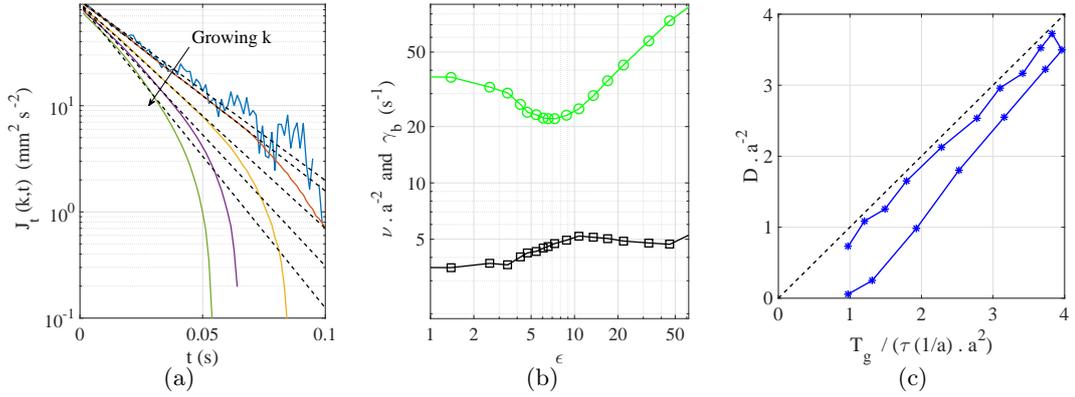


Figure 3. (a) Temporal decay of $J_{k,t}$, for various k (from top to bottom) for $\epsilon \approx 0$. Dashed line, corresponding to exponential fits defining the dissipative time $\tau(k)$. The behavior is similar for larger values of ϵ in the granular gas. (b) Evolution with ϵ of dissipative coefficients: green \circ friction coefficient γ_b and black \square rescaled kinematic viscosity ν/a^2 . (c) Rescaled particles diffusion coefficient D/a^2 plotted as a function of $T_g/(\tau(1/a) \cdot a^2)$. Each point corresponds to a value of ϵ for $\epsilon < 62$. The dashed line is the line $y = x$.

fraction ϕ). The fluctuating hydrodynamics theory interprets this length as a spatial correlation length of excitations, which controls the shape of the transverse velocity structure factor $J_t(k, 0)$ [4, 5]:

$$\frac{J_t(k, 0)}{2} = \tilde{T}_g + \frac{\tilde{T}_b - \tilde{T}_g}{1 + \xi^2 k^2}. \quad (3)$$

In the granular gas phase, our measurements of $J_t(k, 0)$ are well fitted by Eq. (3) (see Fig. 2 (a)), providing an estimation of the bath temperature \tilde{T}_b and of granular temperature \tilde{T}_g . The difference $\tilde{T}_b - \tilde{T}_g$ quantifies the distance to the thermodynamic equilibrium [4, 5]. In Fig. 2 (b), we compare as a function of ϵ these temperatures. The distance to equilibrium $\tilde{T}_b - \tilde{T}_g$ decreases with ϵ to vanish at $\epsilon = 17$ close to the maximum of T_g . Then \tilde{T}_g becomes larger than \tilde{T}_b denoting an inversion of the slope of $J_t(k, 0)$. Due to the magnetic repulsion, large scale excitations become likely unfavorable. We note that \tilde{T}_g differs from T_g and from the usual granular temperature E_c/m .

Finally, we examine briefly the link between diffusion and dissipation. The self-diffusion coefficients are obtained for each experiment by fitting the mean-square displacements of particles $\langle (\mathbf{r}_i(t) - \mathbf{r}_i(t=0))^2 \rangle = 4Dt$. The standard diffusion process remains valid in the granular gas phase until approximately $\epsilon < 50$. By analogy with the Einstein relation, we show experimentally:

$$\frac{D}{a^2} \approx \frac{T_g}{\tau(a^{-1}) a^2} = \frac{E_c}{(\nu a^{-2} + \gamma_b) m a^2}. \quad (4)$$

This identity is particularly true for the points corresponding to the increase of T_g with ϵ and a little less when the system approaches the transition threshold. This result suggest that the fluctuation dissipation theorem holds in a dissipative granular gas, when the dissipation coefficients are estimated from the velocity correlation functions.

4 Spectra of excitations, dispersion relations

The dynamical properties of the system are now studied by computing the spatiotemporal velocity spectra in the wavenumber–frequency (k, f) space. From the Wiener–Khinchin theorem, the angular

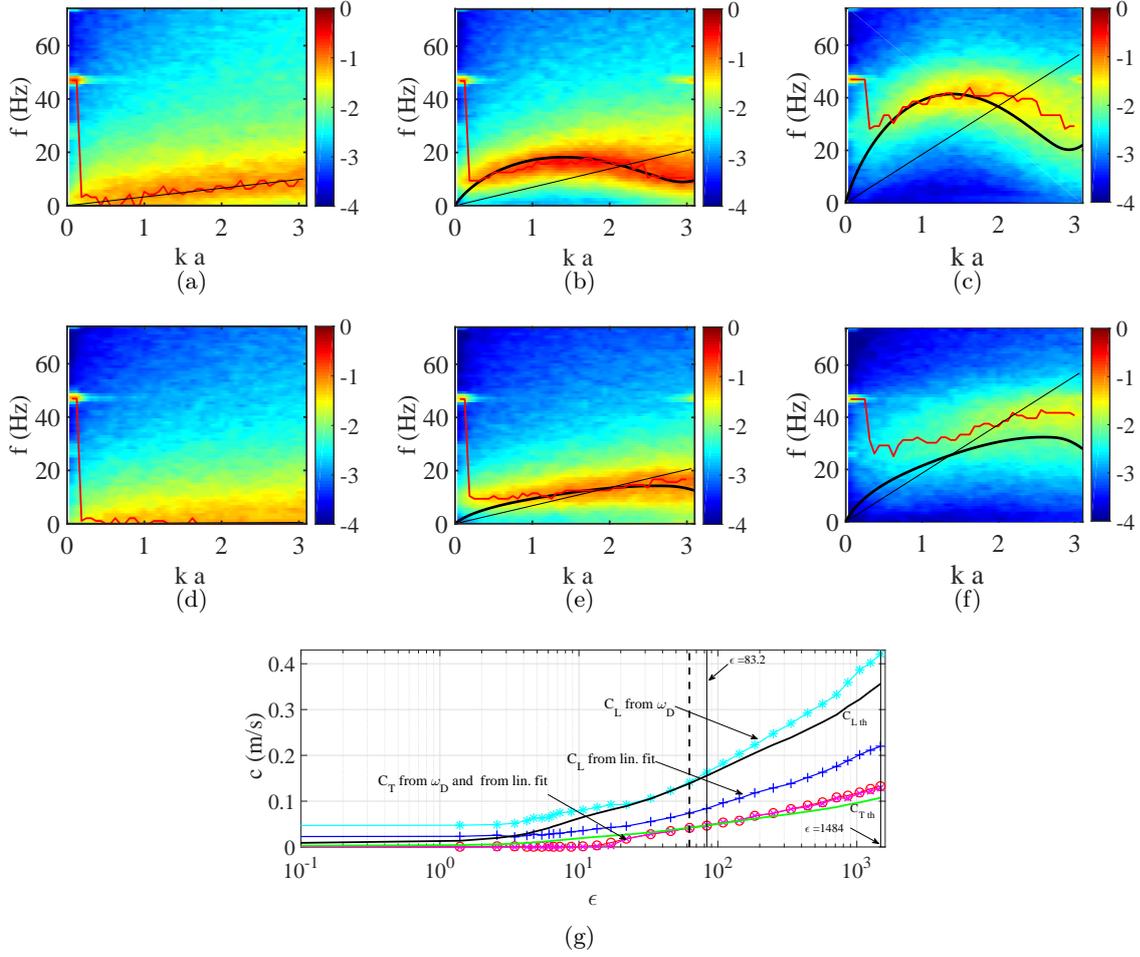


Figure 4. Longitudinal and transverse velocity spectra as a function of the rescaled wavenumber ka and the frequency f . In colorscale $\log_{10}(S_v(k, f))$. (a) $S_{v_l}(k, f)$ for $\epsilon \approx 0$. (b) $S_{v_l}(k, f)$ for $\epsilon = 83.2$. (c) $S_{v_l}(k, f)$ for $\epsilon = 1484$. (d) $S_{v_t}(k, f)$ for $\epsilon \approx 0$. (e) $S_{v_t}(k, f)$ for $\epsilon = 83.2$. (f) $S_{v_t}(k, f)$ for $\epsilon = 1484$. Black thick line: theoretical dispersion relation for point dipoles [6]. Red line: experimental dispersion relation from local maxima. Black thin line: linear fit of experimental dispersion relation. (g) Experimental sound velocities extracted from the dispersion relations (see text). + blue, longitudinal, linear fit valid in the granular gas phase. o red, transverse, linear fit. * cyan, longitudinal sound velocity from experimental estimation of ω_D . x magenta, transverse sound velocity from experimental estimation of ω_D . Black $C_{L,th}$ theoretical longitudinal sound velocity with the experimental parameters. Green $C_{T,th}$ theoretical transverse sound velocity with the experimental parameters. Black dashed line at $\epsilon = 62.4$ the transition between the granular phase and the hexagonal crystal phase.

averaged velocity power spectra are deduced from the temporal current correlation functions by a Fourier transform:

$$S_{v_l}(k, f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^T \int_0^{2\pi} J_l(\mathbf{k}, t) k d\theta e^{2i\pi ft} dt \quad \text{and} \quad S_{v_t}(k, f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^T \int_0^{2\pi} J_t(\mathbf{k}, t) k d\theta e^{2i\pi ft} dt$$

Some typical longitudinal and transverse velocity spectra are displayed in Fig. 4 for $\epsilon \approx 0$ (granular gas), $\epsilon = 83.2$ (transition domain) and $\epsilon = 1484$ (hexagonal crystal). We notice in all measurements a strong peak around $f \approx 46$ Hz and $k \approx 0$. This global oscillation could be attributed to a vibration mode of the cell. In the granular gas phase, the maxima of $S_{v_l}(k, f)$ when k is varied follows a line

crossing zero, defining a dispersion relation of compressive longitudinal waves (Fig. 4 (a)). In contrast, the maxima of $S_{vt}(k, f)$ are located in $f = 0$, revealing absence of transverse waves as expected in a fluid phase (Fig. 4 (d)). By increasing ϵ , as the system becomes more rigid, evidence of transverse waves dispersion appears (Fig. 4 (e) and 4 (f)). The dispersion relations differ from simple lines and become dispersive.

However, the dispersion relation of 2D system of point dipoles distributed in a hexagonal lattice can be analytically computed in the harmonic approximation (small displacements) [6]. In the solid phase, the theoretical dispersion relations are compatible with the experimental spectra. We note that at high ϵ , the large scales are not well energized, making a linear fit in this area questionable. To determine the sound velocity, which is given by $\frac{\partial \omega}{\partial k}$ when $k \rightarrow 0$, in the solid phase, we estimate the top of the experimental dispersion relations to get the characteristic pulsation ω_D . Theoretically, $\omega_D = \frac{B_0 \sqrt{2} a}{2 \sqrt{m \mu_0 \phi^{5/2}}}$ [6], then the longitudinal and transverse sound velocity read: $C_{Lth} = \frac{1.283 \omega_D a}{2 \sqrt{\phi}}$ and $C_{Tth} = \frac{0.387 \omega_D a}{2 \sqrt{\phi}}$. The corresponding experimental velocities ($*$ and \times) are reported in Fig. 4 (g) as a function of ϵ and compared to the theoretical estimates (black and green lines, valid only in the solid phase). Surprisingly, the agreement is better for moderate values of ϵ . The linearity of the sound velocities with B_0 (not displayed) is also well verified. The transverse sound velocity is zero in the granular gas phase and becomes non zero at $\epsilon = 17$, which is the beginning of the transition towards the hexagonal crystal phase and smaller than the threshold at $\epsilon = 62.4$ (maximal susceptibility of $|\Psi_6|$), which provides a supplemental criterion differentiating granular gas and crystal phases. The elastic coefficients could be then measured from the sound velocity estimations without perturbing the system.

5 Conclusion

The dynamical analysis of this system provides a good macroscopic illustration of phenomenon usually observed in solid state physics. In the granular phase, energy is mediated by compression longitudinal waves, whereas in the hexagonal solid phase, energy transfers between particles occur by the equivalent of phonons, whose dispersion relations can be analytically computed. Similar observations have been reported in hexagonal crystal of charged particles (dusty plasmas) [7], with a different interaction potential. The main difference with microscopic systems is the out-of-equilibrium character of our experiment. In the granular gas phase, the fluctuating hydrodynamic theory explains well the deviation from energy equipartition due to the dissipation. As ϵ increases in the granular gas phase, we quantify the decrease of the distance to equilibrium as it was stated in our previous work [1] for the quasi-elastic phase.

Acknowledgements : We thank Thierry Hocquet and Martin Devaud for using their computing facilities at MSC. This research was supported by Fondecyt Grant No. 3160032 (G.C.).

References

1. S. MERMINOD, M. BERHANU & É. FALCON, Transition from a dissipative to a quasi-elastic system of particles with tunable repulsive interactions, *Europhys. Lett.*, **106**, 44005 (2014).
2. S. MERMINOD, T. JAMIN, É. FALCON & M. BERHANU, Transition to a labyrinthine phase in a driven granular medium, *Phys. Rev. E*, **92**, 062205 (2015).
3. G. CASTILLO, *Order and density fluctuations in the vicinity of a granular solid-liquid-like phase transition*, Phd Thesis, Universidad de Chile (2013).
4. A. PUGLISI, A. GNOLI, G. GRADENIGO, A. SARRACINO & D. VILLAMAINA, Structure factors in granular experiments with homogeneous fluidization, *J. Chem. Phys.*, **136**, 014704 (2012).
5. G. GRADENIGO, A. SARRACINO, D. VILLAMAINA & A. PUGLISI, Non-equilibrium length in granular fluids: From experiment to fluctuating hydrodynamics, *Europhys. Lett.*, **96**, 114004 (2011).
6. K. I. GOLDEN, G. J. KALMAN, P. HARTMANN & Z. DONKO, Dynamics of two dimensional dipole systems, *Phys. Rev. E*, **82**, 036402 (2010).
7. S. NUNOMURA, S. ZHDANOV, D. SAMSONOV & G. MORFILL, Wave spectra in solid and liquid complex (dusty) plasmas, *Phys. Rev. Lett.*, **94**, 045001 (2005).

Violation of the gyrotropic pressure closure due to a velocity shear in a magnetized plasma

Daniele Del Sarto¹ & Francesco Pegoraro²

¹ Institut Jean Lamour, UMR 7198 CNRS - Université de Lorraine, 54506 Vandoeuvre-lès-Nancy, France

² Dipartimento di Fisica, Università di Pisa, Pisa, 56127, Italy

daniele.del-sarto@univ-lorraine.fr

Résumé. Les processus cinétiques liés aux déformations quadripolaires de la fonction de distribution d'un plasma, notamment les mécanismes d'anisotropisation de pression, peuvent être décrits dans un modèle fluide qui inclut l'évolution du tenseur de pression complet [1]. Dans ce contexte, nous montrons que l'anisotropie en moment dans un écoulement fluide avec cisaillement de vitesse peut se transférer à une anisotropie de pression, à cause de l'action du tenseur des contraintes (en particulier, à cause de sa partie symétrique) sur le moment fluide d'ordre deux (tenseur de pression) de l'équation de transport [2]. Ce mécanisme, purement dynamique, induit l'anisotropisation d'un tenseur de pression initialement isotrope sur des temps de l'ordre de l'inverse de l'échelle caractéristique des gradients de vitesse, quand cette échelle devient non négligeable par rapport à la fréquence cyclotron. L'anisotropie générée par ce mécanisme est aussi bien gyrotropique que non gyrotropique et peut expliquer des observations dans le vent solaire ou dans des simulations de turbulence Vlasov [3]. En particulier, le cisaillement de vitesse associé aux nappes de vorticité permet aussi d'interpréter la corrélation, observée dans les simulations, entre anisotropie de pression et vorticité fluide [4]. La génération d'anisotropie non gyrotropique correspond à une perte de conservation du moment magnétique moyen des particules, pour lequel on écrit l'équation d'évolution dans une description fluide.

Abstract. Kinetic processes related to quadrupolar deformations of a plasma distribution function, notably mechanisms of pressure anisotropisation, can be described by a fluid model which retains the full pressure tensor dynamics [1]. In this framework we show that the momentum anisotropy in a shear flow can be transferred to a pressure anisotropy due to the action of the stress tensor (and in particular of its symmetric part) on the second order velocity moment of the transport equation (*i.e.*, the pressure tensor) [2]. This purely dynamical mechanism induces the anisotropisation of an initially isotropic pressure tensor on a time scale of the order of the inverse of the velocity gradients, when this becomes non-negligible with respect to the cyclotron frequency. Pressure anisotropy this way generated is both gyrotropic and non-gyrotropic and can explain direct observations made in the solar wind or in simulations of Vlasov turbulence [3]. In particular, the velocity shear associated to vorticity sheets allows us to interpret [4] the correlation between pressure anisotropy and fluid vorticity which has been observed in numerical simulations. The generation of non-gyrotropic anisotropy corresponds to a loss of conservation of the average particle magnetic moment, for which we provide an evolution equation in a fluid description.

1 Introduction

We consider a fluid, collisionless plasma model obtained by integrating the first three velocity moments of Vlasov equation for each species α (see Ref. [1, Appx. A]). The equations read

$$\frac{\partial n^\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (n^\alpha \mathbf{u}^\alpha) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}^\alpha}{\partial t} + \mathbf{u}^\alpha \cdot \nabla \mathbf{u}^\alpha = \Omega_\alpha \left(\frac{c\mathbf{E}}{B} + \mathbf{u}^\alpha \times \mathbf{b} \right) - \frac{1}{m^\alpha n^\alpha} \nabla \cdot \mathbf{\Pi}^\alpha, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{\Pi}^\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}^\alpha \mathbf{\Pi}^\alpha) + (\nabla \mathbf{u}^\alpha) \cdot \mathbf{\Pi}^\alpha + ((\nabla \mathbf{u}^\alpha) \cdot \mathbf{\Pi}^\alpha)^T + \nabla \cdot \mathbf{Q}^\alpha = \Omega_\alpha (\mathbf{\Pi}^\alpha \times \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \mathbf{\Pi}^\alpha). \quad (3)$$

where, for each species of charge q^α ($q^\alpha = -e$ for electrons) and mass m^α , $\Omega_\alpha \equiv q^\alpha B / (m^\alpha c)$ are the instantaneous cyclotron frequencies, c being the light velocity and B expressing the magnetic field intensity according to $\mathbf{B} = B \mathbf{b}$, and the density, fluid velocity and full pressure tensor are respectively

n^α , \mathbf{u}^α , $\mathbf{\Pi}^\alpha$. Here each pressure tensor $\mathbf{\Pi}^\alpha$ is defined with respect to the random particle velocity in each own species rest frame. Matrix transpose is indicated by T . Whenever needed, the heat flux tensor \mathbf{Q}^α is for simplicity “closed” by making the simplifying assumption $\nabla \cdot \mathbf{Q}^\alpha = 0$. Even if this restriction is *a priori* not justified, it is reasonable in the limit of spatial gradients perpendicular to the magnetic field, which we mostly consider in the following, and it does not affect (unless specified, next) the reasoning that we are going to develop [1,2]. The electric field \mathbf{E} in Eq. (2) is coupled to the magnetic field \mathbf{B} and to the current density $\mathbf{J} \equiv q^e n^e \mathbf{u}^e + q^i n^i \mathbf{u}^i$ by Maxwell’s equations, for which we assume the quasi-neutrality condition, $q^e n^e + q^i n^i = 0$, in turn consistent with neglecting the displacement current in Ampère’s law:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -c \nabla \times \mathbf{E}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}. \quad (4)$$

In the cold electron massless limit considered in Refs. [1,2,4], by neglecting $m^e/m^i \ll 1$ corrections and by dropping the i index for ion fluid quantities, equations (2) can be combined to respectively give the momentum equation of MHD and, by using the first of Eqs. (4), the Hall-MHD induction equation:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \Omega_i \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{b}}{nq^i c} - \frac{1}{m^i n} \nabla \cdot \mathbf{\Pi}, \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times \left[\left(\mathbf{u} - \frac{\mathbf{J}}{ne} \right) \times \mathbf{B} \right]. \quad (5)$$

The ion pressure tensor in the first of Eqs. (5) evolves according to Eqs. (3) for $\alpha = i$.

2 Double adiabatic limit and first order corrections for $\omega/|\Omega_\alpha| \ll 1$

A formal closure around a double-Maxwellian distribution for the temperatures parallel and perpendicular to the magnetic field can be obtained by restricting to small frequencies with respect to $|\Omega_\alpha|$. This leads to the well-known “*double adiabatic*” or CGL-closure (after Chew, Goldberger, and Low [5]), in which, using a tensor notation with subscripts $i, j, k = x, y, z$, a form $\Pi_{ij}^{\alpha,0} = P_\perp^{\alpha,0} \delta_{ij} + (P_\parallel^{\alpha,0} - P_\perp^{\alpha,0}) b_i b_j$ of each pressure tensor is maintained for the lowest order solution of a power expansion of Eq. (3) in terms of $\omega/|\Omega_\alpha| \ll 1$, that is $\Pi_{ij}^\alpha = \Pi_{ij}^{\alpha,0} + \Pi_{ij}^{\alpha,1} + \dots$ with $|\Pi_{ij}^{\alpha,n+1}|/|\Pi_{ij}^{\alpha,n}| \sim \omega/|\Omega_\alpha|$. By also introducing for the heat flux tensors \mathbf{Q}^α (meant to evolve according to some further dynamics equation — see, e.g., [6]) the gyrotropic form $Q_{ijk}^\alpha = q_\perp^\alpha (\tau_{ij} b_k + \tau_{jk} b_i + \tau_{ki} b_j) + q_\parallel^\alpha b_i b_j b_k$ with $\tau_{ij} = \delta_{ij} - b_i b_j$, and by defining the total time derivative comoving with each species bulk velocity, $d/dt^\alpha \equiv \partial/\partial t + \mathbf{u}^\alpha \cdot \nabla$, the general form of the double-adiabatic equations for each species obtained from (3) can be written as (see, e.g., [7, Appx. A]):

$$\frac{dP_\parallel^\alpha}{dt^\alpha} + P_\parallel^\alpha \nabla \cdot \mathbf{u}^\alpha + 2P_\parallel^\alpha \nabla \mathbf{u}^\alpha : \mathbf{b}\mathbf{b} = -\nabla \cdot (q_\parallel^\alpha \mathbf{b}) + 2q_\perp^\alpha \nabla \cdot \mathbf{b}, \quad (6)$$

$$\frac{dP_\perp^\alpha}{dt^\alpha} + 2P_\perp^\alpha \nabla \cdot \mathbf{u}^\alpha - P_\perp^\alpha \nabla \mathbf{u}^\alpha : \mathbf{b}\mathbf{b} = -\nabla \cdot (q_\perp^\alpha \mathbf{b}) - q_\perp^\alpha \nabla \cdot \mathbf{b}. \quad (7)$$

When ideal MHD is assumed (no \mathbf{J} contribution in the second of Eqs. (5)) and heat fluxes are neglected, in the cold electron limit with $m_e/m_i = 0$ and dropping again the α apex, the ion pressure equations can be combined with Eqs. (5) to get the more customary form [5]:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{P_\parallel B^2}{n^3} \right) = 0, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{P_\perp}{nB} \right) = 0. \quad (8)$$

By naming $\tilde{P}_\parallel^\alpha$ and \tilde{P}_\perp^α the scalar pressure components defined with respect to the average bulk plasma $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ -velocity \mathbf{U} and by retaining warm electrons in an ideal MHD closure while neglecting heat fluxes again, identical equations to (8) can be shown to hold for $\tilde{P}_\parallel^e + \tilde{P}_\parallel^i$ replacing P_\parallel , for $\tilde{P}_\perp^e + \tilde{P}_\perp^i$ replacing P_\perp , and for $d/dt_U \equiv \partial/\partial t + \mathbf{U} \cdot \nabla$ replacing d/dt (see, e.g., [8]). Eqs. (8) respectively express the average fluid conservation of two adiabatic invariants: the “action” of an infinitesimal fluid element of extension δl along a magnetic line constituted by particles moving with velocity v_\parallel parallel to \mathbf{B} , and the average *magnetic moment* $\langle \mu \rangle$ (see again Ref. [8] for a discussion).

A “generalization” of Eqs. (8), valid for each species in non-ideal MHD, can be obtained by rewriting Eqs. (6)–(7) while eliminating $\nabla \cdot \mathbf{u}^\alpha$ by means of the continuity equations (1) and the $\nabla \mathbf{u}^\alpha : \mathbf{b}\mathbf{b}$ contribution by means of the equations for the evolution of B and of \mathbf{b} , which can be obtained from the curl of Eqs. (2). In particular, for $\alpha = e, i$ we find:

$$\frac{dB}{dt^\alpha} = B(\nabla \mathbf{u}^\alpha : \mathbf{b}\mathbf{b}) - B\nabla \cdot \mathbf{u}^\alpha + \mathbf{b} \cdot \mathbf{F}^\alpha, \quad \frac{d\mathbf{b}}{dt^\alpha} = \mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{u}^\alpha - \mathbf{b}(\nabla \mathbf{u}^\alpha : \mathbf{b}\mathbf{b}) + (\mathbf{F} - \mathbf{b}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{F})), \quad (9)$$

where

$$\mathbf{F}^\alpha \equiv -\frac{B}{\Omega_\alpha} \mathbf{f}^\alpha \equiv -\frac{B}{\Omega_\alpha} \nabla \times \left(\frac{d\mathbf{u}^\alpha}{dt^\alpha} + \frac{\nabla \cdot \mathbf{\Pi}^\alpha}{n^\alpha m^\alpha} \right). \quad (10)$$

From the first of Eqs. (9), we write

$$(\nabla \mathbf{u}^\alpha : \mathbf{b}\mathbf{b}) = \frac{1}{B} \frac{dB}{dt^\alpha} - \frac{1}{n^\alpha} \frac{dn}{dt^\alpha} + \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{f}^\alpha}{\Omega^\alpha}, \quad (11)$$

which, substituted in Eqs. (6)–(7), gives

$$\left[\frac{d}{dt^\alpha} + 2 \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{f}^\alpha}{\Omega^\alpha} \right] \left(\frac{P_{||}^\alpha B^2}{(n^\alpha)^3} \right) = \frac{B^2}{(n^\alpha)^3} \left(-\nabla \cdot (q_{||}^\alpha \mathbf{b}) + 2q_{\perp}^\alpha \nabla \cdot \mathbf{b} \right), \quad (12)$$

$$\left[\frac{d}{dt^\alpha} - \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{f}^\alpha}{\Omega^\alpha} \right] \left(\frac{P_{\perp}^\alpha}{n^\alpha B} \right) = \frac{1}{n^\alpha B} \left(-\nabla \cdot (q_{\perp}^\alpha \mathbf{b}) - q_{\perp}^\alpha \nabla \cdot \mathbf{b} \right). \quad (13)$$

These equations, which are just a rewriting of the double adiabatic equations (6)–(7), state the evolution of CGL-like adiabatic invariants of each species when heat fluxes at the zeroth $\omega/|\Omega^\alpha|$ contributions are retained (r.h.s. terms) and full-two fluid effects are considered (the $\sim \mathbf{b} \cdot \mathbf{f}^\alpha/\Omega^\alpha$ l.h.s. terms). These latter contributions, when written by using Eq. (10), must be consistently power-expanded in order to retain the proper Finite-Larmor-Radius (FLR) corrections. At first order in $\omega/|\Omega^\alpha|$, FLR effects related to the components of the next order solution $\mathbf{\Pi}^{\alpha,1}$ of the power expansion of Eq. (3) enter in the equations for P_{\perp} only, namely Eqs. (7) and (13) — see, e.g., Eqs. (A15)–(A20) of Ref. [7]. In this notation, Eq. (A15) of Ref. [7] rewrites as Eq. (13) to which a further r.h.s. term $(\nabla \mathbf{u}^\alpha : \mathbf{\Pi}^{\alpha,1})/(n^\alpha B)$ must be added, which expresses first order FLR corrections that depend on the components of the strain tensor $\nabla \mathbf{u}^\alpha$ (see also Sec. 3.2.1 of Ref. [4]).

2.1 Comparison with magnetic moment conservation in gyrokinetic theory

In order to make connection with gyrokinetic theory, let us focus on the equation for P_{\perp}^α and to the associated fluid adiabatic invariant, $\langle \mu \rangle$. We can relate it to the single particle magnetic moment

$$\mu \equiv \frac{(\mathbf{v}_{\perp}^\alpha - \mathbf{V}_{\perp}^\alpha)^2}{2B}, \quad (14)$$

where \perp stands again for the component perpendicular to \mathbf{B} , $\mathbf{v}_{\perp}^\alpha$ is the total particle velocity and $\mathbf{V}_{\perp}^\alpha$ is some reference velocity. Depending on whether $\mathbf{V}_{\perp}^\alpha$ is zero, it is the guiding-center velocity, the $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ speed or the fluid velocity $\mathbf{u}_{\perp}^\alpha$, “different kinds” of magnetic moment can be defined. In the case of single particle motion, their differences and conservations have been recently discussed in Ref. [9]. In the fluid description discussed here we are interested in three cases, which we respectively label: μ_{tot}^α when $\mathbf{V}_{\perp}^\alpha = 0$; μ_T^α when $\mathbf{V}_{\perp}^\alpha = \mathbf{u}_{\perp}^\alpha$ and the magnetic moment is thus related to perpendicular thermal contributions only; and μ_D^α when $\mathbf{V}_{\perp}^\alpha = \mathbf{E} \times \mathbf{B}/B^2$. When \mathbf{B} is constant and uniform and \mathbf{E} does not depend on space, μ_D^α coincides with the definition of μ_G^α referred to the gyrocenter velocity and used in gyrokinetic theory [9]. Introducing now the brackets $\langle \dots \rangle$ to express average over the particle velocity according to $\langle A \rangle \equiv (1/n^\alpha) \int A f^\alpha d^3v^\alpha$, we can relate the averages of the magnetic moments above defined to P_{\perp}^α :

$$\frac{P_{\perp}^\alpha}{2n^\alpha B} = \langle \mu_T^\alpha \rangle = \langle \mu_{\text{tot}}^\alpha \rangle - \frac{m^\alpha (u_{\perp}^\alpha)^2}{2B}. \quad (15)$$

Then, when a sufficiently strong magnetic field is considered, consistently with the $\omega/|\Omega_\alpha| \ll 1$ assumption, to the lowest order of the $\omega/|\Omega_\alpha|$ power expansion we have $\mathbf{u}_\perp^\alpha = \mathbf{E} \times \mathbf{B}/B^2$ for both $\alpha = e, i$, and therefore $\langle \mu_T^\alpha \rangle = \langle \mu_D^\alpha \rangle$. In this latter case $d/dt^\alpha \simeq d/dt^i$ and $\mathbf{b}^\alpha \cdot \mathbf{f}^\alpha/|\Omega_\alpha| \simeq \mathbf{b} \cdot (\nabla \cdot \mathbf{\Pi}^\alpha)/(n^\alpha m^\alpha \Omega_\alpha)$ for both $\alpha = e, i$. From Eqs. (7,13) one then recognizes the contributions of two-fluid non-ideal effects to the non-conservation of the averaged magnetic moments considered above. In the following we focus on the violations of the conservation of $\langle \mu \dots \rangle$, which are due to the gradients of the fluid velocity \mathbf{u}^α . In the reduced double adiabatic theory at $\omega/|\Omega_\alpha| \ll 1$ they enter as $\mathcal{O}(\omega/|\Omega_\alpha|)$ contributions related to the first order FLR corrections to Eqs. (7) and (13), which violate the gyrotropic symmetry of the pressure [10].

We now discuss in deeper detail this issue at the varying of $\omega/|\Omega_\alpha|$, when the full pressure tensor equation (3) is considered instead of its lowest order solution for $\omega/|\Omega_\alpha| \ll 1$. We emphasize in this regard the radical difference which has been evidenced for the modelling of both some linear modes [1] and pressure-driven instabilities [11] between a description which retains the full pressure tensor dynamics and a reduced description in which the non-gyrotropic degrees of freedom in the evolution of $\mathbf{\Pi}^\alpha$ are suppressed because of a gyrotropic or polytropic assumption. This difference reflects in the improper dispersion provided by FLR corrections to a CGL closure for the perpendicular propagation of magnetoacoustic waves (see discussion in Ref. [1] and references therein), and in spurious threshold conditions for the onset of Weibel-type modes when polytropic closures for a diagonal pressure tensor are assumed instead of letting all the pressure tensor components evolve according to Eqs. (3) [11].

3 Full pressure tensor dynamics and role of shear flows

In Ref. [2] the deformations induced by the different terms acting on $\mathbf{\Pi}^\alpha$ have been discussed. Beside of rigid rotations around the local direction of \mathbf{B} which are due to the r.h.s. term of Eq. (3), three kinds of deformation of the pressure tensor can be induced by the gradients of \mathbf{u}^α : isotropic compressions/expansions related to $\nabla \cdot \mathbf{u}^\alpha$, rigid rotations around the axis of the local vorticity $\omega^\alpha = \nabla \times \mathbf{u}^\alpha$, and volume-preserving deformations without rotations due to the traceless rate of shear \mathbf{D}^α , which in a full 3D geometry is defined as $\mathbf{D}^\alpha \equiv (1/2)[\nabla \mathbf{u}^\alpha + (\nabla \mathbf{u}^\alpha)^T] - (\nabla \cdot \mathbf{u}^\alpha) \mathbf{I}/3$. All of them are contributed by the components of the gradient tensors $\nabla \mathbf{u}^\alpha$. Naming P_1^α, P_2^α and P_3^α the eigenvalues of $\mathbf{\Pi}^\alpha$, which identify the length of its principal axes, we see that \mathbf{D}^α only can modify their relative amplitude being therefore capable to make an initially isotropic pressure tensor anisotropic. This anisotropisation is, in the most general case, agyrotropic, in the sense that all three eigenvalues P_1^α, P_2^α and P_3^α can change their value independently. This, in general, occurs at a rate $\tau_{\text{an}}^{-1} \sim |\nabla \mathbf{u}^\alpha|$ and the extent of the attained anisotropisation depends in a non trivial way (also due to the nonlinear plasma response to the deformation, which is described by the full set of Eqs. (1)–(4)) on the amplitude of $\omega/|\Omega_\alpha|$, the limit $\omega/|\Omega_\alpha| \rightarrow 0$ converging of course to the double-adiabatic, gyrotropic, solution $\mathbf{\Pi}^{\alpha,0}$ previously discussed. In this regard, we note that the gyrotropic anisotropy allowed by the different evolution of P_{\parallel}^α and P_{\perp}^α in the double adiabatic closures (6) and (7) is also related to the action of \mathbf{D}^α . In this case, however, it depends on the compression contribution only, $\nabla \cdot \mathbf{u}^\alpha$, contained in the $\nabla \mathbf{u}^\alpha : \mathbf{b}\mathbf{b}$ terms which are differently weighed for P_{\parallel}^α and P_{\perp}^α (see Ref. [4]). It is worth stressing that the gyrotropic anisotropisation in a CGL-type closure is here permitted by the rupture of the spatial isotropy of the charged particle motion, which is determined by the presence of a magnetic field, but *it is not caused* by it: it is the different fluid compression parallel and perpendicular to \mathbf{B} which in a CGL closure determines the gyrotropic anisotropy. When the full pressure tensor evolution is retained, it is then the rate of shear \mathbf{D}^α which in general causes both a non-gyrotropic and a gyrotropic anisotropy with respect to the principal axes of the matrix \mathbf{D}^α .

3.1 Agyrotropisation induced by shear flows: Evolution of the gyrotropic and non-gyrotropic anisotropy in a 2D coordinate dependence

It is possible to provide a relatively simple, rigorous analytical treatment of this anisotropisation mechanism [2] in a geometrical setting in which, in the mass-less electron limit $m_e/m_i \rightarrow 0$, the ion vorticity vector is locally aligned to the magnetic field at any time, $\omega^i \times \mathbf{B} = 0$. This occurs in a 2D

geometry in which an initial magnetic field is aligned, say, along z , and all fluid components depend just on x , y , and time. The need to restrict to the $m_e/m_i = 0$ case, which in this geometry prevents the generation of in-plane magnetic fluctuations (cf. Eqs. (2) and (5)), is due to the fact that, for the moment, a linear analysis of the system equations (1)–(4) has been carried out and checked against Vlasov–Maxwell theory only for this case, in which a spurious branch has been evidenced for velocity fluctuations along the magnetic field component [1]. The condition $\omega^i \times \mathbf{B} = 0$ allows to get rid of these problems. A more complete linear analysis for an arbitrary propagation angle is in course of development. For simplicity, we also close now the heat flux tensor by assuming $\nabla \cdot \mathbf{Q}^i = 0$. Even though the heat fluxes are expected to oppose to the pressure anisotropisation, their role is assumed to be secondary in this geometry in which there are no gradients along the magnetic field, and this ansatz is comforted by the fact that the results obtained under all the hypotheses above have proven (see Ref. [4]) to be in quite good agreement with kinetic and hybrid kinetic simulations [3]. We finally note that these hypotheses on the geometry are also consistent with a fluid description of the drift-kinetic electrostatic turbulence in tokamaks, for which a reduced gyrokinetic Vlasov–Poisson modelling is usually adopted (see, e.g., Ref. [12]).

Let us drop again the apex $\alpha = i$. We assume the initial pressure tensor to be diagonal with respect to the cartesian axes. In this 2D geometry we can then focus only on the evolution of the in-plane components of $\mathbf{\Pi}$, which we indicate with the 2×2 matrix $\mathbf{\Pi}_\perp$, and on the evolution of the parallel component to \mathbf{B} , $\Pi_{zz} = P_\parallel$. By construction, also the gradient tensor is now a 2×2 matrix, as well as it is the strain rate tensor, which in this case is defined as $\mathbf{D}_\perp \equiv (1/2)[\nabla \mathbf{u}_\perp + (\nabla \mathbf{u}_\perp)^T - (\nabla \cdot \mathbf{u}_\perp) \mathbf{I}_\perp]$, the \perp index denoting here the components in the x, y plane for both matrices and vectors. By using a polar coordinate representation [2] we introduce the angles θ and ϕ which measure the instantaneous orientation of the principal axes of $\mathbf{\Pi}_\perp$ and of \mathbf{D}_\perp with respect to the cartesian axes x and y , defined so that $\Pi_{xy} = ((P_1 - P_2)/2) \sin 2\theta$ and $D_{xy} = D_\perp \sin 2\phi$. Here $\pm D_\perp$ are the eigenvalues of \mathbf{D}_\perp , and A^{ng} provides a measure of the local agyrotropy, that is of the non-gyroscopic pressure anisotropy, which is related to the eigenvalues P_1 and P_2 of $\mathbf{\Pi}_\perp$ (when the principal axes are chosen so that $P_3 = P_\parallel$) according to

$$A^{\text{ng}} \equiv \frac{P_1 - P_2}{P_1 + P_2} = \frac{\sqrt{(\text{tr}[\mathbf{\Pi}_\perp])^2 - 4 \det[\mathbf{\Pi}_\perp]}}{\text{tr}[\mathbf{\Pi}_\perp]}. \quad (16)$$

The amount of gyroscopic pressure anisotropy is then quantified as

$$A^{\text{gyr}} \equiv \frac{2P_3}{P_1 + P_2} = \frac{2P_\parallel}{\text{tr}[\mathbf{\Pi}_\perp]}. \quad (17)$$

It can be shown [2, 4] that the two anisotropies evolve according to

$$\frac{dA^{\text{ng}}}{dt} = 2D_\perp [(A^{\text{ng}})^2 - 1] \cos[2(\theta - \phi)], \quad \frac{dA^{\text{gyr}}}{dt} = 2D_\perp A^{\text{gyr}} A^{\text{ng}} \cos[2(\theta - \phi)], \quad (18)$$

meaning that the rate of shear acts as a source of agyrotropy, which is generated with a maximum rate $\tau_{\text{an}}^{-1} \sim D_\perp$ when the principal axes of $\mathbf{\Pi}_\perp$ and \mathbf{D}_\perp are dephased by an angle $\pi/2$ (first equation), and that with a similar mechanism a gyroscopic anisotropy develops as soon as a non-zero agyrotropy is generated (second equation).

3.2 Non-conservation of the average magnetic moment induced by planar shear flows

We can relate the results above to the evolution of the average magnetic moments defined by Eq. (14). To this purpose we can define an instantaneous ‘‘perpendicular pressure’’ as $P_\perp = (P_1 + P_2)/2 = \text{tr}[\mathbf{\Pi}_\perp]/2$, whose evolution is obtained by taking the trace of Eq. (3) after projection on the x, y plane. Using $\text{tr}[\mathbf{D}_\perp \mathbf{\Pi}_\perp] = 2A^{\text{ng}} D_\perp P_\perp \cos[2(\theta - \phi)]$ (see also Ref. [4]) we write:

$$\frac{dP_\perp}{dt} = -2A^{\text{ng}} D_\perp P_\perp \cos[2(\theta - \phi)] - 2(\nabla_\perp \cdot \mathbf{u}_\perp) P_\perp. \quad (19)$$

The equation for $\langle \mu_T \rangle$ in this geometry is obtained by substituting the (first) definition of Eq. (14) into Eq. (19). We can then eliminate dn/dt by using Eq. (1) and dB/dt with the equation obtained from

the curl of Eq. (5) in the $m_e/m_i = 0$ limit. In this 2D configuration in which $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$, the latter equation reads

$$\frac{dB}{dt} + B\nabla_{\perp} \cdot \mathbf{u}_{\perp} + \frac{c}{4\pi e} \left(\frac{B}{n^2} (\nabla_{\perp} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_{\perp} n - \frac{1}{n} (\nabla_{\perp} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_{\perp} B \right) = 0, \quad (20)$$

which corresponds to the 1-fluid rewriting of $dB/dt^e = -B\nabla_{\perp} \cdot \mathbf{u}_{\perp}^e$. We finally get

$$\frac{d\langle\mu_T\rangle}{dt} = \langle\mu_T\rangle \left\{ -2A^{\text{ng}} D_{\perp} \cos[2(\theta - \phi)] + \frac{c}{4\pi e} \left[\frac{1}{n^2} (\nabla_{\perp} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_{\perp} n - \frac{1}{nB} (\nabla_{\perp} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_{\perp} B \right] \right\}. \quad (21)$$

The contributions in brackets are due to inhomogeneities of the plasma density and of the magnetic field (they come from the Hall-term in Ohm's law, i.e., from the $\nabla \times (\mathbf{J}/(ne) \times \mathbf{B})$ contribution of the second of Eqs. (5)), and are not related to the shear-induced anisotropization process. Instead, the generation of plasma agyrotropy stated by Eq. (18) determines a corresponding violation of the conservation of the averaged thermal magnetic moment, which is described by the first contribution in curl parantheses. Using this equation, analogous equations can be deduced for the other definitions of $\langle\mu_{\dots}\rangle$ given by Eq. (14) or by considering further possible definitions of the particle magnetic moment (see, e.g., Ref. [9]). This result is relevant to studies of 2D turbulence in which relatively large values of the shear rate, $|D_{\perp}| \sim |\omega_z|$, are encountered near vorticity sheets [4] generated by the nonlinear dynamics.

4 Conclusion

In reviewing some recent results about the mechanism which, in a fluid framework, generates pressure anisotropy because of the action of the rate of shear on the full pressure tensor components [2], we have discussed the role played by non-ideal effects on the evolution of the double-adiabatic invariants in a CGL-type closure. By introducing an average particle magnetic moment related to the perpendicular fluid adiabatic invariant, $P_{\perp}/(nB)$, we have provided an equation for its evolution, which applies to 2D slab geometries relevant to the interpretation of kinetic simulations of plasma turbulence [4]. In particular, this analysis is of potential interest to studies of electrostatic drift-kinetic turbulence in a 2D slab geometry perpendicular to a background magnetic field. This extended fluid description may provide an interesting complementary description to a Vlasov modelling by making it possible to keep trace of nonlinear non-gyrotropic effects, usually excluded from a standard gyrokinetic approach.

References

1. D. DEL SARTO, F. PEGORARO & A. TENERANI, *Plasma Phys. Control. Fusion*, **59**, 045002 (2017).
2. D. DEL SARTO, F. PEGORARO & F. CALIFANO, *Phys. Rev. E*, **93**, 053203 (2016).
3. S. SERVIDIO *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **108**, 045001 (2012); L. FRANCI *et al.*, *AIP Conf. Proc.*, **1720**, 040003 (2016); Y. YANG *et al.*, *Phys. Rev. E*, **95**, 061201 (2017).
4. D. DEL SARTO & F. PEGORARO, *Mon. Notices Royal Astron. Soc.*, **475**, 181 (2018).
5. G. F. CHEW, M. L. GOLDBERGER & F. E. LOW, *Los Alamos Lecture Notes on Physics of Ionized Gases*, LA-2055 (1955).
6. P.-L. SULEM & T. PASSOT, *J. Plasma Phys.*, **81**, 325810103 (2015).
7. S. S. CERRI *et al.*, *Phys. Plasmas*, **20**, 112112 (2013).
8. R. M. KULSRUD, MHD description of plasmas, in *Handbook of Plasma Physics*, Eds. M. N. Rosenbluth, R. Z. Sagdeev, North-Holland, Vol. 1 (1983).
9. C. D. STEPHENS, R. W. BRZOWSKI & F. JENKO, *Phys. Plasmas*, **24**, 102517 (2017).
10. A. N. KAUFMAN, *Phys. Fluids*, **3**, 610 (1960).
11. M. SARRAT, D. DEL SARTO & A. GHIZZO, *Europhys. Lett.*, **115**, 45001 (2016); M. SARRAT, D. DEL SARTO, A. GHIZZO, *J. Plasma Phys.*, **83**, 705830103 (2017).
12. A. J. BRIZARD & T. S. HAHM, *Rev. Mod. Phys.*, **79**, 421 (2007).

Spontaneous magnetic reconnection of thin current sheets

Daniele Del Sarto¹, Maurizio Ottaviani², Fulvia Pucci³, Anna Tenerani⁴ & Marco Velli⁴

¹ Institut Jean Lamour, UMR 7198 CNRS - Université de Lorraine, Vandoeuvre-lés-Nancy, France

² CEA, IRFM, Saint-Paul-lez-Durance, France

³ NIFS, NINS, Toki 509-5292, Japan and PPPL, Princeton University, Princeton, NJ, USA

⁴ University of California Los Angeles, USA

daniele.del-sarto@univ-lorraine.fr

Résumé. Nous nous intéressons au problème des taux de reconnexion magnétique spontanée sur couches de courants minces, en présentant une généralisation de la notion de renormalisation des échelles des taux de croissance pour les instabilités du type *tearing mode*. Nous présentons ainsi des résultats récents sur l'application de ces notions aux processus de reconnexion non linéaire [1–3] et de reconnexion des couches minces en évolution rapide [1, 4, 5].

Abstract. We address the problem of magnetic reconnection rates on large aspect ratio current sheets by presenting a generalization of the notion of rescaling of the growth rates of tearing-type instabilities. In this, we review some recent results on the application of these notions to nonlinear reconnection processes [1–3] and to reconnection on rapidly evolving current sheets [1, 4, 5].

1 Introduction

Several plasma phenomena, ranging from solar eruptions to disruptive processes in tokamak, display an abrupt release of magnetic energy in the form of particle acceleration and heating induced by spontaneous magnetic reconnection events. The most known example of spontaneous reconnection is provided by tearing-type modes [6], which develop in a 2D geometry from harmonic oscillations along current sheets \mathbf{J} corresponding to sufficiently strong spatial gradients across the sheets of the magnetic field components of the \mathbf{B} components parallel to the sheet. These linear instabilities generate the characteristic “magnetic islands” structures (also named “magnetic vortices” or “plasmoids”) along a neutral line. These modes can be described in the framework of the Magnetohydrodynamic (MHD) theory, in which the fluid equation for the bulk plasma are coupled to the non-relativistic Maxwell’s equations by means of the so-called generalized Ohm’s law. This equation describes the electron response to the electromagnetic forces:

$$\mathbf{E} + \frac{\mathbf{u}}{c} \times \mathbf{B} = \sum_i \mathcal{O}(\varepsilon_i) \mathbf{f}_i(\nabla \mathbf{B}, \nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{J}, \nabla \cdot \Pi), \quad (1)$$

where coefficients of the order of infinitesimally small parameters “ ε_i ” weigh vector functions \mathbf{f}_i which depend on the gradients of the fluid components. Magnetic reconnection violates topological conservation related to the “ideal” form of Eq. (1), which combined with Faraday’s law implies the Lagrangian transport of distinct magnetic lines by the flow \mathbf{u} in an MHD plasma [7]. The violation occurs locally when the magnitude of the spatial gradients at r.h.s. of Eq. (1) compensates the smallness of the $\mathcal{O}(\varepsilon_i)$ coefficients, which depend on effects neglected in the ideal MHD limit, such as plasma resistivity, a finite electron inertia (finite m_e/m_i corrections) or pressure anisotropy. Here, we provide examples for the first two effects only, which we respectively label with $i = \eta$ (resistivity) and $i = m_e$ (finite electron inertia) and which would enter at r.h.s. of Eq. (1) as “ $+\eta \mathbf{J}$ ” and “ $+m_e/(ne^2)(\partial_t \mathbf{J} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{J})$ ” respectively, but our presentation can in principle be generalized to include the neglected effects.

2 Theory of linear reconnecting instabilities revised

The classical linear theory of the tearing mode instability [6], assumes a slab geometry configuration (all vector components in the plane x, y depend just on time and on the x and y coordinates) in which an equilibrium magnetic field $\mathbf{B}_{\text{eq}} = (0, B_y^{\text{eq}}(x), B_z^{\text{eq}})$ with $B_z^{\text{eq}} \gg B_y^{\text{eq}}$ and with $B_y^{\text{eq}}(x) \sim x/a$ for $|x/a| \ll 1$, is sheared over a characteristic scale length “ a ”. This length scale therefore defines the characteristic width of the current profile, \mathbf{J}_{eq} , on which the linear stability of modes $\sim f(x) e^{i(ky - \omega t)}$ with $\omega \equiv \omega_R + \gamma$ and $k \equiv 2\pi m/L$, corresponding to m oscillations on a periodical interval of length L , is investigated by means of a boundary layer approach: at $|x/a| \gtrsim 1$ ideal MHD stability is assumed, whereas non-ideal terms are considered in the inner reconnecting layer (see Fig. 1 (a)). Since a is here the only macroscopic spatial scale, it is the natural reference length to be assumed as a normalization length $L_0 = a$. The Alfvén crossing time in the ideal region, defined as $\tau_A = a/c_a$ in terms of a reference in-plane Alfvén velocity $c_A \equiv B_{\text{eq}}/\sqrt{4\pi n_0 m}$, where $B_{\text{eq}} \equiv B_y^{\text{eq}}(x_0)$ is evaluated in some point x_0 of the “ideal” region where also n_0 is measured, provides the natural normalization time of the system, $\tau_0 = \tau_A$.

Regardless of the non-ideal parameter ε_i at play, different regimes can be characterized in terms of the well-known instability parameter $\Delta'(ka)$ expressing the logarithmic derivative of the eigenmode across the reconnecting layer [6]. The instability condition $\Delta'(ka) > 0$ fixes the range of unstable wavenumbers for each equilibrium profile and, for a fixed finite L , the maximum number of magnetic islands that can be observed along the neutral line. Three main regimes can thus be identified in terms of the characteristic width of the reconnecting layer, $\delta(\varepsilon_i, ka)$, which identifies the thickness of the current sheet generated by the reconnecting mode during the linear stage (see. Figs. 1):

i) the constant- ψ regime of the properly named “tearing mode” [6], for $\Delta'(ka) \delta(\varepsilon_i, ka) < 1$, that gives a dispersion relation of the kind

$$\gamma_{\text{TM}} \tau_A \sim \varepsilon_i^{a_1} (ka)^{a_2} (\Delta' a)^{a_3} \quad (2)$$

for some rational a_1, a_2, a_3 with $1 > a_1 > 0$;

ii) the large- Δ' regime, characterizing the so-called “internal kink mode” for $\Delta'(ka) \delta(\varepsilon_i, ka) \gg 1$ [8], that gives a dispersion relation of the kind

$$\gamma_{\text{IK}} \tau_A \sim \varepsilon_i^{b_1} (ka)^{b_2} \quad (3)$$

for some rational b_1, b_2 with $1 > b_1 > 0$;

iii) the fastest growing mode [6, Appendix D] in a continuum wavenumber spectrum, which corresponds to the condition $\Delta'(ka) \delta(\varepsilon_i, ka) \simeq 1$ and therefore gives

$$\gamma_M \tau_A \sim \varepsilon_i^{c_1} \quad (4)$$

for a $k_M \tau_A \sim \varepsilon_i^{d_1}$ with $1 > c_1 > 0$ and $d_1 > 0$. The explicit dependence of γ_M on k_M is always eliminated by deducing a dependence from k_M on ε_i thanks to the condition $\gamma_M \equiv \gamma_{\text{TM}} = \gamma_{\text{IK}}$, while c_1 depends on the particular form of the equilibrium profile and can be deduced by estimating the power dependence of Δ' on ka for $ka \ll 1$ [2]. It is important to underline that in all these cases $\gamma(\varepsilon_i) \tau_A \rightarrow 0$ as $\varepsilon_i \rightarrow 0$ by construction and consistently with the notion of non-ideal instability.

Even if these modes were first identified in the MHD resistive regime, where $\varepsilon_\eta = \tau_A \eta c / (4\pi a^2) \equiv S^{-1}$ is the resistive Lundquist number, they were later generalized to other semi-collisional and collisionless regimes and frequency ranges (see references in Ref. [3]). Here we also consider the MHD inertia-driven regime where $\varepsilon_m = c^2 m_e / (4\pi n e^2 a^2) \equiv (d_e/a)^2$ and d_e is the electron skin-depth.

Due to the ideal MHD assumption at the scales a and τ_A , any microscopic space-depending and time-depending quantity which enters in the small non-ideal parameters ε_i is necessarily normalized so that each of the ε_i scale as some *positive* power of $(1/a)$ and/or as some *positive* power of $\tau_A = (a/c_A) \sim (a/B_0)$,

$$\varepsilon_i[a, B_0] \sim \left(\frac{1}{a}\right)^q \left(\frac{a}{B_0}\right)^r, \quad q, r \geq 0. \quad (5)$$

This introduces a non-trivial, implicit dependence on the normalization scales of the growth rates $\gamma \tau_A$: indeed, in the classical tearing mode theory first devised for reconnecting modes in tokamaks, the unstable

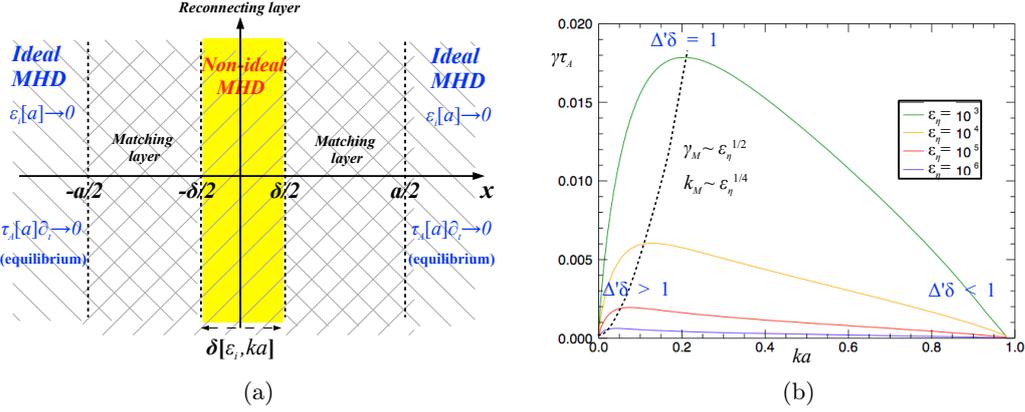


Figure 1. (a) Sketch of the boundary layer approach. (b) Example of tearing-type mode dispersion function for the resistive case, with the three asymptotic regimes (i–iii) highlighted.

wave number is fixed by the integer poloidal number m associated with the resonant surface of radius r_r on which the mode is destabilized, $L_0 = a$ is of the order of the tokamak major radius, and the equilibrium current layer is by construction periodic and of length $L = 2\pi r_r \sim L_0$. Instead, in most astrophysical environments, such as coronal loops or planetary magnetotails, as well as in the nonlinear evolution of primary reconnecting modes or in MHD turbulence, large aspect ratio current sheets with $L/a \gg 1$ are encountered. In these cases, while a may be small relative to $L_0 \sim L$ it remains large enough to allow the application of a boundary layer theory ($a \gg \delta(\varepsilon_i)$).

Two cases of rescaling can be then considered for reconnection on large aspect ratio current sheets. The first one rescales only lengths, while the reference magnetic field amplitude B_0 is fixed as the reference magnetic field B_{cs} on the current sheet, i.e., $B_{cs} = B_y^{\text{eq}}(x_0)$ of the classical tearing mode analysis. In this case we neglect the explicit dependence on B_0 and, from Eq. (5),

$$\tau_A[a] = \tau_A[L_0] \left(\frac{a}{L_0} \right), \quad \varepsilon_i[a] = \varepsilon_i[L_0] \left(\frac{L_0}{a} \right)^{q-r}, \quad q, r \geq 0. \quad (6)$$

The second case, which generalizes the previous one, is when both the reference length scale L_0 and the magnetic field amplitude B_0 differ from a and B_{cs} . In this case, using again Eq. (5):

$$\tau_A[a, B_{cs}] = \tau_A[L_0, B_0] \left(\frac{a}{L_0} \right) \left(\frac{B_0}{B_{cs}} \right), \quad \varepsilon_i[a, B_{cs}] = \varepsilon_i[L_0, B_0] \left(\frac{L_0}{a} \right)^{q-r} \left(\frac{B_0}{B_{cs}} \right)^r, \quad q, r \geq 0. \quad (7)$$

2.1 Application to thin current sheets

Considering for example the simplest rescaling of Eq. (6), it generally follows that for some $s > 0$ which depends on q, r and on the specific scaling of $\gamma[a]$ with $\varepsilon_i[a]$,

$$\gamma[L_0] \tau_A[L_0] \sim (\gamma[a] \tau_A[a])|_{a \rightarrow L_0} (L_0/a)^s. \quad (8)$$

Here $(\gamma[a] \tau_A[a])|_{a \rightarrow L_0}$ stands for the scaling of the mode obtained in the standard tearing theory (any of the three of Eqs. (2)–(4)) in terms of ε_i, k and Δ' , which this time are normalized to L_0 . For the fastest growing mode, for example, using Eq. (4) we find $s = c_1(q-r) + 1$ and Eq. (8) becomes

$$\gamma_M[L_0] \tau_A[L_0] \sim (\varepsilon_i[L_0])^{c_1} (L_0/a)^{c_1(q-r)+1}. \quad (9)$$

The growth rate of the fastest growing mode (4) and (9) is representative of the overall reconnection rate on \mathbf{J}_{eq} when a sufficiently large aspect ratio current sheet is considered, so that an almost continuum

spectrum of wavenumbers can be destabilized. In particular, it was shown [9] that an aspect ratio $L/a \gtrsim 20$ is sufficient to destabilize a mode whose growth rate is well approximated by (4). In this case the amplitude of $(L_0/a)^{c_1(q-r)+1}$ may so compensate the smallness of $\varepsilon_i[L_0]$. The consequence of this has been discussed in [4] by noticing that, when $L_0 = L$, a maximum growth rate exists for spontaneous reconnecting modes, which cannot trespass the order of magnitude $\gamma[L]\tau_A[L] \sim \mathcal{O}(1)$ because of the “causality prescription” imposed by fact that in MHD energy is mediated by Alfvén waves. This leads to the notion of “*ideal tearing*” regime first introduced in resistive MHD in [4] and then generalized in [2], that is, of a $\Delta'\delta \sim 1$ tearing mode which develops with an Alfvénic growth rate $\gamma[L_0] \sim \tau_A[L_0]^{-1}$, independent of the macroscopic parameter ε_i allowing reconnection, when the aspect ratio becomes comparable to the threshold value

$$\left(\frac{L}{a}\right)_{B_{cs} \sim B_0} \sim (\varepsilon_i[L])^{-\alpha}, \quad \alpha = \frac{c_1}{c_1(q-r)+1}. \quad (10)$$

For example, in the purely resistive regime where $\varepsilon_\eta[a] = S_a^{-1}$, so that $q = 2$, $r = 1$, and for a Harris-pinch equilibrium $B_{cs}(x) = B_0 \tanh(x/a)$ for which $c_1 = 1/2$, we recover the threshold scaling $\alpha = 1/3$ of Ref. [4]. Slightly different values in the range $1/4 < \alpha < 1/2$ [2, 10] can be recovered for different dependences of \mathbf{J}_{eq} on the x -coordinate, which imply, as shown in [2], different values of c_1 . As a second example, an analogous threshold $\alpha = 1/3$ [2] is recovered in the inertia-driven regime, where $\varepsilon_d[a] \equiv (d_e/a)^2$ so that $q = 2$, $r = 0$, and for a $B_{cs}(x) = B_0 \tanh(x/a)$, for which this time $c_1 = 1$.

It is worth stressing the physical relevance of the *ideal tearing* solution: despite all the above estimates are obtained in the framework of an asymptotic theory, for which $\varepsilon_i[a], \varepsilon_i[L_0] \rightarrow 0$, the geometric threshold condition stated by Eq. (10) has proven by numerical analysis to be well satisfied by small yet finite values of $\varepsilon_i[L_0]$ (say $\varepsilon_i[L_0] \lesssim 10^{-7}$), which are relevant to a variety of reconnection processes in nature and laboratory [1, 2, 4, 5].

The more complex scenario in which rescaling (7) must be performed because of $B_0 \neq B_{cs}$ requires further ansatz. A case we will consider here is that of “embedded current sheets” [11], in which the hypothesis that the amplitude of the equilibrium current sheet, $|\mathbf{J}_{eq}| = J_{eq} \sim B_{cs}/a$, be comparable to some reference current density amplitude $J_0 \sim B_0/L_0$, allows to express the scaling of B_{cs} with respect to B_0 as a geometrical scaling with a/L_0 : from $J_0 \sim J_{eq}$, one obtains

$$\frac{B_{cs}}{B_0} \sim \left(\frac{a}{L_0}\right). \quad (11)$$

When applied to tearing-type modes [3] on large aspect ratio current sheets, Eq. (9) becomes

$$\gamma_M[L_0]\tau_A[L_0] \sim (\varepsilon_i[L_0])^{c_1} (L_0/a)^{c_1 q}. \quad (12)$$

Repeating the argument of Ref. [4] for $L_0 = L$, one finds in this case a threshold aspect ratio for the onset of a reconnection independent on ε_i , given by :

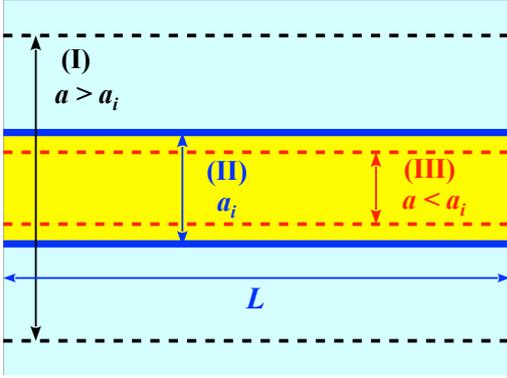
$$\left(\frac{L}{a}\right)_{J_{cs} \sim J_0} \sim (\varepsilon_i[L])^{-\alpha}, \quad \alpha = \frac{1}{q}. \quad (13)$$

Interestingly, this threshold condition *only depends on the spatial dependence of the microscopic parameter ε_i but not on its time-dependence and not on the growth rate scaling (4) of the fastest growing mode, nor, therefore, on the magnetic equilibrium profile*. In both the resistive [3] and inertia-driven regimes one then finds $\alpha = 1/2$.

3 Discussion: Reconnecting instabilities on evolving current sheets

When one wants to apply the estimate of the previous section for a tearing-type growth rate $\tilde{\gamma}$ to current sheets which are evolving on a time scale τ_{cs} , one should formally stick to the condition $\tau_{cs}^{-1} \ll \tilde{\gamma}$, so to consider the evolving current sheet as a relative equilibrium profile on which to perform a linear

analysis. However, even when one considers current sheets evolving on a time scale $\tau_{cs} \sim \tau_A[L_0]$, if $L_0 = L$, the threshold aspect ratio scalings of Eqs. (10) and (13) provide a *necessary condition* for the disruption of the current sheet by spontaneous reconnecting modes. It is indeed by recognizing the geometrical threshold condition of Eqs. (10) and (13) that, for $B_0 = B_{cs}$, a distinction was first made [4] between modes classified as slow (i.e., ideally stable), fast (i.e., (quasi-)ideally unstable), and violently unstable (i.e., with diverging growth rates while approaching the ideal limit): this made it possible to explain the paradox of the diverging growth rate obtained for the *plasmoid instability* [12] as $\varepsilon_\eta[L] \rightarrow 0$, as due to the un realizability of the Sweet–Parker steady configuration, since its aspect ratio $L/a \sim (\varepsilon_\eta[L])^{-1/2}$ obtained for $\tau_A[L_0]/\tau_{cs} \simeq 0$ is much larger than the threshold value of (10), that is, larger than current sheets which would be disrupted at ideal time scales. The argument generalizes to collisionless steady reconnection regimes [2] (see Fig. 2). The interesting question then arises about current sheets for which $\tau_A[L_0]/\tau_{cs} \neq 0$.



(I) *Asymptotically stable region* : “slow” reconnecting modes
(classical tearing)

$$\lim_{\varepsilon_i[L] \rightarrow 0} \gamma[L]\tau[L] = 0$$

(II) *Quasi-ideal reconnection* : “fast” reconnecting modes
(“ideal tearing” on quasi-singular current sheets)

$$\left(\frac{a_i}{L}\right)_{B_{cs} \sim B_0} \sim (\varepsilon_i[L_0])^\alpha \quad \lim_{\varepsilon_i[L] \rightarrow 0} \gamma[L]\tau[L] = O(1)$$

(III) *“Inaccessible region” for spontaneous reconnection*
(e.g. plasmoid instability on Sweet-Parker current sheets)

$$\lim_{\varepsilon_i[L] \rightarrow 0} \gamma[L]\tau[L] = \infty$$

Figure 2. Classification of reconnection regimes for $B_0 \sim B_{cs}$ at the varying of (a/L) for fixed L , a_i representing the critical value which, for a given L , satisfies Eq. (10): “slow” reconnection modes for $a \gtrsim a_i$, “fast” (i.e., at ideal scales) reconnection modes for $a \sim a_i$, “violently unstable” (i.e., faster than Alfvénic) modes for $a \lesssim a_i$.

This requires knowledge of the dynamics of the current sheet. Here we distinguish two major cases: current sheets generated by primary reconnecting modes growing on current profiles $J_0 \sim B_0/L_0$ with rates $\gamma_0[L_0]$ and for which we can assume $\tau_{cs}^{-1} \sim \gamma_0[L_0]$, and current sheets generated by convective motions at Alfvénic scales, such as, e.g., in turbulence. In the first case we can speak of secondary reconnecting instabilities, and they have been considered candidates responsible for a nonlinear reconnection rate increase relative to primary modes since the 1990s (see Ref. [3, App. B] for a review). Secondary instabilities may be also of fluid type [13], which may nonlinearly enhance the reconnection rate via secondary turbulent reconnection processes, though here we focus on secondary tearing-type modes only.

Consider first modes developing on a current sheet born of the collapse of an X -point into two Y -points [14], shown to occur during the nonlinear evolution of large- Δ' “slow” modes ($\gamma_0[L_0, B_0]\tau_A[L_0, B_0] \ll 1$), both resistive and collisionless [15]. We consider in particular a primary purely resistive mode (simulations in the inertia-driven regime evidence the dominant role played by flows and the onset of secondary fluid instabilities rather than tearing modes [13]) for which Eq. (3) specializes to $\gamma_0[L_0, B_0]\tau_A[L_0, B_0] \sim (\varepsilon_\eta[L_0])^{1/3}(kL_0)^{2/3}$. This case has been studied in Ref. [3] by noting that the current sheet attains at the end of the linear stage of the primary mode a length $L \sim L_0$, a thickness a which can be (over-)estimated using the reconnecting layer width $\delta_0(\varepsilon_\eta[L_0, B_0])$ of the primary mode, and an amplitude $J_{cs} \sim J_0$, so that condition (11) holds. Heuristically assuming that this condition still holds when a sufficiently rapid secondary tearing mode disrupts \mathbf{J}_{cs} , by using (12) one finds that the fastest growing mode satisfies this condition, since it is destabilized in a few e -folding times of the primary linear instability, and since its growth rate $\tilde{\gamma}[L_0, B_0]\tau_A[L_0, B_0] \sim (\varepsilon_\eta[L_0, B_0])^{1/6}$ asymptotically satisfies $\tilde{\gamma}_M[L_0, B_0] \gg \gamma_0[L_0, B_0] \sim \tau_{cs}^{-1}$. Considering then that a transition from a resistive to a collisionless regime occurs when $\tilde{\gamma}[L_0, B_0]\tau_A[L_0, B_0] \gtrsim \nu_c[L_0, B_0]\tau_A[L_0, B_0]$ with ν_c being the electron-ion collision frequency, using $\nu_c[L_0, B_0]\tau_A[L_0, B_0] \sim \varepsilon_\eta[L_0, B_0]/\varepsilon_{de}[L_0, B_0]$, which corresponds to the non-negligibility

of the $m_e/(ne^2)\partial_t\mathbf{J}$ term with respect to the $\eta\mathbf{J}$ term at r.h.s. of Ohm's law, one finds that collisionless physics dominates the secondary mode when

$$\tilde{\gamma}[L_0, B_0]\tau_A[L_0, B_0] \gtrsim \frac{\varepsilon_\eta[L_0, B_0]}{\varepsilon_m[L_0, B_0]} = \frac{S_{L_0}^{-1}}{(d_e/L_0)^2}. \quad (14)$$

For a primary resistive large- Δ' mode in the reduced MHD framework in which Hall effects in Ohm's law are neglected, this transition occurs at $\varepsilon_\eta[L_0, B_0] \sim (\varepsilon_m[L_0, B_0])^{12/5}$, whereas secondary Alfvénic reconnection rates, yet not — by properly speaking — in the *ideal tearing* regime, can be attained when $\varepsilon_\eta[L_0, B_0] \sim (\varepsilon_m[L_0, B_0])^3$ (see Ref. [3]).

In order to study the nonlinear behavior of reconnection starting from a quasi-equilibrium state, it was chosen in reference [1] to simulate current sheet collapse via a series of equilibria evolving on a time-scale such that $\tau_A[L]/\tau_{cs}[L] \gtrsim 1$, in order to reduce the length of the simulations while correctly capturing the onset of fast tearing. The authors of Reference [1] showed that reconnecting instabilities satisfying the *ideal tearing* threshold condition develop on quasi-singular current sheets (for $B_{cs} = B_0$ and $L_0 = L$, Eq. (11) implies $J_{cs}/J_0 \sim L/a \gg 1$). It thus demonstrated that a fractal-like cascade of *ideal tearing* modes develops from the recurrent X -point collapse of recurrent thinning sheets developing from the initial *ideal tearing*. As a result, the current sheet completely disrupted immediately after reaching the *ideal* threshold and could not thin much further.

We conclude by noting that later attempts to follow the linear growth of modes from an arbitrarily perturbed evolving equilibrium in a semi-analytic fashion [16] lead to a logarithmic correction in critical aspect ratios; computed by assuming a contemporary thinning of the equilibrium and growth of perturbations up until island widths and current sheet singular layer thicknesses are comparable, the results seem questionable for a number of reasons: first, the final result explicitly depends on the initial perturbation amplitude, which is forced to vanish in the limit of large Lundquist numbers by an inequality used to derive the result itself; second, the evolution was calculated as though any initial perturbation could be expanded in terms of purely growing modes, i.e., neglecting any transients, though growing transients have been shown to enhance the instability properties of thin sheets [17]. In summary, our opinion is that such attempts at a so-called “general” theory of the plasmoid instability are neither general nor correct. This point, as well as inclusion of further non-ideal effects in Ohm's law and a more accurate account of the role of flows deserve further dedicated studies and will be addressed in forthcoming articles.

References

1. A. TENERANI *et al.*, *Astrophys. J. Lett.*, **813**, L32 (2015); A. TENERANI *et al.*, *J. Plasma Phys.*, **82**, 53582051 (2016).
2. D. DEL SARTO *et al.*, *J. Geophys. Res. Space*, **121**, 1857–1873 (2016).
3. D. DEL SARTO & M. OTTAVIANI, *Phys. Plasmas*, **24**, 012102 (2017).
4. F. PUCCI & M. VELLI, *Astrophys. J. Lett.*, **780**, L19 (2014).
5. A. TENERANI *et al.*, *Astrophys. J.*, **801**, 145–151 (2015).
6. H. FURTH, J. KILLEEN & M. N. ROSENBLUTH, *Phys. Fluids*, **6**, 459–484 (1963).
7. W. M. ELSASSER, *Rev. Mod. Phys.*, **22**, 1–35 (1950); C. TRUESDELL, *Phys. Rev.*, **78**, 823 (1950).
8. B. COPPI *et al.*, *Fiz. Plazmy*, **2**, 961 (1976).
9. M. VELLI & A. W. HOOD, *Solar Phys.*, **119**, 107 (1989).
10. F. PUCCI *et al.*, *Phys. Plasmas*, **25**, 032113 (2018).
11. P. A. CASSAK & J. F. DRAKE, *Astrophys. J.*, **707**, L158 (2009).
12. T. TAJIMA & K. SHIBATA, *Plasma Astrophysics*, Addison Wesley (1997); N. F. LOUREIRO, A. A. SCHECK-UCHIHIN & S. C. COWLEY, *Phys. Plasmas*, **14**, 100703 (2007).
13. D. DEL SARTO, F. CALIFANO & F. PEGORARO, *Phys. Rev. Lett.*, **91**, 235001 (2003); D. DEL SARTO & E. DERIAZ, *J. Comp. Phys.*, **351**, 511–533 (2017).
14. S. I. SYROVATSKII, *Rev. Astron. Astrophys.*, **19**, 163–229 (1981).
15. F. L. WAELEBROECK, *Phys. Fluids B*, **1**, 2372–2380 (1989); M. OTTAVIANI & F. PORCELLI, *Phys. Rev. Lett.*, **71**, 3802–3805 (1993).
16. L. COMISSO *et al.*, *Phys. Plasmas*, **23**, 100702 (2016).
17. D. MAC TAGGART & P. STEWART, *Solar Phys.*, **292**, 148–167 (2017).

Bifurcation dans la configuration électronique d'un atome soumis à un champ laser de forte intensité

Jonathan Dubois¹, Simon Abraham Berman^{1,2}, Christel Chandre¹ & Turgay Uzer²

¹ Aix Marseille Univ, CNRS, Centrale Marseille, I2M, Marseille, France

² School of Physics, Georgia Institute of Technology, Atlanta, Georgia 30332-0430, USA

jonathan.dubois@univ-amu.fr

Résumé. On considère un atome soumis à un champ laser de forte intensité polarisé elliptiquement. Les moments des électrons ionisés sont analysés en terme de distributions, appelées *Photoelectrons Momentum Distributions* (PMDs). La forme des PMDs dépend fortement des paramètres du laser, en particulier de l'ellipticité de celui-ci. On présente une analyse des distributions statistiques du modèle hamiltonien calculées à l'aide de méthodes de Monte Carlo. On observe une bifurcation associée aux moments des électrons en fonction de l'ellipticité, en accord avec les mesures expérimentales.

Abstract. We consider an atom driven by a strong laser field elliptically polarized. Ionized electron momenta are analyzed in terms of distributions, namely Photoelectrons Momentum Distributions (PMDs). The shape of the PMDs strongly depends on the laser parameters. We present an analysis of the ionized electron momentum distributions computed from Monte Carlo methods. We observe a bifurcation associated with the electron momenta as a function of the ellipticity, in agreement with experiments.

1 Introduction

On considère un atome soumis à un champ laser intense, d'intensité I . Si I est trop faible, la force du champ laser n'est pas assez forte pour entrer en compétition avec la force de Coulomb, c'est-à-dire qu'il n'y a pas d'ionisation. Si I est trop fort, l'ionisation est directe, c'est-à-dire que le champ laser est si fort que l'électron est éjecté de l'ion parent et sa dynamique est décrite comme s'il n'y avait pas d'effet de Coulomb : c'est l'approximation en champ fort (*Strong Field Approximation* (SFA)). Pour des intensités intermédiaires, la dynamique devient riche, typiquement pour $I \in [10^{13}, 10^{16}] \text{ W} \cdot \text{cm}^{-2}$, là où la force du champ laser et la force de Coulomb sont en compétition. Pour ces valeurs d'intensité, l'électron ionisé peut retourner sur l'ion parent, c'est ce qu'on appelle une recollision.

La recollision [1] est un processus clé en physique attoseconde. Le scénario semi-classique de la recollision est défini par trois étapes : (i) l'électron dépasse la barrière de potentiel de l'atome par effet tunnel, évincée par le champ électrique ; (ii) il se meut librement dans le champ électrique, puis retourne sur l'atome ; (iii) il est diffusé par l'atome, de façon élastique ou inélastique, ou recombine avec la partie toujours bornée de son propre paquet d'onde. Dans le cas de la diffusion élastique, l'électron gagne de l'énergie due aux fortes non-linéarités de l'interaction Coulomb-laser avant d'ioniser : c'est le phénomène d'ionisation au-dessus du seuil (*Above-Threshold Ionization* (ATI)). Dans le cas de la diffusion inélastique, l'électron échange de l'énergie avec un ou plusieurs électrons de l'ion parent, qui provoque une ionisation multiple : c'est le phénomène d'ionisation multiple non-séquentielle (*Non-Sequential Multiple Ionization* (NSMI)). Dans le cas où le paquet d'onde conduit par l'électron dans le continuum recombine avec le paquet d'onde qui est resté borné proche du noyau, les interférences de ces paquets d'onde produisent une radiation électromagnétique de haute fréquence : c'est la génération de hautes harmoniques (*High Harmonic Generation* (HHG)). Les électrons qui recollisionnent sont appelés les *électrons diffusés*, tandis que ceux qui ne recollisionnent pas sont appelés les *électrons directs*.

Dans les expériences, les moments des électrons ionisés sont mesurés, puis analysés au travers de distributions en moment, appelées *Photoelectron Momentum Distributions* (PMDs). À partir de ces distributions, il est possible de déterminer la structure des atomes ou des molécules [2]. Aussi, on peut

analyser leurs distributions angulaire ou leurs distributions en énergie, appelées *Photoelectron Angular Distributions* (PADs) ou *ATI spectrum*. Les électrons directs et les électrons diffusés contribuent tous deux à ces distributions. La forme des distributions en moment des électrons ionisés varie fortement en fonction des paramètres du laser comme l'intensité, la fréquence ou l'ellipticité. Notre objectif est de comprendre la forme des distributions et comment elles varient.

Dans un premier temps, nous présentons un modèle hamiltonien que nous étudions. Dans un second temps, nous présentons la technique utilisée pour calculer les distributions des moments des électrons ionisés puis nous analysons les distributions obtenues.

2 Modèle hamiltonien en approximation dipolaire

Nous utilisons un modèle hamiltonien afin de déterminer la dynamique de l'électron en interaction avec l'ion et le champ laser de forte intensité. Le potentiel scalaire et le potentiel vecteur du champ électrique sont respectivement notés $\varphi(\mathbf{r}, t)$ et $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ et dépendent des coordonnées spatiales \mathbf{r} et temporelle t . L'échelle de distance caractéristique d'un électron dans un champ électrique est E_0/ω^2 , où E_0 et ω sont respectivement l'amplitude et la fréquence du champ électrique. Nous supposons que l'échelle caractéristique de distance de l'électron est petite comparée à la longueur d'onde du champ, c'est-à-dire que $E_0/\omega^2 \ll 2\pi c/\omega$, ce qui nous permet d'utiliser l'approximation dipolaire $\phi(\mathbf{r}, t) = \phi(t)$ et $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}(t)$: les effets magnétiques sont alors négligés. Dans cette approximation, le champ électrique est $\mathbf{E}(t) = -\partial\mathbf{A}(t)/\partial t$, et le hamiltonien du système s'écrit comme

$$H(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \frac{|\mathbf{p}|^2}{2} + V(\mathbf{r}) + \mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(t). \quad (1)$$

Les unités atomiques (u.a.) sont utilisées tout au long du manuscrit. La position de l'électron est \mathbf{r} et son moment canoniquement conjugué est \mathbf{p} . Le potentiel que nous utilisons est le potentiel de Coulomb régularisé [3], soit $V(\mathbf{r}) = -(|\mathbf{r}|^2 + 1)^{-1/2}$. Le champ électrique que nous utilisons est polarisé elliptiquement et s'écrit

$$\mathbf{E}(t) = \frac{f(t) E_0}{\sqrt{\xi^2 + 1}} [\hat{\mathbf{x}} \cos(\omega t + \phi) + \hat{\mathbf{y}} \xi \sin(\omega t + \phi)].$$

Les paramètres ξ et ϕ sont respectivement l'ellipticité du champ et sa phase. La période du champ est donnée par $T = 2\pi/\omega$. Les axes $\hat{\mathbf{x}}$ et $\hat{\mathbf{y}}$ sont respectivement appelés les axes de polarisation majeur et mineur. Les composantes du champ électrique sont montrées sur la figure 1. L'enveloppe du champ $f(t)$ est de la forme : *ramp-up* de durée $2T$, plateau de durée $4T$, *ramp-down* de durée $2T$. L'amplitude du champ électrique est reliée à son intensité par

$$E_0 \text{ (u.a.)} = 5,338 \times 10^{-9} \sqrt{I \text{ [en W} \cdot \text{cm}^{-2}]}$$

Tout au long de ce manuscrit, nous utilisons un champ électrique d'une intensité $I = 3 \times 10^{14} \text{ W} \cdot \text{cm}^{-2}$ et de longueur d'onde $\lambda = 780 \text{ nm}$, où $\lambda = 2\pi c/\omega$. Pour une intensité $I = 3 \times 10^{14} \text{ W} \cdot \text{cm}^{-2}$, on a $E_0 = 9,925 \times 10^{-2} \text{ u.a.}$ Lorsque l'électron est hors du noyau, sa distance caractéristique est alors de $E_0/\omega^2 \approx 25 \text{ u.a.}$ qui est très petit devant la longueur d'onde $\lambda \approx 1,5 \times 10^4 \text{ u.a.}$ L'énergie de l'atome est elle de l'ordre de l'énergie de l'état fondamental $\mathcal{E}_g \sim 1 \text{ u.a.}$ Le caractère compétitif entre la force de Coulomb et la force du champ laser permet de localiser l'électron : si l'électron est à l'intérieur de l'atome, alors la force de Coulomb prédomine, cependant si l'électron est en-dehors de l'atome, alors c'est la force du champ laser qui prédomine.

3 Distributions des moment des électrons ionisés

Dans cette section, nous présentons en premier lieu, la méthode de marche aléatoire de Metropolis qui nous a permis de calculer les distributions en moment du hamiltonien (1). Enfin, nous analysons ces distributions.

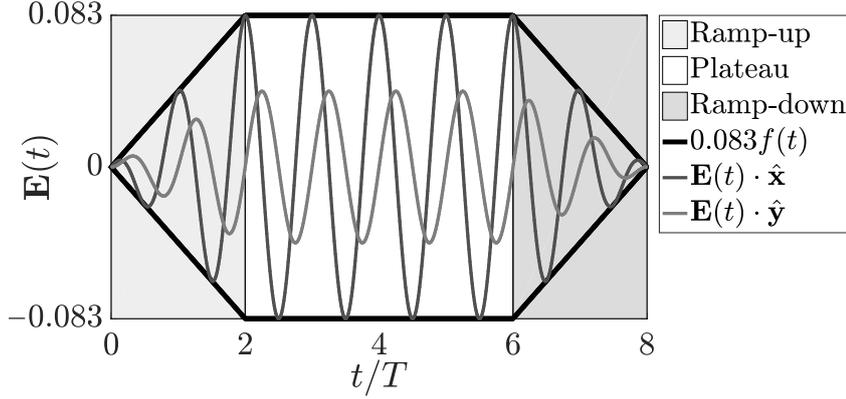


FIGURE 1. Champ électrique $\mathbf{E}(t)$ en fonction du temps par cycle laser, pour une intensité $I = 3 \times 10^{14} \text{ W} \cdot \text{cm}^{-2}$ et une ellipticité $\xi = 0,5$. On a donc $E_0 (\xi^2 + 1)^{-1/2} \approx 0,083$. Les courbes en gris foncé et en gris clair sont respectivement le champ électrique selon l'axe majeur de polarisation $\hat{\mathbf{x}}$ et selon l'axe mineur de polarisation $\hat{\mathbf{y}}$. La courbe noire est $f(t) E_0 (\xi^2 + 1)^{-1/2}$, proportionnelle à l'enveloppe du champ. Les zones en gris clair, en blanc et en gris foncé sont respectivement le *ramp-up*, le plateau et le *ramp-down* du champ.

3.1 Détermination des conditions initiales des électrons

Dans la théorie de la recollision, l'électron ionise par effet tunnel. L'idée est que la fonction d'onde de l'atome isolé est faiblement perturbée par le champ électrique près du noyau, ce dernier de l'ordre de E_0 . De plus, on suppose que la fréquence du champ laser est forte comparée à la fréquence d'ionisation par effet tunnel, on peut alors utiliser une approximation quasi-statique du potentiel effectif pour calculer le taux d'ionisation. Le taux d'ionisation de l'électron est déterminé par la formule de Ammosov–Delone–Krainov (ADK) [5] que l'on note $W(t_0, v_\perp)$, où t_0 et v_\perp sont respectivement le temps d'ionisation et la vitesse transverse initiale de l'électron. Le taux d'ionisation avec les conditions initiales (t_0, v_\perp) est donné par

$$W(t_0, v_\perp) \propto \left[\frac{(2I_p)^2}{|\mathbf{E}(t_0)|} \right]^{\sqrt{2/I_p}} \exp \left[-\frac{(2I_p)^{3/2}}{|\mathbf{E}(t_0)|} \left(\frac{2}{3} + \frac{v_\perp^2}{2I_p} \right) \right]. \quad (2)$$

On suppose qu'après ionisation par effet tunnel, l'électron est sur la barrière de potentiel et dans la direction du champ électrique, comme l'indique la figure 2. Sa vitesse initiale est nulle dans la direction du champ électrique. Par conséquent, les conditions initiales de l'électron sont entièrement déterminées par t_0 et v_\perp , et s'écrivent

$$\mathbf{r}_0 = -\frac{I_p \mathbf{E}(t_0)}{2|\mathbf{E}(t_0)|^2} \left[1 + \left(1 - \frac{4|\mathbf{E}(t_0)|}{I_p^2} \right)^{1/2} \right],$$

$$\mathbf{p}_0 = v_\perp \hat{\mathbf{n}}.$$

Le vecteur $\hat{\mathbf{n}}$ est unitaire et transverse au champ électrique, c'est-à-dire $\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{E}(t_0) = 0$. Après l'ionisation par effet tunnel, l'électron est dans le continuum et sa dynamique peut être décrite classiquement en intégrant les équations du mouvement du hamiltonien (1). Pour calculer la distribution en moment $f(\mathbf{P})$ des électrons ionisés, il suffit d'intégrer chaque trajectoire classiquement et de la pondérer par le poids $W(t_0, v_\perp)$ qui lui est associé, soit

$$f(\mathbf{P}) = \int_0^{T_f} dt_0 \int_{-\infty}^{\infty} dv_\perp W(t_0, v_\perp) \delta[\mathbf{P} - \mathbf{p}(t_0, v_\perp; t \rightarrow \infty)].$$

Ici, $T_f = 8T$, c'est le dernier instant tel que l'enveloppe du champ est non nulle et δ est la distribution de Dirac. L'observable \mathbf{P} correspond au moment des électrons ionisés, c'est-à-dire le moment des électrons lorsqu'ils ont atteint le détecteur.

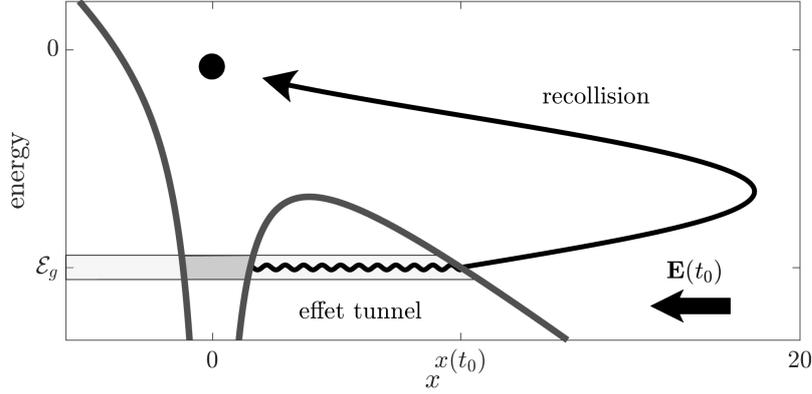


FIGURE 2. Schéma 1D du scénario semi-classique de la recollision pour $I = 3 \times 10^{14} \text{ W} \cdot \text{cm}^{-2}$. La courbe en gris foncé représente le potentiel effectif du système pour $\omega t + \phi = \pi$, quand le champ est maximal selon l'axe majeur de polarisation. La zone grise représente l'« énergie » et la « position » du paquet d'onde dans son état initial. Les zones en gris clair représentent les zones où le paquet d'onde peut potentiellement se diffuser par effet tunnel. La courbe noire est la trajectoire de l'électron dans le modèle semi-classique : (i) ionisation par effet tunnel, (ii) la trajectoire de l'électron est initialisée sur la barrière de potentiel et sa dynamique est décrite par SFA.

Les méthodes de Monte Carlo consistent à calculer f en générant aléatoirement des valeurs de variables distribuées selon la loi de distribution W puis de calculer

$$f(\mathbf{P}) \approx \frac{1}{N} \sum_{\{(t_0^{(i)}, v_{\perp}^{(i)}) \sim W\}_{i=1}^N} \delta \left[\mathbf{P} - \mathbf{p} \left(t_0^{(i)}, v_{\perp}^{(i)} ; t \rightarrow \infty \right) \right].$$

La loi de distribution W n'étant pas de forme simple, nous utilisons la *méthode de rejet* — plus communément appelée la marche aléatoire de Metropolis [6] — afin de générer aléatoirement des variables $t_0^{(i)}$ et $v_{\perp}^{(i)}$ distribuées selon la loi de probabilité W . Les étapes de l'algorithme sont schématisées sur la figure 3.

Nous considérons un point initial $(t_0^{(0)}, v_{\perp}^{(0)})$ généré de manière uniforme dans l'espace des configurations possibles. À chaque itération, un point test $(t_0^{(t)}, v_{\perp}^{(t)})$ est généré uniformément de façon aléatoire dans le disque de rayon η centré au point précédent $(t_0^{(i)}, v_{\perp}^{(i)})$. Pour cela, deux variables μ_1 et μ_2 sont générées aléatoirement et uniformément dans l'intervalle $[0, 1]$, c'est-à-dire $(\mu_1, \mu_2) \sim \mathcal{U}(0, 1)$, et la valeur associée au point test est $(t_0^{(t)}, v_{\perp}^{(t)}) = (t_0^{(i)}, v_{\perp}^{(i)}) + \eta \sqrt{\mu_1} (\cos(2\pi\mu_2), \sin(2\pi\mu_2))$. À ce stade, une troisième variable μ_3 est générée uniformément dans l'intervalle $[0, 1]$, c'est-à-dire $\mu_3 \sim \mathcal{U}(0, 1)$.

- Si $\mu_3 < W(t_0^{(t)}, v_{\perp}^{(t)})/W(t_0^{(i)}, v_{\perp}^{(i)})$, alors le point test est accepté $(t_0^{(i+1)}, v_{\perp}^{(i+1)}) = (t_0^{(t)}, v_{\perp}^{(t)})$.
- Si $\mu_3 > W(t_0^{(t)}, v_{\perp}^{(t)})/W(t_0^{(i)}, v_{\perp}^{(i)})$, alors le point test est refusé $(t_0^{(i+1)}, v_{\perp}^{(i+1)}) = (t_0^{(i)}, v_{\perp}^{(i)})$.

L'étape de refus du point test est importante afin de satisfaire l'équation maîtresse des chaînes de Markov et ainsi d'assurer que la distribution des valeurs suit la loi de probabilité donnée par l'équation (2).

En d'autres termes, cette méthode est une marche aléatoire biaisée, qui permet de sonder les conditions initiales qui ont le plus de poids. Ainsi, on s'assure que les trajectoires calculées à partir des conditions initiales échantillonnées ont toutes une contribution significative dans la distribution finale.

3.2 Bifurcation des PMDs

Sur le panneau du bas de la figure 4, nous montrons la distribution en moment selon l'axe mineur de polarisation P_y du modèle calculé en utilisant les méthodes de Monte Carlo. À faible ellipticité, pour $\xi = 0,1$, on observe que la distribution est centrée en $P_y = 0$. Ce phénomène est appelé la focalisation de

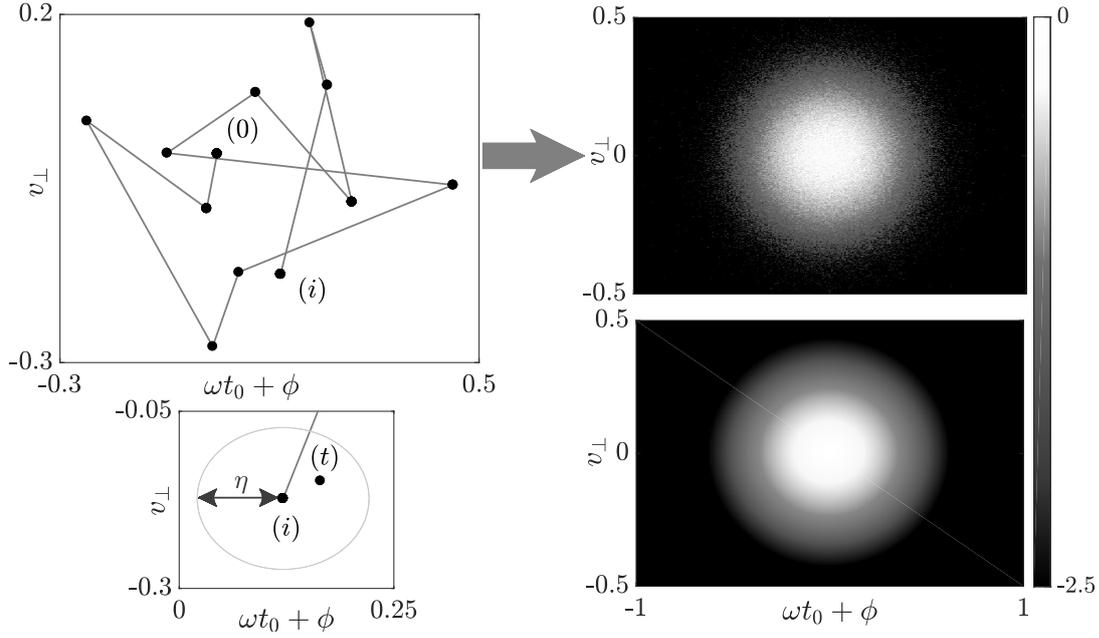


FIGURE 3. Schéma de l’algorithme de marche aléatoire de Metropolis pour $I = 3 \times 10^{14} \text{ W} \cdot \text{cm}^{-2}$ et $\xi = 0,5$. En haut à gauche : Une chaîne de Markov selon la méthode de rejet pour 50 itérations. En bas à gauche : Schéma de la détermination du point test (t) à partir du point (i). En haut à droite : La distribution des conditions initiales obtenue en utilisant l’algorithme de marche aléatoire de Metropolis pour 4×10^6 trajectoires. En bas à droite : Distribution calculée en utilisant l’équation (2). Le maximum des distributions est arbitrairement fixé. Les distributions sont représentées en échelle logarithmique.

Coulomb (*Coulomb focusing*). C’est-à-dire qu’une forte proportion d’électrons ionisée est ramenée vers le noyau. À forte ellipticité, pour $\xi = 0,4$, nous observons que les électrons ionisés sont décentrés de l’origine, et le *Coulomb focusing* semble s’être estompé. De plus, nous observons que la distribution est décentrée de $P_x = 0$, c’est ce qu’on appelle l’asymétrie de Coulomb (*Coulomb asymmetry*). Après ionisation, les électrons sont toujours sujets à l’attraction de Coulomb. Cette interaction dévie leur trajectoire après ionisation. Dans les distributions en moments, nous observons donc ce décalage de $P_x < 0$. Pour des ellipticités intermédiaires, on observe un *cross-over* entre les formes observées à faible, et à forte ellipticité.

Sur les panneaux du haut de la figure 4, nous montrons la distribution en moment selon l’axe mineur de polarisation P_y . À faible ellipticité, on observe que la distribution est centrée autour de $P_y = 0$. Cette contribution est due aux électrons diffusés par le noyau. Lorsque l’ellipticité augmente, on observe que la proportion d’électrons diffusés diminue. Pour $\xi \approx 0,15$, on observe une bifurcation. Après la bifurcation, la proportion d’électrons directs est très forte comparée à la proportion d’électrons diffusés. Cette bifurcation est un indicateur de la réduction du nombre d’électrons diffusés. Ces résultats sont en accord avec les résultats expérimentaux [7, 8].

Remerciements

The project leading to this research has received funding from the European Union’s Horizon 2020 research and innovation program under the Marie Skłodowska–Curie grant agreement No 734557.

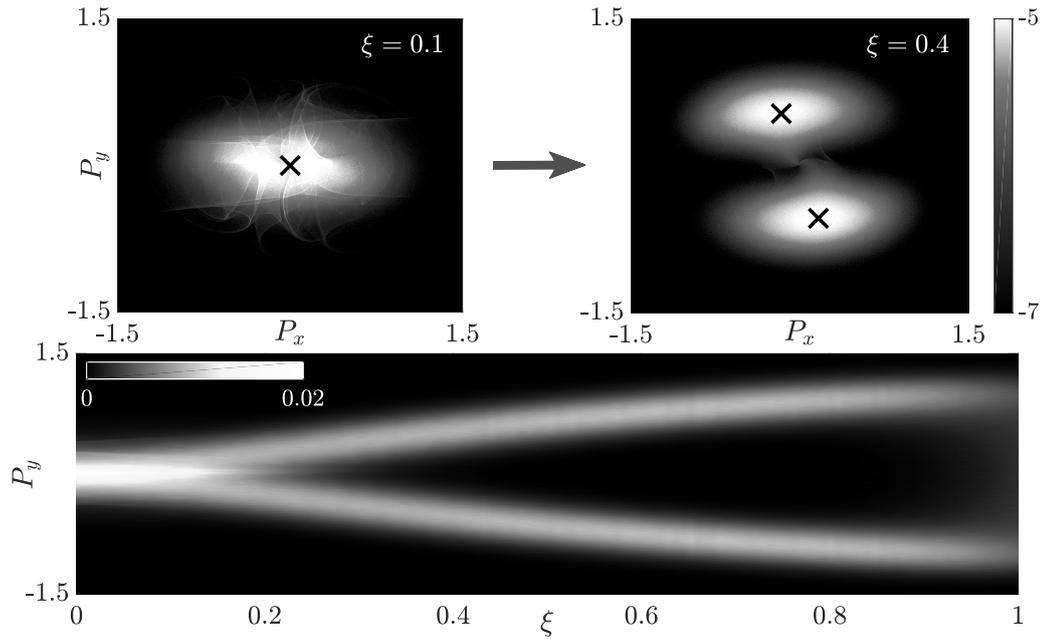


FIGURE 4. Distribution des moments en fonction de l'ellipticité ξ , pour un atome d'hélium He. L'intensité et la fréquence du laser sont respectivement $I = 3 \times 10^{14} \text{ W} \cdot \text{cm}^{-2}$ et $\omega = 0,0584 \text{ u.a.}$. En haut : Distribution des moments des électrons ionisés dans le plan (p_x, p_y) en échelle logarithmique, pour $\xi = 0,1$ (à gauche) et $\xi = 0,4$ (à droite). Les croix blanches montrent le pic de la distribution. En bas : Distribution des moments selon l'axe mineur de polarisation en fonction de l'ellipticité ξ en échelle linéaire.

Références

1. P. B. CORKUM, Plasma perspective on strong-field multiphoton ionization, *Phys. Rev. Lett.*, **71**, 1994 (1993).
2. M. MECKEL *et al.*, Laser-induced electron tunneling and diffraction, *Science*, **320**, 1478 (2008).
3. J. JAVANAINEN *et al.*, Numerical simulations of multiphoton ionization and above-threshold electron spectra, *Phys. Rev. A*, **38**, 3430 (1988).
4. J. R. CARY *et al.*, Noncanonical Hamiltonian mechanics and its application to magnetic field line flow, *Ann. Phys.*, **151**, 1 (1983).
5. M. V. AMMOV *et al.*, Tunnel ionization of complex atoms and of atomic ions in an alternating electromagnetic field, *Sov. Phys. JETP*, **64**, 6 (1986).
6. N. METROPOLIS *et al.*, Equation of state calculations by fast computing machines, *J. Chem. Phys.*, **21**, 1087 (1953).
7. A. S. LANDSMAN *et al.*, Unified approach to probing Coulomb effects in tunnel ionization for any ellipticity of Laser light, *Phys. Rev. Lett.*, **101**, 263001 (2013).
8. M. LI *et al.*, Experimental verification of the nonadiabatic effect in strong-field ionization with elliptical polarization, *Phys. Rev. A*, **95**, 053425 (2017).

Des trois actions de la mécanique classique à la fonction d'onde en mécanique quantique

Michel Gondran¹, Alexandre Gondran² & Abdel Kenoufi³

¹ Académie Européenne Interdisciplinaire des Sciences, 75 005 Paris

² École Nationale de l'Aviation Civile, 31000 Toulouse

³ Scientific COnsulting for Research & Engineering (SCORE), Strasbourg

michel.gondran@polytechnique.org

Résumé. Nous montrons d'abord qu'il existe en mécanique classique trois actions différentes pour déterminer le chemin suivi par une particule. Ces trois actions correspondent à des conditions initiales différentes : deux actions bien connues, l'action classique d'Euler–Lagrange $S_{cl}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0)$, l'action de Hamilton–Jacobi $S(\mathbf{x}, t)$ ayant comme action initiale $S_0(\mathbf{x})$ et une nouvelle action, l'action singulière $S(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0)$. Ces trois actions vérifient l'équation de Hamilton–Jacobi mais avec des conditions initiales différentes.

L'interprétation de ces actions permet de donner une réponse à deux grands problèmes de mécanique classique, la compréhension du principe de moindre action et le paradoxe de Gibbs et de proposer une piste pour l'interprétation de la mécanique quantique.

Abstract. We first show that in classical mechanics there are three different actions to determine the path followed by a particle. These three actions correspond to different initial conditions: two well-known actions, the classic action of Euler–Lagrange $S_{cl}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0)$, action of Hamilton–Jacobi $S(\mathbf{x}, t)$ having as initial action $S_0(\mathbf{x})$, and a new action, the singular action $S(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0)$. These three actions verify the Hamilton–Jacobi equation, but with different initial conditions.

The interpretation of these actions makes it possible to give an answer to two major problems of classical mechanics, the understanding of the principle of least action and the Gibbs paradox, and to propose a track for the interpretation of quantum mechanics.

1 Introduction

Le débat si intense qui a lieu depuis plus de 80 ans sur l'interprétation de la fonction d'onde de la mécanique quantique a laissé dans l'ombre le débat sur l'interprétation de l'action et du principe de moindre action en mécanique classique. Ce *principe de moindre action* qui permet de déterminer les équations du mouvement des particules si l'on minimise sur les trajectoires embarrasse un grand nombre de scientifiques comme le rappelle Henri Poincaré, pourtant l'un de ses grands utilisateurs [1] : « Il est clair qu'il vaudrait mieux le remplacer par un énoncé moins choquant, et où, comme diraient les philosophes, les causes finales ne sembleraient pas se substituer aux causes efficientes ».

Nous allons voir que les difficultés d'interprétation de l'action proviennent du fait qu'il existe en réalité trois actions correspondant à des conditions aux limites différentes : l'action classique (ou d'Euler–Lagrange) $S_{cl}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0)$, l'action de Hamilton–Jacobi $S(\mathbf{x}, t)$ avec son action initiale $S_0(\mathbf{x})$, et une nouvelle action que nous avons introduite, l'action singulière $S(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0)$. Ces trois actions vérifient l'équation de Hamilton–Jacobi avec des conditions initiales différentes et auront donc des interprétations différentes. Elles vont nous permettre de répondre à l'embarras de Poincaré sur le principe de moindre action et d'expliquer le paradoxe de Gibbs sur la discernabilité des particules identiques.

Dans la section 2, nous étudions la différence entre l'action de Hamilton–Jacobi et l'action d'Euler–Lagrange. Mathématiquement, elles sont reliées par l'intégrale de chemins Minplus (équation (8)) qui correspond à une intégrale dans l'analyse Minplus, analyse qui permet d'étudier l'équation de Hamilton–Jacobi par des approches linéaires, cf. Maslov [2] et Gondran [3]. Le principe est de remplacer le produit scalaire habituel $\int_X f(x)g(x) dx$ par le produit scalaire Minplus : $(f, g) = \inf_{x \in X} \{f(x) + g(x)\}$. Dans cette

analyse Minplus l'analogue de la distribution de Dirac $\delta(\mathbf{x})$ est la distribution non linéaire $\delta_{\min+}(\mathbf{x}) = \{0 \text{ si } \mathbf{x} = \mathbf{0}, +\infty \text{ sinon}\}$.

Physiquement, on montre que l'on peut considérer l'action d'Euler–Lagrange comme une action épistémique et l'action de Hamilton–Jacobi comme une action ontologique.

Dans la section 3, nous verrons comment la différence entre l'action de Hamilton–Jacobi et l'action singulière permet de résoudre le paradoxe de Gibbs en remettant en cause le postulat habituel sur la discernabilité des particules classiques comme de très nombreux auteurs l'ont demandé : les particules indiscernées vérifient les équations de Hamilton–Jacobi statistiques et les particules discernées vérifient les équations singulières de Hamilton–Jacobi.

Enfin dans la section 4, nous montrons qu'il existe deux types de limite de l'équation de Schrödinger, quand on fait tendre la constante de Planck vers zéro.

2 Les actions d'Euler–Lagrange et de Hamilton–Jacobi

Considérons l'évolution d'un système évoluant de la position $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$ à l'instant initial vers la position $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ à l'instant t et soit $\mathbf{u}(s)$ sa vitesse pour $s \in [0, t]$. Si $L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)$ est le lagrangien du système, l'action d'Euler–Lagrange $S_{cl}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0)$ est la fonction définie par :

$$S_{cl}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0) = \min_{\mathbf{u}(s), 0 \leq s \leq t} \left\{ \int_0^t L[\mathbf{x}(s), \mathbf{u}(s), s] ds \right\} \quad (1)$$

où le minimum est pris sur les vitesses $\mathbf{u}(s)$, $s \in [0, t]$. La solution $(\tilde{\mathbf{u}}(s), \tilde{\mathbf{x}}(s))$ de (1) vérifie l'équation d'Euler–Lagrange :

$$\frac{d}{ds} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}}[\mathbf{x}(s), \dot{\mathbf{x}}(s), s] - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}}[\mathbf{x}(s), \dot{\mathbf{x}}(s), s] = 0 \quad \text{pour } s \in [0, t] \quad (2)$$

avec les conditions aux limites :

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \text{ et } \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}. \quad (3)$$

Pour une particule non relativiste avec le lagrangien $L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}^2 + \mathbf{K} \cdot \mathbf{x}$, l'équation (2) donne $\frac{d}{ds}(m\dot{\mathbf{x}}(s)) - \mathbf{K} = 0$. Nous obtenons successivement $\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(s) = \mathbf{v}_0 + \frac{\mathbf{K}}{m}s$, $\tilde{\mathbf{x}}(s) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{v}_0 s + \frac{\mathbf{K}}{2m}s^2$. La vitesse initiale \mathbf{v}_0 est obtenue en faisant $\tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}$ dans la dernière équation, soit $\tilde{\mathbf{v}}_0 = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{t} - \frac{\mathbf{K}t}{2m}$. La définition de l'équation (1) semble montrer que, parmi les trajectoires qui arrivent à (\mathbf{x}, t) à partir de la position initiale \mathbf{x}_0 , le principe de moindre action permet de choisir la vitesse à chaque instant. En réalité, le principe de moindre action utilisé dans l'équation (1) ne choisit pas la vitesse à chaque instant s entre 0 et t , mais seulement quand la particule arrive en \mathbf{x} à l'instant t . La connaissance de la vitesse requiert la résolution des équations d'Euler–Lagrange (2) et (3) sur la trajectoire entière. Ainsi dans l'exemple précédent, la connaissance de la vitesse initiale $\tilde{\mathbf{v}}_0 = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{t} - \frac{\mathbf{K}t}{2m}$ dépend de la position finale \mathbf{x} et de l'instant final t . Cette dépendance des « causes finales » est générale. C'est la critique de Poincaré sur le principe de moindre action. Nous devons donc conclure que, sans connaissance de la vitesse initiale, l'action d'Euler–Lagrange répond à un problème posé par un observateur : « Quelle doit être la vitesse de la particule à l'instant initial pour atteindre \mathbf{x} au temps t ? » La résolution de ce problème implique que l'observateur résolve l'équation d'Euler–Lagrange (2) *après* l'observation de \mathbf{x} au temps t . C'est un point de vue *a posteriori*.

L'action de Hamilton–Jacobi résout ce manque de connaissance sur la vitesse initiale. En effet, à l'instant initial, l'action de Hamilton–Jacobi $S_0(\mathbf{x})$ est connue. Elle entraîne la connaissance du champ de vitesses à l'instant initial $\mathbf{v}_0(\mathbf{x}) = \frac{\nabla S_0(\mathbf{x})}{m}$. L'action de Hamilton–Jacobi $S(\mathbf{x}, t)$ est la fonction définie par :

$$S(\mathbf{x}, t) = \min_{\mathbf{x}_0; \mathbf{u}(s), 0 \leq s \leq t} \left\{ S_0(\mathbf{x}_0) + \int_0^t L[\mathbf{x}(s), \mathbf{u}(s), s] ds \right\} \quad (4)$$

où le minimum est pris sur toutes les positions initiales \mathbf{x}_0 et sur les vitesses $\mathbf{u}(s)$, $s \in [0, t]$. Pour une particule non relativiste dans un champ de potentiel $V(\mathbf{x})$, on a le théorème classique [5] :

Théorème 1 *L'action de Hamilton–Jacobi $S(\mathbf{x}, t)$ est solution des équations de Hamilton–Jacobi :*

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}(\nabla S)^2 + V(\mathbf{x}) = 0 \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \quad (5)$$

$$S(\mathbf{x}, 0) = S_0(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \quad (6)$$

et la vitesse d'une particule classique non relativiste est donnée en chaque point (\mathbf{x}, t) par :

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \frac{\nabla S(\mathbf{x}, t)}{m}. \quad (7)$$

Comme le terme $S_0(\mathbf{x}_0)$ n'intervient pas dans (4) pour la minimisation sur $\mathbf{u}(s)$, on en déduit que l'action de Hamilton–Jacobi peut s'écrire à partir de l'action d'Euler–Lagrange par l'intégrale de chemins Minplus :

$$S(\mathbf{x}, t) = \min_{\mathbf{x}_0} \{S_0(\mathbf{x}_0) + S_{cl}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0)\}. \quad (8)$$

Cette équation est une généralisation de la formule de Hopf–Lax [5], $S(\mathbf{x}, t) = \min_{\mathbf{x}_0} \{S_0(\mathbf{x}_0) + m \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^2}{2t}\}$ qui correspond à une particule libre. C'est aussi l'analogue de l'intégrale de chemin de Feynman en mécanique quantique.

L'équation (7) montre que la solution $S(\mathbf{x}, t)$ des équations de Hamilton–Jacobi permet de définir le champ de vitesse en tout point (\mathbf{x}, t) à partir du champ de vitesse $\frac{\nabla S_0(\mathbf{x})}{m}$ à l'instant initial. L'action de Hamilton–Jacobi $S(\mathbf{x}, t)$ est donc un champ qui « pilote » le mouvement de la particule. C'est une dualité action–particule. L'action de Hamilton–Jacobi répond à la question : « Si l'on connaît l'action (ou le champ de vitesse) à l'instant initial, peut-on déterminer l'action (ou le champ de vitesse) à chaque instant ultérieur ? ». C'est un point de vue *a priori*. Il peut être considéré comme le problème résolu par la nature avec le principe de moindre action.

Mathématiquement, on notera que l'action d'Euler–Lagrange, $S_{cl}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0)$, est la solution élémentaire de l'équation de Hamilton–Jacobi (5) et (6) avec comme action initiale la distribution Minplus $S_0(\mathbf{x}) = \delta_{\min} + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \{0 \text{ si } \mathbf{x} = \mathbf{x}_0, +\infty \text{ sinon}\}$.

3 Équations statistiques et singulières de Hamilton–Jacobi

Considérons un faisceau de particules classiques identiques. Pour une particule de ce faisceau, on ne connaît à l'instant initial ni sa position exacte, ni sa vitesse exacte, mais seulement les caractéristiques décrivant le faisceau, c'est-à-dire une densité de probabilité initiale $\rho_0(\mathbf{x})$ et un champ de vitesse initial $\mathbf{v}_0(\mathbf{x})$. On est alors conduit à la définition suivante : *Nous appelons **particules indiscernées** une famille de particules classiques préparées de la même manière dont on ne connaît à l'instant initial que la densité de probabilité initiale $\rho_0(\mathbf{x})$ et l'action initiale $S_0(\mathbf{x})$, c'est-à-dire le champ de vitesse initial $\frac{\nabla S_0(\mathbf{x})}{m}$.* La densité de probabilité $\rho(\mathbf{x}, t)$ et l'action $S(\mathbf{x}, t)$ à l'instant t d'une particule indiscernée est alors donnée par le théorème suivant :

Théorème 2 *La densité $\rho(\mathbf{x}, t)$ et l'action $S(\mathbf{x}, t)$ de particules classiques indiscernées, soumises à un potentiel $V(\mathbf{x})$, vérifient les équations statistiques de Hamilton–Jacobi :*

$$\frac{\partial S(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \frac{1}{2m} [\nabla S(\mathbf{x}, t)]^2 + V(\mathbf{x}) = 0 \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+, \quad (9)$$

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \operatorname{div} \left[\rho(\mathbf{x}, t) \frac{\nabla S(\mathbf{x}, t)}{m} \right] = 0 \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+, \quad (10)$$

$$S(\mathbf{x}, 0) = S_0(\mathbf{x}) \quad \text{et} \quad \rho(\mathbf{x}, 0) = \rho_0(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3. \quad (11)$$

Nous avons appelé ces particules indiscernées, et non indiscernables, car si l'on connaissait leurs positions initiales, on connaîtrait aussi leurs trajectoires. Cependant elles auront dans les dénombrements les mêmes propriétés que l'on accorde habituellement aux particules indiscernables. Le paradoxe de Gibbs n'en est plus un car il s'applique à N particules classiques indiscernées dont les différentes permutations correspondent à une seule configuration, ce qui donne la bonne valeur de l'entropie.

Nous dirons qu'une particule classique est discernée à l'instant initial, si l'on connaît, à cet instant, sa position \mathbf{x}_0 et sa vitesse \mathbf{v}_0 .

Théorème 3 *Si $\xi(t)$ est la trajectoire classique dans le champ $V(\mathbf{x})$ d'une particule de position initiale \mathbf{x}_0 et de vitesse initiale \mathbf{v}_0 , alors il existe une fonction*

$$S(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0) = m \frac{d\xi(t)}{dt} \cdot \mathbf{x} + g(t) \quad (12)$$

où $g(t) = -\int_0^t \frac{1}{2}m \left[\frac{d\xi(s)}{ds} \right]^2 + V[\xi(s)] + m \frac{d^2\xi(s)}{ds^2} \cdot \xi(s) ds$, que nous appellerons l'action singulière, et qui est solution des **équations singulières de Hamilton–Jacobi** :

$$\frac{\partial S(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0)}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}=\xi(t)} + \frac{1}{2m} [\nabla S(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0)]^2 \Big|_{\mathbf{x}=\xi(t)} + V(\mathbf{x}) \Big|_{\mathbf{x}=\xi(t)} = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad (13)$$

$$\frac{d\xi(t)}{dt} = \frac{\nabla S(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0)}{m} \Big|_{\mathbf{x}=\xi(t)} \quad \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad (14)$$

$$S(\mathbf{x}, 0; \mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0) = m\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{x} \quad \text{et} \quad \xi(0) = \mathbf{x}_0. \quad (15)$$

L'action singulière vérifie les équations singulières de Hamilton–Jacobi seulement le long de la trajectoire $\xi(t)$. On peut considérer ces équations singulières de Hamilton–Jacobi comme la recherche du couple (action de Hamilton–Jacobi $S(\mathbf{x}, t)$; densité $\rho(\mathbf{x}, t)$) vérifiant les équations statistiques de Hamilton–Jacobi avec les conditions initiales $S_0(\mathbf{x}) = m\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{x}$ et $\rho_0(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ où $\delta(\mathbf{x})$ est la distribution de Dirac.

4 Les deux convergences de l'équation de Schrödinger

Considérons la fonction d'onde $\Psi(\mathbf{x}, t)$ vérifiant l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + V(\mathbf{x}, t) \Psi \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+, \quad (16)$$

avec comme conditions initiales $\Psi(\mathbf{x}, 0) = \Psi_0(\mathbf{x})$.

Dans le changement de variable $\Psi(\mathbf{x}, t) = \sqrt{\rho^{\hbar}(\mathbf{x}, t)} \exp(i \frac{S^{\hbar}(\mathbf{x}, t)}{\hbar})$, la densité $\rho^{\hbar}(\mathbf{x}, t)$ et l'action $S^{\hbar}(\mathbf{x}, t)$ sont des fonctions qui dépendent a priori de \hbar . L'équation de Schrödinger se décompose en donnant les équations de Madelung (1926) qui correspondent aux deux équations couplées :

$$\frac{\partial S^{\hbar}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \frac{1}{2m} [\nabla S^{\hbar}(\mathbf{x}, t)]^2 + V(\mathbf{x}, t) - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\Delta \sqrt{\rho^{\hbar}(\mathbf{x}, t)}}{\sqrt{\rho^{\hbar}(\mathbf{x}, t)}} = 0 \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+ \quad (17)$$

$$\frac{\partial \rho^{\hbar}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \operatorname{div} \left[\rho^{\hbar}(\mathbf{x}, t) \frac{\nabla S^{\hbar}(\mathbf{x}, t)}{m} \right] = 0 \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+, \quad (18)$$

avec comme conditions initiales :

$$\rho^{\hbar}(\mathbf{x}, 0) = \rho_0^{\hbar}(\mathbf{x}) \quad \text{et} \quad S^{\hbar}(\mathbf{x}, 0) = S_0^{\hbar}(\mathbf{x}). \quad (19)$$

Une particule quantique est dite **statistiquement préparée** si sa densité de probabilité initiale $\rho_0^{\hbar}(\mathbf{x})$ et son action initiale $S_0^{\hbar}(\mathbf{x})$ convergent, quand $\hbar \rightarrow 0$, vers des fonctions régulières $\rho_0(\mathbf{x})$ et $S_0(\mathbf{x})$. Le cas des particules statistiquement préparées correspond par exemple à un ensemble de particules sans interaction entre elles et préparées de la même façon : jets de particules dans une expérience de fentes d'Young ou de Stern et Gerlach.

Théorème 4 *Pour des particules quantiques statistiquement préparées, la densité de probabilité $\rho^{\hbar}(\mathbf{x}, t)$ et l'action $S^{\hbar}(\mathbf{x}, t)$, solutions des équations de Madelung (17)–(19), convergent, quand $\hbar \rightarrow 0$, vers la densité classique $\rho(\mathbf{x}, t)$ et l'action classique $S(\mathbf{x}, t)$, solutions des équations statistiques de Hamilton–Jacobi. [4]*

Notre particule quantique statistiquement préparée, qui vérifiait l'équation de Schrödinger, va, lorsque l'on fait tendre \hbar vers zéro, vérifier les équations statistiques de Hamilton–Jacobi d'un ensemble de particules classiques indiscernées.

Nous dirons qu'une particule quantique est **préparée de manière singulière** si sa densité de probabilité initiale $\rho_0^{\hbar}(\mathbf{x})$ et son action initiale $S_0^{\hbar}(\mathbf{x})$ convergent, quand $\hbar \rightarrow 0$, respectivement vers une distribution de Dirac $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ et une fonction régulière $S_0(\mathbf{x})$. Cette situation correspond en particulier aux états cohérents, introduits en 1926 par Schrödinger [6]. L'étude de la convergence des équations de Madelung pour des particules quantiques préparées de manière singulière est mathématiquement très difficile. Nous étudierons seulement l'exemple d'un état cohérent où un calcul explicite est possible. Pour l'oscillateur harmonique à deux dimensions, $V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}m\omega^2\mathbf{x}^2$, les états cohérents sont construits à partir de la fonction d'onde initiale $\Psi_0(\mathbf{x})$, qui correspond à la densité et à l'action initiale

$$\rho_0^{\hbar}(\mathbf{x}) = (2\pi\sigma_{\hbar}^2)^{-1} \exp\left[-\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^2}{2\sigma_{\hbar}^2}\right] \quad \text{et} \quad S_0^{\hbar}(\mathbf{x}) = m\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{x} \quad (20)$$

avec $\sigma_{\hbar} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}$. Nous vérifions que, quand $\hbar \rightarrow 0$, $\rho_0^{\hbar}(\mathbf{x})$ converge vers la distribution de Dirac $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ et que $S_0(\mathbf{x}) = S_0^{\hbar}(\mathbf{x})$ est une fonction régulière. Avec ces conditions initiales, la densité $\rho^{\hbar}(\mathbf{x}, t)$ et l'action $S^{\hbar}(\mathbf{x}, t)$, solutions des équations de Madelung (17)–(19), sont égales à $\rho^{\hbar}(\mathbf{x}, t) = (2\pi\sigma_{\hbar}^2)^{-1} \exp[-\frac{(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}(t))^2}{2\sigma_{\hbar}^2}]$ et $S^{\hbar}(\mathbf{x}, t) = +m\frac{d\boldsymbol{\xi}(t)}{dt} \cdot \mathbf{x} + g(t) - \hbar\omega t$ où $\boldsymbol{\xi}(t)$ est la trajectoire d'une particule classique soumise dans le potentiel $V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}m\omega^2\mathbf{x}^2$, avec \mathbf{x}_0 and \mathbf{v}_0 comme position et vitesse initiales et $g(t) = \int_0^t [-\frac{1}{2}m(\frac{d\boldsymbol{\xi}(s)}{ds})^2 + \frac{1}{2}m\omega^2\boldsymbol{\xi}(s)^2] ds$.

Théorème 5 *Pour l'oscillateur harmonique avec les conditions initiales (20), quand $\hbar \rightarrow 0$, la densité $\rho^{\hbar}(\mathbf{x}, t)$ et l'action $S^{\hbar}(\mathbf{x}, t)$ convergent vers $\rho(\mathbf{x}, t) = \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}(t))$ et $S(\mathbf{x}, t) = m\frac{d\boldsymbol{\xi}(t)}{dt} \cdot \mathbf{x} + g(t)$ où $S(\mathbf{x}, t)$ et les trajectoires $\boldsymbol{\xi}(t)$ sont solutions des équations singulières de Hamilton–Jacobi. [4]*

5 Conclusion

La distinction en mécanique classique des actions de Hamilton–Jacobi et d'Euler–Lagrange, fondée sur l'intégrale de chemin Minplus, nous a permis de mieux comprendre le principe de moindre action : l'action d'Euler–Lagrange répond à un problème posé par un observateur et serait donc épistémique, l'action de Hamilton–Jacobi correspond à un problème résolu par la nature à partir du principe de moindre action et serait donc ontologique.

De plus, l'introduction en mécanique classique du concept de particules indiscernées vérifiant les équations statistiques de Hamilton–Jacobi permet de donner une réponse simple au paradoxe de Gibbs de la mécanique statistique classique.

Enfin l'étude de la convergence des équations de Madelung quand \hbar tend vers zéro nous conduit à considérer deux préparations des particules quantiques :

1. les particules quantiques statistiquement préparées convergent vers des particules classiques indiscernées et peuvent être considérées comme des particules quantiques indiscernées. Pour elles, l'interprétation de l'onde pilote de de Broglie–Bohm s'impose et tout se passe comme si la phase de la fonction d'onde « pilotait » la particule. ;
2. les particules quantiques préparées de manière singulière convergent vers des particules classiques discernées et peuvent être considérées comme des particules quantiques discernées. Pour elles, l'interprétation la plus naturelle est l'interprétation de Schrödinger où la fonction d'onde représente une particule étendue.

Références

1. H. POINCARÉ, *La Science et l'Hypothèse*, Flammarion (1902).
2. V. P. MASLOV, *Analyse Idempotente*, édition Mir (1989).
3. M. GONDRAN, Analyse MinPlus, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **323**, 371–375 (1996).
4. M. GONDRAN & A. GONDRAN, A synthetic interpretation: The double-preparation theory, *Phys. Scr.*, **163**, 014029 (2014).
5. L. C. EVANS, *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics 19, pp. 123–124, American Mathematical Society (1998).
6. E. SCHRÖDINGER, Der stetige Übergang von der Mikro- zur Makromechanik, *Naturwissenschaften*, **14**, 664–666 (1926).

Émergence d'une nage cohérente induite par des retours sensoriels

Johann Herault¹, Frédéric Boyer¹, Robin Thandiackal², Kamilo Melo² & Auke Ijspeert²

¹ IMT Atlantique, LS2N, UBL, 44307 Nantes, France

² Biorobotics Laboratory EPFL, Lausanne, Switzerland

johann.herault@imt-atlantique.fr

Résumé. Dans cet article, nous étudions la synchronisation d'une chaîne d'oscillateurs présente dans la moelle épinière d'un robot nageur grâce à une loi de rétro-action basée sur un retour sensoriel.

Abstract. In this article, we study the synchronization of an oscillator chain present in the spinal cord of a swimming robot thanks to a feedback law based on sensory feedback.

1 Introduction

L'objectif de cet article est d'introduire le formalisme mathématique nécessaire à la compréhension de l'émergence d'une nage cohérente d'un robot nageur multi-segments, inspiré des poissons anguilliformes. Nous présentons un modèle de robot nageur basé sur des réflexes sensoriels locaux. La locomotion est ici contrôlée au niveau le plus bas [1] : chaque vertèbre est entraînée par un actionneur, qui est lui-même piloté par un réseau locomoteur spinal situé dans cette vertèbre. Le réseau est modélisé par un oscillateur dont la fréquence propre est modulée par un retour sensoriel local. Nous montrerons comment cette chaîne d'oscillateurs se synchronise pour assurer la coordination de l'actionnement de toutes les vertèbres.

Nous présentons successivement le modèle mécanique du nageur dans la section 2 et le modèle du retour sensoriel dans la section 3. Dans la dernière section 4, nous expliquons l'origine de la synchronisation en explicitant les couplages entre les différentes phases des oscillateurs.

2 Modèle mécanique d'un nageur multi-corps

Nous considérons ici un nageur multi-corps [2] évoluant dans un espace 2D cartésien associé à un repère galiléen $\mathcal{R}_s = (0, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$. Le robot est composé de $N + 1$ corps rigides $\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_N$, avec \mathcal{B}_0 la tête du robot et \mathcal{B}_N à la nageoire caudale. Chaque corps \mathcal{B}_i est caractérisé par une longueur l_i , une masse m_i , un moment d'inertie J_i autour du centre de masse de position (x_i, y_i) . La dynamique du corps peut être scindée en deux composantes :

- **un déplacement solide** caractérisant le mouvement d'ensemble de la structure. Pour décrire sa trajectoire, on définit un repère flottant \mathcal{R}_b arbitrairement attaché au centre de masse du corps \mathcal{B}_0 et dont l'orientation relative avec le repère \mathcal{R}_s est donnée par l'angle θ_0 . La position et l'orientation de ce repère mobile sont définies par le vecteur $\mathbf{X}_0^T = (x_0, y_0, \theta_0)$, dont l'évolution temporelle dessine la trajectoire du robot nageur dans l'espace cartésien.
- **une déformation de la structure multi-corps** caractérisée par les positions relatives des centres de masses des segments $i \in [1 : N]$. Chaque paire de corps solides adjacents \mathcal{B}_{i-1} et \mathcal{B}_i est connectée par un axe pivot d'angle θ_i , permettant de calculer la position du centre de masse du corps \mathcal{B}_i relativement à celle du corps \mathcal{B}_{i-1} . La déformation de la structure multi-corps par rapport au repère flottant \mathcal{R}_b est complètement définie par le vecteur des angles relatifs $\boldsymbol{\theta}^T = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N)$ regroupant les degrés de liberté interne de la structure multi-corps. Le vecteur position des centres de masses $\mathbf{x} = (x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_N, y_N) \in \mathbb{R}^{2N}$ se calcule à partir de $\boldsymbol{\theta}$ et \mathbf{X}_0 grâce à la transformation suivante

$$g : (\mathbf{X}_0, \boldsymbol{\theta}) \mapsto \mathbf{x} = g(\mathbf{X}_0, \boldsymbol{\theta}). \quad (1)$$

Le système est complètement caractérisé par les coordonnées généralisées $\mathbf{q} = (\mathbf{X}_0, \boldsymbol{\theta}) \in \mathbb{R}^{3+N}$. Cette décomposition permet d'étudier la locomotion comme le couplage entre les déformations du système multi-corps et son déplacement solide. Les systèmes auto-propulsés, comme les robots nageurs à haut nombre de Reynolds, n'agissent que sur les degrés de liberté internes de la structure via des actionneurs (muscles, servo-moteur...), alors que le déplacement d'ensemble du robot résulte de l'interaction entre les différents corps \mathcal{B}_i et le milieu environnant, via les lois de l'hydrodynamique et le principe d'action-réaction. La locomotion consiste donc à induire une déformation du corps, qui est généralement périodique, afin d'accélérer le fluide environnant qui, en retour, fournit par réaction la poussée nécessaire au système. À ce niveau, deux observations peuvent être faites. Premièrement, la coordination de tous les membres est nécessaire pour que la résultante spatiale et instantanée des forces soit non nulle. Ensuite, il est nécessaire de briser une symétrie (temporelle ou spatiale) pour que le déplacement moyenné sur une période soit non nul.

Les anguilles, lamproies ou murènes utilisent la nage dite anguilliforme pour progresser dans le milieu aquatique, une nage qui satisfait les deux points précédents. Elles émettent une onde de déformation transversale du corps de la tête vers la queue, accélérant ainsi le fluide vers l'aval. La propagation de l'onde est assurée par la synchronisation des muscles le long du corps dont la coordination repose sur les couplages entre le système nerveux central (cerveaux, moelle épinière) et périphérique (nerfs et ganglions). La brisure de symétrie spatiale est assurée par la présence de la nageoire caudale, et la vorticité lâchée dans son sillage.

Nous allons maintenant décrire l'équation régissant la dynamique du vecteur \mathbf{q} . Le couplage inertiel des deux composantes \mathbf{X}_0 et $\boldsymbol{\theta}$ peut être explicité grâce au modèle lagrangien du système multi-corps. Le lagrangien \mathcal{L} en l'absence de force conservative se décompose comme la somme de l'énergie cinétique des centres de masse et l'énergie cinétique de rotation des corps solides

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^N \dot{\mathbf{x}}^T \begin{pmatrix} m_0 & & \\ & \ddots & \\ & & m_N \end{pmatrix} \dot{\mathbf{x}} + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^N \dot{\boldsymbol{\theta}}^T \begin{pmatrix} J_0 & & \\ & \ddots & \\ & & J_N \end{pmatrix} \dot{\boldsymbol{\theta}}. \quad (2)$$

Le lagrangien $\mathcal{L}(\mathbf{q})$ peut être reformulé uniquement en fonction des coordonnées généralisées \mathbf{q} en éliminant la variable $\dot{\mathbf{x}}$ grâce à la matrice jacobienne \mathcal{J}_g de la fonction g (  quation (1)), avec $\dot{\mathbf{x}} = \mathcal{J}_g(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}$. Le lagrangien devient ainsi : $\mathcal{L} = \mathbf{q}^T \mathbf{M} \mathbf{q} / 2$, avec $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ la matrice d'inertie. La dérivation des équations de la dynamique du système multi-corps s'obtient grâce aux équations d'Euler-Lagrange avec les forces généralisées $\boldsymbol{\tau}$, qui s'écrivent de manière matricielle et compacte

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M}_{00} & \mathbf{M}_{0\theta}^T \\ \mathbf{M}_{0\theta} & M_{\theta\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{X}}_0 \\ \ddot{\boldsymbol{\theta}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{C}_0 \\ \mathbf{C}_\theta \end{pmatrix} = \boldsymbol{\tau}^{(\text{ext})} + \boldsymbol{\tau}^{(\text{int})}. \quad (3)$$

La matrice d'inertie comprend les sous-blocs $\mathbf{M}_{00}, M_{\theta\theta}$ et $\mathbf{M}_{0\theta}$, caractérisant respectivement l'inertie totale du système multi-corps, l'inertie de la chaîne multi-corps et les couplages inertiels entre ces deux composantes. Les vecteurs \mathbf{C} contiennent les forces centrifuge et de Coriolis, qui sont des fonctions quadratiques des composantes des vitesses généralisées $\dot{\mathbf{q}}$. Les forces généralisées sont ici scindées en deux parties : une correspondant aux couples internes sur les pivots $\boldsymbol{\tau}^{(\text{int})}$ et la seconde aux forces hydrodynamiques externes $\boldsymbol{\tau}^{(\text{ext})}$.

Dans le cadre d'un robot bio-inspiré, nous allons utiliser ici le modèle classique de deux muscles antagonistes dont le couple résultant $\tau_i^{(\text{int})}$ agit sur le pivot i d'angle θ_i . Le modèle simplifié inspiré de Ekeberg [3] s'écrit comme :

$$\tau_i^{(\text{int})} = \alpha u_i - \gamma_i \theta_i - \delta_i \dot{\theta}_i, \quad (4)$$

avec u_i le couple moteur, et les deux derniers termes correspondant au couple visco-élastique du muscle. Nous supposons les raideurs angulaires γ_i et les coefficients d'amortissement δ_i constants dans le temps, bien que dans la nature, ils dépendent généralement de la co-contraction simultanée des muscles antagonistes. Les détails du modèle de l'activation musculaire u_i seront décrits dans la section 3, mais nous introduisons dès maintenant la phase ϕ_i , tel que $u_i = \cos(\phi_i)$. Finalement, le couple interne s'écrit

$$\boldsymbol{\tau}^{(\text{int})} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \alpha \mathbf{u} - \mathbf{K}_\gamma \boldsymbol{\theta} - \mathbf{K}_\delta \dot{\boldsymbol{\theta}} \end{pmatrix}, \quad (5)$$

avec \mathbf{K}_γ et \mathbf{K}_δ deux matrices dont les diagonales sont les coefficients de raideur et d'amortissement.

Les forces hydrodynamiques s'exerçant sur la structures s'opposent au mouvement du corps (vitesse et accélération), via deux mécanismes différents : les forces réactives qui sont de nature inertielles et réversibles, et les forces résistives qui sont visqueuses et dissipatives. Si l'amplitude et la direction de la force réactive ne sont généralement accessibles qu'au prix d'une simulation hydrodynamique coûteuse, elles peuvent être évaluées dans la limite où le corps est significativement plus long que large. La théorie de la nage des corps élancés (LAEBT), introduite par Lighthill en 1970 [4] et rigoureusement prouvée par Candelier en 2011 [5], permet de calculer la force réactive s'exerçant sur un corps \mathcal{B}_i en considérant au premier ordre uniquement l'écoulement transversal induit par le corps. Cette force est une généralisation aux systèmes déformables et élancés de la force de masse ajoutée. Dans cet exposé, nous ne détaillerons pas les différentes composantes des forces hydrodynamiques qui sont décrites par Candelier [5] ou Eloy [6]. Nous supposons que la force exercée sur chacun des segments par le fluide est une fonction des vitesses et accélération des centres de masses dudit segment $\mathcal{F}_{\text{hydro}}(\dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}) \in \mathbb{R}^{2N}$. La puissance associée à cette force est indépendante de la paramétrisation du système et la force généralisée $\boldsymbol{\tau}^{(\text{ext})}$ satisfait l'égalité suivante : $\dot{\mathbf{x}}^T \mathcal{F}_{\text{hydro}}(\dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}) = \dot{\mathbf{q}}^T \boldsymbol{\tau}^{(\text{ext})}$. En inversant cette équation, la force généralisée est égale à : $\boldsymbol{\tau}^{(\text{ext})} = \mathcal{J}_g^T \mathcal{F}_{\text{hydro}}(\dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})$, avec \mathcal{J}_g^T la transposée de la matrice jacobienne. En combinant tous ces éléments, le système (3) s'écrit

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M}_{00} & \mathbf{M}_{0\theta}^T \\ \mathbf{M}_{\theta\theta} & M_{\theta\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{X}}_0 \\ \ddot{\boldsymbol{\theta}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{C}_0 \\ \mathbf{C}_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \alpha \mathbf{u} - \mathbf{K}_\gamma \boldsymbol{\theta} - \mathbf{K}_\delta \dot{\boldsymbol{\theta}} \end{pmatrix} + \mathcal{J}_g^T \mathcal{F}_{\text{hydro}}(\dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}). \quad (6)$$

À partir de cette équation, nous pouvons formuler plusieurs remarques

1. La dynamique de la base flottante caractérisée par le vecteur \mathbf{X}_0 est donnée par

$$\mathbf{M}_{00} \ddot{\mathbf{X}}_0 = -\mathbf{C}_0(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathbf{M}_{0\theta}^T \ddot{\boldsymbol{\theta}} + (\mathcal{J}_g^T \mathcal{F})_{\mathbf{X}_0} \quad (7)$$

avec $(\cdot)_{\mathbf{X}_0}$ la composante sur \mathbf{X}_0 . Cette formulation montre explicitement la nécessité du couplage avec la déformation du système multi-corps pour que le système soit auto-propulsé. La poussée est pourvue par le terme $-\mathbf{M}_{00}^{-1} (\mathbf{C}_0(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{M}_{0\theta}^T \ddot{\boldsymbol{\theta}})$ alors que le terme $(\mathcal{J}_g^T \mathcal{F})_{\mathbf{X}_0}$, contenant essentiellement des forces résistives, s'oppose généralement au mouvement.

2. L'angle relatif θ_i est l'analogie de la courbure $\partial_{ss}y(s)$ dans la théorie des poutres et l'équation suivante

$$M_{\theta\theta} \ddot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{C}_\theta = \alpha \mathbf{u} - \mathbf{K}_\gamma \boldsymbol{\theta} - \mathbf{K}_\delta \dot{\boldsymbol{\theta}} + (\mathcal{J}_g^T \mathcal{F})_{\boldsymbol{\theta}} \quad (8)$$

est similaire à l'équation d'Euler-Bernoulli non linéaire formulée en fonction de la courbure. Ayant négligé dans l'équation (8) la rétro-action du mouvement d'ensemble sur la structure, le système multi-corps est encastré en $i = 0$, c'est-à-dire que la tête du robot est fixée. À l'instar de l'équation d'Euler-Bernoulli, l'équation (8) admet comme solutions des ondes élastiques amorties de déplacement transversal, excitées par les couples moteurs \mathbf{u} . Selon les conditions aux limites aux extrémités des robots, ces ondes forment des modes globaux dont les fréquences propres déterminent la réponse linéaire de la structure aux couples moteurs.

3. Nous utiliserons dans la section suivante l'observable S_i conçue comme une fonction des dérivées temporelles de l'angle relatif θ_i associé au joint i ou de l'ordonnée y_i du centre de masse du corps \mathcal{B}_i . Nous affirmons que cette observable dépend implicitement des phases :

$$S_i = S_i(\phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots, \phi_N). \quad (9)$$

Cette propriété découle directement de la présence de modes globaux, qui communiquent la quantité de mouvement fournie par les couples (u_1, u_2, \dots, u_N) de phases $(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N)$, à travers les segments rigides du robot.

3 Modèle de l'activation musculaire

La coordination des muscles est contrôlée par des réseaux neuronaux centraux [1, 7], qui impriment une activité rythmique aux muscles. Le modèle le plus simple consiste à décrire la dynamique grâce à une phase ϕ_l telle que le couple u_l agissant sur le joint l (nous garderons la lettre i pour désigner dans la suite l'unité imaginaire) vaut

$$u_l = \cos(\phi_l). \quad (10)$$

Nous modéliserons l'évolution de la phase par un modèle d'oscillateur. Dans ce modèle, la moelle épinière devient une chaîne d'oscillateurs où chaque vertèbre \mathcal{B}_l contient un réseau neuronal de phase ϕ_l . Nous supposons que l'évolution de chaque phase est caractérisée par une fréquence intrinsèque ω partagée par tous les oscillateurs, telle qu'en l'absence de retour sensoriel, on ait $\dot{\phi}_l = \omega$. Nous considérons aussi que le retour sensoriel est défini par la fonction $F_l(\phi_l, S_l)$ qui dépend de la phase ϕ_l et d'une observable locale que l'on nommera $S_l(t)$. Cette observable provient de deux types de capteur sensoriel :

- exteroceptif : l'observable est liée à la perception du milieu extérieur comme la pression hydrodynamique locale ou la vitesse de l'écoulement grâce à la ligne latérale ;
- proprioceptif : l'observable est mesurée grâce à la perception de la déformation du corps du robot, telle la courbure locale θ_l .

Nous supposons que F_l est une fonction linéaire de S_l et une fonction paire de ϕ_l . Aussi, l'équation régissant la dynamique de la phase ϕ_l et respectant ces deux dernières conditions peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\dot{\phi}_l = \omega + \epsilon \cos(\phi_l) S_l, \quad (11)$$

avec ϵ l'amplitude de la rétroaction. La phase est donc modulée par le produit du couple $u_l = \cos(\phi_l)$ avec l'amplitude de l'observable S_l . Cette loi a été implémentée dans un robot quadrupède [8], où la synchronisation des membres a été observée. Nous touchons là au cœur de l'article et affirmons que : **l'équation (11) mène à une synchronisation, avec un verrouillage de phases, entre tous les oscillateurs.** Cette synchronisation est nécessaire car elle assure la coordination des membres, qui, comme vu dans la section précédente, permet de déplacer le fluide de la tête vers la queue. Nous souhaitons reformuler l'équation précédente en introduisant la variable complexe $X_l = \exp(i\phi_l) \in \mathbb{C}$. La dynamique de la phase dans le plan complexe s'écrit

$$\dot{X}_l = i\Omega_l X_l, \quad (12)$$

avec $\Omega_l = \omega + \epsilon u_l S_l$ et $u_l = (X_l + \bar{X}_l)/2$. Ce nouveau système permet de traiter mathématiquement des fonctions bornées ($|X_l| = 1$, $|u_l| < 1$), prérequis nécessaire pour appliquer la méthode des échelles multiples. L'équation (11) peut aussi se formuler sous la forme d'une équation différentielle du second ordre pour u_l

$$\ddot{u}_l + \Omega_l^2 u_l - \frac{\dot{\Omega}_l}{\Omega_l} \dot{u}_l = 0. \quad (13)$$

Cette équation caractérise un oscillateur à mi-chemin entre l'oscillateur paramétrique, avec Ω_l une fréquence dépendant du temps, et l'oscillateur de van der Pol, avec un amortissement non linéaire. La quantité $u_l^2 + (\dot{u}_l)^2 \Omega^{-2}$ est conservée par l'équation (13), ce qui implique que la dynamique reste sur le cercle unité dans le plan complexe bien que la vitesse de parcours Ω soit non uniforme. Cette équation décrit donc des oscillations de relaxation communément observées dans l'activité musculaire. Cette dernière formulation justifie le recours à l'approche multi-échelles, couramment utilisée dans le cadre des oscillateurs non linéaires. Sur la base de cette formulation, nous allons dériver dans la prochaine section l'équation régissant la dynamique de la phase lente pour expliquer l'émergence de la synchronisation entre les oscillateurs.

4 Émergence de la synchronisation via l'approche multi-échelles

Dans cette section qui fait office de conclusion, nous expliquons comment l'équation (11) permet la synchronisation de tous les actionneurs. Elle implique que la différence de phases $\phi_i - \phi_{i-1}$ converge vers une constante, qui déterminera la longueur d'onde de l'onde d'activation \mathbf{u} parcourant l'échine du robot. Ainsi, l'émergence d'une nage cohérente n'est possible que si les oscillateurs sont couplés. Pour démontrer ce principe, nous souhaitons obtenir la dynamique lente de l'équation (11) sous la forme

$$\dot{\phi}_l = \omega + \epsilon \sum_j C_{lj} \cos(\phi_j - \phi_l + \nu_{lj}), \quad (14)$$

avec C_{lj} et ν_{lj} l'amplitude et la phase des couplages entre les oscillateurs. Cette équation est la formulation canonique du couplage entre oscillateurs décrite dans le livre de Kuramoto [9]. Pour dériver l'équation (14), nous utiliserons les deux hypothèses suivantes :

1. la modulation de la phase par le retour sensoriel est faible. Ainsi, le paramètre ϵ de l'équation (11) est supposé assez petit pour justifier un développement perturbatif.
2. L'observable S_l peut être approximée en première approche comme une combinaison linéaire de X_l et son complexe conjugué

$$S_l \simeq \sum_j c_{lj} X_j + \bar{c}_{lj} \bar{X}_j, \quad (15)$$

avec c_{lj} des coefficients complexes. Cette équation correspond aux premiers termes dominants d'une décomposition de Fourier de l'équation (9).

Pour des petites perturbations $\epsilon \ll 1$, la variable complexe X_l admet le développement suivant

$$X_l(t, \epsilon) = X_l^{(0)}(t) + \epsilon X_l^{(1)}(t) + \epsilon^2 X_l^{(2)}(t) + \dots, \quad (16)$$

vérifiant l'équation (12). La dynamique restant sur le disque unité dans le plan complexe, la solution à l'ordre zéro satisfait : $|X_l^{(0)}| = 1$. Afin d'éviter l'apparition de termes séculaires, nous introduisons le changement de variable $t \mapsto (t, T)$ (méthode de Poincaré-Lindstedt), avec $T = \epsilon t$ une nouvelle variable lente du temps. La dérivée temporelle devient : $d/dt \rightarrow \partial_t + \epsilon \partial_T$. Finalement, la solution à l'ordre zéro de l'équation (12) satisfait l'équation

$$\partial_t X_l^{(0)} = i\omega X_l^{(0)}, \quad (17)$$

avec $|X_l^{(0)}| = 1$. Ainsi la solution est $X_l^{(0)}(t, \tau) = e^{i\omega t + i\psi_l(T)}$, avec la phase lente $\psi_l(T) = \phi_l - \omega t + \mathcal{O}(1)$. Le développement perturbatif à l'ordre ϵ^1 de l'équation (12) donne

$$\partial_t X_l^{(1)} + \partial_T X_l^{(0)} = i\omega X_l^{(1)} + iS_l^{(0)} u_l^{(0)} X_l^{(0)} \quad (18)$$

avec $S_l^{(0)}$ l'observable à l'ordre zéro, telle que : $S_l^{(0)}(\omega t + \psi_1, \omega t + \psi_2, \dots, \omega t + \psi_N)$ (cf. Éq. (9)). Grâce à la seconde hypothèse basée sur l'équation (15) et la notation complexe de u_l , l'équation précédente ré-arrangée devient

$$\partial_t X_l^{(1)} - i\omega X_l^{(1)} = -\partial_T X_l^{(0)} + \frac{i}{2} \left(\sum_j c_{lj} X_j^{(0)} + \bar{c}_{lj} \bar{X}_j^{(0)} \right) \left(X_l^{(0)} + \bar{X}_l^{(0)} \right) X_l^{(0)}. \quad (19)$$

Les termes du membre de gauche correspondent à l'équation homogène de la solution à l'ordre ϵ^1 et ceux du membre de droite au forçage dépendant des solutions à l'ordre zéro. Parmi ces termes, certains oscillent à la pulsation ω et sont des termes résonants que la méthode perturbative a artificiellement introduite. Pour que la solution $X_l^{(1)}$ reste bornée, il faut identifier puis annuler les termes proportionnels à $e^{i\omega t}$

grâce à la fonction lente du temps $\psi_l(T)$. Le développement du dernier terme de droite de l'équation (19), nous permet d'identifier les deux termes résonants suivant : $\bar{c}_{lj}(X_l^{(0)})^2 \bar{X}_j^{(0)}$ et $c_{lj}|X_l^{(0)}|^2 X_j^{(0)}$, auxquels on ajoute le terme $\partial_T X_l^{(0)}$. L'annulation des termes résonants conduit à l'équation

$$-\partial_T X_l^{(0)} + \frac{i}{2} X_l^{(0)} \sum_j \left(c_{lj} \bar{X}_l^{(0)} X_j^{(0)} + \bar{c}_{lj} X_l^{(0)} \bar{X}_j^{(0)} \right) = 0, \quad (20)$$

où le second terme est factorisé par $X_l^{(0)}$. Cette équation se simplifie grâce aux deux relations suivantes

$$\begin{cases} \partial_T X_l^{(0)} = (i\partial_T \psi_l) X_l^{(0)}, \\ c_{lj} \bar{X}_l^{(0)} X_j^{(0)} + \bar{c}_{lj} X_l^{(0)} \bar{X}_j^{(0)} = 2C_{lj} \cos(\psi_j - \psi_l + \nu_{jl}), \end{cases} \quad (21)$$

avec $c_{jl} = 2C_{lj} \exp(i\nu_{lj})$ où C_{lj} et ν_{lj} sont réels. À partir de l'équation (20) et des identités (21), nous aboutissons après simplification à l'équation finale

$$\partial_T \psi_l = \sum_j C_{lj} \cos(\psi_j - \psi_l + \nu_{jl}). \quad (22)$$

Nous retrouvons bien l'équation attendue couplant toutes les phases ψ_l en fonction des coefficients C_{lj} et ν_{lj} dépendant de la réponse du corps et de la nature de l'observable. **L'équation (22) décrit l'entraînement mutuel de toutes les phases lentes ψ_l [9], qui, selon la valeur des coefficients (C_{lj}, ν_{lj}) , permet l'émergence d'une coordination des actionneurs, source de la nage anguilliforme.** En dérivant l'approximation à l'ordre zéro : $\phi_l \simeq \omega t + \psi_l(\epsilon t)$, nous obtenons l'équation (14) désirée. Nous remarquons que le terme $j = l$ dans la somme est une constante qu'on définit égale à $\delta\omega_l = C_{ll} \cos(\nu_{ll})$. Les phases finales $(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N)$ convergent vers des valeurs asymptotiques constantes vérifiant $\partial_T \psi_l = 0$ (Éq. (22)), si l'amplitude du décalage en fréquence $\delta\omega_l$ est faible.

En guise de conclusion, nous avons montré que n'importe quelle observable S_l dépendant des dérivées temporelles de θ_l ou y_l , pouvait permettre l'émergence d'une nage cohérente en fixant la différence de phase entre les oscillateurs. La valeur de cette différence de phase n'est accessible qu'en définissant l'observable et en résolvant les équations (6) de la dynamique du corps couplées aux équations (11) régissant l'évolution des phases. Ces résultats seront publiés prochainement.

Références

1. A. J. IJSPEERT, A. CRESPI, D. RYCZKO & J. M. CABELGUEN, From swimming to walking with a salamander robot driven by a spinal cord model, *Science*, **315**, 1416–1420 (2007).
2. M. POREZ, F. BOYER & A. J. IJSPEERT, Improved lighthill fish swimming model for bio-inspired robots: Modeling, computational aspects and experimental comparisons, *Int. J. Robotics Res.*, **33**, 1322–1341 (2014).
3. Ö. EKEBERG, A combined neuronal and mechanical model of fish swimming, *Biol. Cybern.*, **69**, 363–374 (1993).
4. M. J. LIGHTHILL, Aquatic animal propulsion of high hydromechanical efficiency, *J. Fluid Mech.*, **44**, 265–301 (1970).
5. F. CANDELIER, F. BOYER, & A. LEROYER, Three-dimensional extension of Lighthill's large-amplitude elongated-body theory of fish locomotion, *J. Fluid Mech.*, **674**, 196–226 (2011).
6. C. ELOY, On the best design for undulatory swimming, *J. Fluid Mech.*, **717**, 48–89 (2013).
7. A. J. IJSPEERT, Central pattern generators for locomotion control in animals and robots: A review, *Neural Netw.*, **21**, 642–653 (2008).
8. D. OWAKI, T. KANO, K. NAGASAWA, A. TERO & A. ISHIGURO, Simple robot suggests physical interlimb communication is essential for quadruped walking, *J. Royal Soc. Interface*, **10**, 20120669 (2013).
9. Y. KURAMOTO, *Chemical oscillations, waves, and turbulence*, Springer Science (1984).

Quasi-singularités détectées dans l'écoulement turbulent d'une soufflerie

Martine Le Berre¹, Thierry Lehner² & Yves Pomeau³

¹ ISMO-CNRS, Université Paris-Sud, 91405 Orsay Cedex

² Laboratoire Luth, Observatoire de Paris, UMR-CNRS 8102, 92190 Meudon

³ LadHyX, UMR-CNR 7646, École Polytechnique, 91128 Palaiseau Cedex

`martine.le-berre@u-psud.fr`

Résumé. Partant de l'hypothèse qu'il existe des solutions auto-similaires des équations d'Euler qui conservent la circulation de la vitesse du fluide, nous montrons qu'elles possèdent la propriété suivante : les grandes valeurs de l'accélération γ sont associées aux grandes fluctuations de la vitesse u , suivant la loi $\gamma \sim u^3$. Nous avons testé cette relation sur un enregistrement de la vitesse du vent dans la soufflerie de Modane à très grand nombre de Reynolds. Les données expérimentales sont en excellent accord avec cette relation et en totale contradiction avec celle déduite de la théorie K41, qui n'est vérifiée que pour de faibles valeurs de u et γ , inférieures ou de l'ordre de leurs écarts-types respectifs. L'existence de singularités n'est donc pas en contradiction avec la présence d'une cascade d'énergie vers les petites échelles spatiales, suivant l'idée de Kolmogorov, mais n'en sont pas l'aboutissement. Dans l'expérience de Modane la viscosité est très faible, mais pas nulle. Admettant que l'équation de Leray pour Navier–Stokes n'admet que la solution identiquement nulle, nous interprétons les observations de pics d'accélération en terme de *quasi-singularité* dont nous esquissons la description mathématique à partir d'un continuum de solutions de type Euler–Leray qui présentent une symétrie de dilatation. Une quasi-singularité a une amplitude croissante qui sature avant l'explosion, puis décroît. Les événements singuliers, ou quasi-singuliers ici, auraient pour rôle de dissiper l'énergie, comme le déferlement d'une vague dans une mer formée, qui est aussi un événement rare.

Abstract. Assuming the existence of self-similar solutions of Euler equations, with conservation of velocity circulation, we deduce scaling laws for these solutions. We prove that large values of the acceleration γ are associated to large velocities u along the law $\gamma \sim u^3$. This relation is tested on experimental data of velocity fluctuations recorded in the Modane wind tunnel. We show that for large acceleration values (associated to rare events), the record displays a good agreement with the latter relation, although the data are in contradiction with scalings deduced from Kolmogorov K41 (the agreement with K41 is good for small acceleration values only). This implies in particular that Leray-singularities can coexist with the process of cascade of energy towards small scales, but singular events cannot be seen as the end of a cascade. In Modane's experiment the viscosity is small, but not equal to zero. Our study suggests that a peak of acceleration could correspond to the formation of a *quasi-singularity* which begins as Euler–Leray solution, grows significantly, then decreases towards zero, instead of blowing up because it is attracted by the unique fixed point of the equation derived by Leray (1934). One may imagine that quasi-singularities play a role similar to wave breaking in a heavy sea, where these rare events are the principal source of energy dissipation.

1 Introduction

Parmi les nombreux problèmes non résolus concernant le comportement des solutions des équations des fluides incompressibles à très grand nombre de Reynolds en 3D, figurent les bouffées turbulentes, nommées intermittence [1], non explicables par les statistiques dérivant de la théorie de Kolmogorov K41. Cette théorie est basée sur l'idée que l'énergie est transférée étape par étape des grandes vers les petites échelles, et que toutes les grandeurs physiques peuvent être exprimées en fonction d'un seul paramètre, le taux de dissipation [2]. L'intermittence se présente sous la forme de grandes fluctuations de la vitesse du fluide et/ou de ses dérivées, qui durent un temps très court. L'étude de l'intermittence a été ramenée, depuis K62, à l'étude des écarts aux lois K41. Ici nous proposons d'expliquer les grandes fluctuations, à partir des équations du fluide. Nous faisons l'hypothèse que les grandes fluctuations sont reliées à la

présence de solutions singulières des équations d'Euler,

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (1)$$

bien qu'en présence de viscosité ν , le fluide soit décrit par les équations de Navier–Stokes (NS),

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2)$$

En 1934, Leray dérivait une équation pour les solutions auto-similaires de NS [3], de la forme

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = (t^* - t)^{-\alpha} \mathbf{U}(\mathbf{r}(t^* - t)^{-\beta}). \quad (3)$$

Dans l'équation (3), t^* est l'instant où la solution diverge, les exposants α et β sont positifs afin de décrire une singularité à temps fini et $\mathbf{U}(\cdot)$ est un champ qui obéit à une équation réduite, déduite de l'équation (2) par Leray [3]. Pour que les équations (2) et (3) soient compatibles, il faut avoir

$$\alpha = \beta = 1/2. \quad (4)$$

La relation (4) conduit à une solution qui conserve la circulation Γ le long d'une courbe fermée transportée par l'écoulement au voisinage de la singularité car $\Gamma = \oint u ds \sim U^2 (t^* - t)^{\beta - \alpha}$, mais l'énergie diverge comme $(t^* - t)^{-2\alpha + 3\beta} = (t^* - t)^{1/2}$ (voir la discussion de la section 5).

Notons que dans le cas des équations d'Euler, la seule contrainte imposée par (1) sur les exposants, est $\alpha + \beta = 1$, ce qui permet d'imposer une condition de conservation différente de celle ci-dessus. Par exemple la conservation de l'énergie imposerait $-2\alpha + 3\beta = 0$, ce qui donnerait une solution de type Sedov–Taylor avec $\alpha = 3/5$ and $\beta = 2/5$. Dans la suite nous considérons uniquement les solutions (3) et (4), dont les conditions d'existence furent très étudiées par les mathématiciens [4, 5].

Nous faisons les hypothèses *i*) qu'il n'existe pas de solution auto-similaire pour NS, excepté la solution identiquement nulle, *ii*) qu'il existe des solutions non nulles de la forme (3) pour l'équation d'Euler. Nous montrons que les lois d'échelles qui relient les grandes accélérations et les vitesses de ces solutions sont en remarquable accord avec les observations expérimentales effectuées dans la soufflerie de Modane alors qu'elles sont en total désaccord avec les lois déduites de la théorie de Kolmogorov.

2 Équations de Leray

En posant $t^* = 0$, une solution auto-similaire de la forme

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = (-t)^{-\frac{1}{2}} \mathbf{U}(\mathbf{r}(-t)^{-\frac{1}{2}}), \quad (5)$$

est aussi solution de (2), si l'amplitude U satisfait,

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \tau} + \frac{1}{2}(\mathbf{U} + \mathbf{R} \cdot \nabla \mathbf{U}) + \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{U} = -\nabla P + \nu \nabla^2 \mathbf{U}, \quad \nabla \cdot \mathbf{U} = 0, \quad (6)$$

où $\mathbf{R} = \mathbf{r}(-t)^{-1/2}$ et $\tau = \log(-t)$ [4]. Les solutions (\mathbf{U}, P) indépendantes du temps τ , satisfont l'équation de Leray

$$\frac{1}{2}(\mathbf{U} + \mathbf{R} \cdot \nabla \mathbf{U}) + \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{U} = -\nabla P + \nu \nabla^2 \mathbf{U}, \quad \nabla \cdot \mathbf{U} = 0, \quad (7)$$

que nous appellerons NS–Leray si la viscosité est non nulle. Si $\nu = 0$, on obtient l'équation

$$\frac{1}{2}(\mathbf{U} + \mathbf{R} \cdot \nabla \mathbf{U}) + \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{U} = -\nabla P, \quad \nabla \cdot \mathbf{U} = 0, \quad (8)$$

que nous appellerons Euler–Leray.

Dans les équations (7) et (8) les fonctions (\mathbf{U}, \mathbf{P}) ne dépendent que de \mathbf{R} . De plus $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ doit tendre vers zéro à grande distance, quel que soit t , ce qui est réalisé avec $\mathbf{U} \sim 1/\mathbf{R}$ pour \mathbf{R} grand, puisqu'alors on a $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \sim (-t)^{-1/2}/\mathbf{r}(-t)^{-1/2} \sim 1/\mathbf{r}$ indépendant de t . Notons que la vitesse est liée à la circulation par la relation $U_{\text{Euler}} \sim \Gamma^{1/2}$. Près de la singularité, le nombre de Reynolds local est de l'ordre de

$$\text{Re}_s \sim \frac{\Gamma}{\nu}, \quad (9)$$

il est donc constant puisque la circulation est par hypothèse conservée dans ce domaine qui se rétrécit au cours du temps pendant que la vitesse augmente. Cette propriété contredit les idées courantes sur la turbulence basées sur un seul paramètre (la puissance dissipée par unité de masse et de temps), qui concluraient à une tendance vers zéro de Re_s .

Les solutions d'Euler-Leray sont invariantes par dilatation, alors que celles de NS-Leray ne le sont pas : si $\mathbf{U}(\mathbf{R})$ est solution de (8), alors la fonction $\mu\mathbf{U}(\mu\mathbf{R})$ est aussi solution, quel que soit μ réel. Il en résulte que le passage à la limite des solutions de (7) pour ν tendant vers zéro est singulier (cf. Sec. 4.)

Un algorithme formel a été récemment proposé [6] pour trouver des solutions de (8) à partir d'un développement asymptotique en puissances de R .

Une autre propriété des solutions auto-similaires (3) des équations d'Euler (1), qui va s'avérer cruciale pour notre étude expérimentale, concerne les lois d'échelles qui relient la dynamique de la vitesse à celle de sa dérivée $\gamma(t) = \frac{\partial u}{\partial t}$, que nous appellerons accélération. Notons que γ n'est pas l'accélération d'une particule transportée par le fluide, mais c'est une grandeur accessible à partir d'un signal temporel, tel que celui de Modane, étudié ici. On a $\gamma(r, t) \sim (-t)^{-3/2}\Gamma^{1/2}$, ce qui conduit à une relation indépendante du temps et non triviale entre u et γ ,

$$u^3 \sim \gamma\Gamma. \quad (10)$$

Comparons cette relation avec celle que l'on peut déduire de la théorie de Kolmogorov K41, qui stipule $u_r \sim (\epsilon r)^{1/3}$ où u_r est le changement de la vitesse sur une distance r et ϵ la puissance dissipée par unité de masse du fluide turbulent. L'accélération serait alors de l'ordre de $\gamma \sim \epsilon^{2/3}r^{-1/3}$. En éliminant la variable d'espace, on déduit

$$u_r\gamma \sim \epsilon. \quad (11)$$

3 Expérience de Modane

Les relations (10) et (11) ont été testées en utilisant les données (vitesse du fluide) enregistrées en un seul point par un détecteur à fil chaud dans la soufflerie de Modane, avec un pas de temps 2,5 fois plus petit que le temps de Kolmogorov (voir [7]). Nous avons déduit la loi de probabilité $P(\delta v(t), \gamma(t))$ de la fluctuation de la vitesse $\delta v = v(t) - \langle v \rangle$ (autour de sa valeur moyenne $\langle v \rangle$) et de l'accélération $\gamma(t)$ au même instant. Si des solutions auto-similaires du type (5) existent dans l'écoulement, même si ce sont des événements rares, on s'attend à observer la relation linéaire (10) déduite des solutions d'Euler-Leray, entre une grande valeur de l'accélération et la moyenne conditionnelle de δv^3 ,

$$\langle \delta v^3(\gamma) \rangle = \int \delta v^3 P_\gamma(\delta v) d(\delta v), \quad (12)$$

où $P_\gamma(\delta v)$ est la densité de probabilité conditionnelle (d'avoir une fluctuation de vitesse δv si l'accélération vaut γ au même instant). Au contraire, si la dynamique suit les lois d'échelle de K41, les grandes accélérations devraient se produire pour des fluctuations de vitesse proches de zéro, cf. (11), puisque le produit $\gamma \langle \delta v(\gamma) \rangle$ doit être constant. Le résultat de cette étude est reporté sur la figure 1. Les courbes (a) et (b) montrent que la relation linéaire entre le cube de la vitesse et l'accélération, l'équation (10), est remarquablement vérifiée sur un large domaine d'accélération (supérieur à deux fois l'écart-type σ_γ). Sur la courbe (c) on remarque que la loi d'échelle de Kolmogorov n'est valable que pour les petites valeurs de l'accélération et des fluctuations de vitesse, inférieures à l'écart-type.

L'apparition de bouffées intermittentes est parfois attribuée au passage de vortex près du détecteur. Il faut d'abord noter que si les vortex sont des structures rares, les pics d'accélération, eux, ne sont pas si

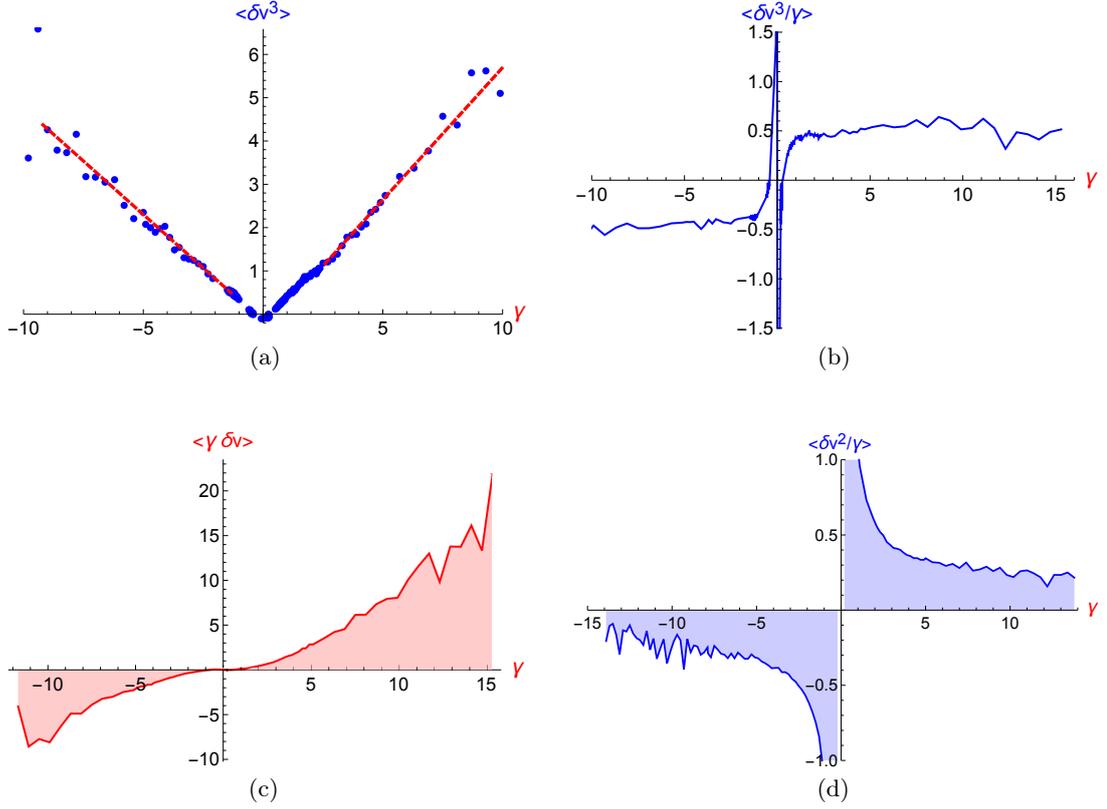


FIGURE 1. Étude expérimentale du domaine de validité des relations (10) et (11). Sur les figures (a) et (b) les points bleus (resp. la courbe bleue) représentent les moyennes conditionnelles $\langle \delta v^3(\gamma) \rangle$ et $\langle \delta v^3(\gamma)/\gamma \rangle$, calculées à partir des données expérimentales. Elles illustrent la relation linéaire entre les grandes valeurs de l'accélération et le cube de la fluctuation de vitesse au même instant, en accord avec la loi d'échelle (10) pour des solutions auto-similaires (3) des équations d'Euler. La courbe rouge de la figure (c) montre que la relation (11) déduite de K41 n'est valable qu'au voisinage de l'origine, pour des faibles accélérations et des faibles fluctuations de la vitesse. Le moment conditionnel $\langle \delta v^2(\gamma)/\gamma \rangle$ est tracé en (d). Dans (c) et (d) le remplissage est un effet graphique, les points expérimentaux appartiennent tous à la courbe en trait plein. Les vitesses et accélérations sont reportées en unités de leur écart-type respectif.

rare : 2% des points de l'enregistrement correspondent à $|\gamma| > 2\sigma_\gamma$. D'autre part le champ de vitesse à la distance r d'un vortex étant en $1/r$ (conservation de la circulation), l'accélération serait en $1/r^2$, ce qui conduirait à la relation $u^2 \sim \gamma\Gamma$. Nous avons testé cette relation : la figure (d) montre assez nettement que le rapport $\langle \delta v^2(\gamma)/\gamma \rangle$ n'est pas constant en fonction de γ , tandis que les figures (a) et (b) sont en accord avec la relation (10) pour $|\gamma| > 2\sigma_\gamma$. Les résultats expérimentaux excluent donc que le passage de vortex linéaires soit responsable de l'observation des pics d'accélération.

En conclusion on peut fortement suspecter l'existence de solutions auto-similaires de type Euler-Leray dans l'écoulement turbulent de Modane. Néanmoins il faut remarquer que le milieu turbulent de Modane est visqueux, alors que la relation (10) est déduite des équations d'Euler-Leray ($\nu = 0$). Nous décrivons ci-dessous un scénario permettant d'obtenir des solutions quasi-singulières de NS à partir des solutions d'Euler-Leray.

4 Solutions quasi-singulière de NS.

Considérons un milieu turbulent dont le nombre de Reynolds est très grand, mais pas infini. Nous proposons un scénario décrivant l'évolution de ce que nous appellerons quasi-singularités, sans prétendre

en prouver l'existence. Une quasi-singularité serait initialement solution de l'équation (8) d'Euler–Leray, mais s'en écarterait notablement in fine, la viscosité inhibant l'explosion. Cette dynamique est compatible avec l'hypothèse donnée dans l'introduction, qu'il n'existe pas de solutions pour l'équation (7) de NS–Leray, excepté la solution identiquement nulle, alors qu'il en existe pour l'équation (8).

Comme nous l'avons indiqué dans la section 2, les solutions d'Euler–Leray ont une propriété remarquable, elles sont invariantes par dilatation, contrairement aux solutions de NS–Leray. Il en résulte qu'il est impossible de trouver une solution auto-similaire de NS par un développement en puissance de ν au voisinage d'une solution d'Euler–Leray (8), car on se heurte dès le premier ordre à une condition de solvabilité impossible à satisfaire. Cependant il est possible d'exploiter la symétrie continue (par rapport au paramètre de dilatation μ) des solutions de (8) pour obtenir une solution de (7) si la viscosité est faible.

Considérons une solution non nulle $\mathbf{U}_0(\mathbf{R}, \mu) = \mu \mathbf{U}_0(\mu \mathbf{R})$ de l'équation (8), dont le paramètre de dilatation est initialement fixé (par exemple $\mu = 1$). En présence d'une faible viscosité, une solution de l'équation (7), voisine de $\mathbf{U}_0(\mathbf{R}, \mu)$, s'écrit au premier ordre en ν , $\mathbf{U}(\mathbf{R}, \mu, \nu, \tau) = \mathbf{U}_0(\mathbf{R}, \mu(\tau)) + \nu \mathbf{U}_1(\mathbf{R}, \mu(\tau))$, avec

$$\frac{\partial \mathbf{U}_0}{\partial \tau} + \mathcal{L}[\mathbf{U}_0] = \nu \nabla^2 \mathbf{U}_0, \quad (13)$$

où $\mathcal{L}[X]$ est la partie linéarisée de (8) autour de la solution X , proportionnelle à \mathbf{U}_1 et ses dérivées.

La condition de solvabilité à l'ordre 1 s'écrit ,

$$\frac{d\mu}{d\tau} \left\langle U^\dagger(\mathbf{R}), \frac{\partial \mathbf{U}_0}{\partial \mu}(\mathbf{R}, \mu) \right\rangle = \nu \langle U^\dagger(\mathbf{R}), \nabla^2 \mathbf{U}_0(\mathbf{R}, \mu) \rangle, \quad (14)$$

où les produits scalaires, notés $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sont définis par des intégrales sur l'espace et $U^\dagger(\mathbf{R})$ appartient au noyau de l'opérateur adjoint de la partie linéaire de (8). Les conditions de convergence de ces intégrales, et le rôle du terme de pression, sont reportées en [8]. Ne disposant pas de solutions explicites pour \mathbf{U}_0 , nous ne pouvons pas obtenir la solution précise de (14). Néanmoins on peut noter que (7) n'admettant que la solution identiquement nulle, $\mu(\tau)$ doit tendre vers zéro lorsque $\tau \rightarrow \infty$. Au cours de la décroissance de μ , le second membre de (13), qui est initialement d'ordre ν/Γ^2 , devient d'ordre $\nu/(\Gamma\mu^2)$. Il tend donc en principe vers l'infini. À partir d'un certain temps, avant l'explosion de la solution auto-similaire, le traitement ci-dessus devient impropre, car la viscosité ne peut plus être traitée comme une perturbation. Lors de la phase décroissante de l'amplitude μ , un nouveau régime est alors atteint, qui correspond à la phase décroissante de la solution quasi-singulière de NS. Dans un écoulement réel on peut s'attendre à ce que μ ne décroisse pas jusqu'à zéro, car les fluctuations de pression exercent un forçage continu, que l'on pourrait représenter par un terme de forçage aléatoire ajouté aux équations d'Euler.

5 Discussion

Nous avons montré que les bouffées turbulentes qui se manifestent expérimentalement par des pics très intenses et très courts de l'accélération $\gamma(t) = \frac{\partial u}{\partial t}$ se produisent lors des grandes fluctuations $u(t)$ de la vitesse du fluide, ces deux grandeurs étant associées en moyenne par la relation $u^3(t) \propto \gamma(t)$. Cette loi d'échelle entre accélération et vitesse est caractéristique des solutions auto-similaires des équations d'Euler. Nous montrons d'autre part que le passage de vortex linéaires près du détecteur conduirait à une relation $u^2(t) \propto \gamma(t)$, qui n'est pas vérifiée par l'expérience. Nous relierons donc l'apparition de bouffées intermittentes en turbulence développée à l'existence de singularités à temps fini des équations d'Euler. L'observation de l'intermittence dans les écoulements turbulents, si elle est déjà ancienne, ne semble pas avoir été reliée de façon précise à l'occurrence de singularités dans les solutions des équations d'Euler. Notre analyse des enregistrements des fluctuations de vitesse d'un écoulement à grand nombre de Reynolds montre un lien que nous pensons indubitable entre ces singularités et les grandes fluctuations de la vitesse et de l'accélération, ceci reposant sur une analyse des équations d'Euler inspirée de Leray.

Il est intéressant de revenir sur les hypothèses *i)* et *ii)* données dans l'introduction qui sont à la base de notre étude. Mathématiquement il est prouvé que les solutions auto-similaires des équations

d'Euler ne sont pas exclues si l'on accepte de s'affranchir de la contrainte d'énergie finie [5]. Bien que de telles solutions peuvent a priori sembler non physiques, il faut noter que le raccordement d'une solution singulière de ce type avec le flot turbulent a toutes les chances de se produire à distance r finie, ce qui limite la portée de l'intervalle de temps $(t^* - t)$ pour t grand, et permet la convergence de l'intégrale de l'énergie sur \mathbf{r} .

L'existence de singularités pour les équations de Navier–Stokes étant écartée par hypothèse, nous imaginons qu'il existe néanmoins, en présence de viscosité, des solutions quasi-singulières des équations de Navier–Stokes, que l'on peut approcher à partir d'un continuum de solutions d'Euler–Leray d'amplitude $\mu(\tau)$ lentement variable en temps. Une quasi-singularité serait initialement une solution de l'équation d'Euler–Leray (8), mais dont l'amplitude évolue : elle n'atteindra pas l'explosion à cause de la viscosité.

Remerciements : Les auteurs remercient chaleureusement Bérengère Dubrulle, Jean Ginibre, Christophe Josserand et Stéphane Popinet pour des discussions fructueuses.

Références

1. G. K. BACHELOR & A. A. TOWNSEND, The nature of turbulent motion at large wave number, *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, **199**, 238–245 (1949).
2. A. N. KOLMOGOROV, The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds number, *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, **30**, 301–305 (1941); A. N. KOLMOGOROV, A refinement of previous hypotheses concerning the local structure of turbulence in a viscous incompressible fluid at high Reynolds number, *J. Fluid Mech.*, **13**, 82–85 (1962).
3. J. LERAY, Essai sur le mouvement d'un fluide visqueux emplissant l'espace, *Acta Math.*, **63**, 193–248 (1934).
4. M.-H. GIGA, Y. GIGA & J. SAAL, *Nonlinear partial differential equations*, Birkhäuser Basel, p. 93 (2010).
5. Voir par exemple les références notées dans la présentation de A. C. Bronzi, On the self-similar blow-up scenario for the Euler equations, www.math.ucr.edu/fluidspde/Slides/Bronzi.pdf ; pour l'équation d'Euler : J. D. Gibbon, The three-dimensional Euler equations: Where do we stand?, *Physica D*, **237**, 1894–1904 (2008).
6. Y. POMEAU, Singularité dans l'évolution du fluide parfait, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **321**, 407–411 (1995); On the self-similar solution to the Euler equations for an incompressible fluid in 3D, à paraître dans *C. R. Mécanique* (2018); Y. POMEAU, Equation for self-similar singularity of Euler 3D, [arXiv:1611.06595](https://arxiv.org/abs/1611.06595).
7. H. KAHALERRAS, Y. MALÉCOT, Y. GAGNE & B. CASTAING, Intermittency and Reynolds number, *Phys. Fluids*, **10**, 910–921 (1998).
8. Y. POMEAU, M. LE BERRE & T. LEHNER, à paraître dans *C. R. Mécanique*.

Evolution of the distance between plates in an experimental granular fault. Implications for earthquake forecast.

Victor Levy dit Vehel^{1,2}, Florine Dubourg¹, Loïc Vanel¹, Knut Jørgen Måløy³ & Osvanny Ramos¹

¹ Univ Lyon, Université Claude Bernard Lyon 1, CNRS, Institut Lumière Matière, F-69622, LYON, France

² Département de Physique, Ecole Normale Supérieure de Lyon, F-69342 Lyon, France

³ PoreLab, Department of Physics, University of Oslo, P. O. Box 1048, 0316 Oslo, Norway

osvanny.ramos@univ-lyon1.fr

Résumé. Nous avons récemment développé un système expérimental capable, pour la première fois, de reproduire les principales lois de la sismologie [1]. Ces séismes artificiels (*labquakes*) sont issus de ruptures de friction au sein d'un milieu granulaire sous pression [2], soumis à un cisaillement continu. Les lois de Gutenberg–Richter [3,4], Omori [5] et la distribution des temps d'attente entre les événements [6] sont reproduites *quantitativement* et d'autres similarités qualitatives sont observées. Ceci suggère fortement que les séismes et les événements observés au sein de notre système sont soumis à une physique similaire. Nous introduisons dans cet article de nouveaux résultats concernant l'écart relatif Δh entre les plaques, en particulier autour des plus grosses secousses, où une dilatation préalable du milieu est attendue [7]. L'analyse de Δh permet de le séparer, d'une part, en une dilatation continue pendant toute l'expérience, et d'autre part en une succession de sauts, dilatant ou contractant le milieu granulaire. Des résultats préliminaires semblent indiquer une croissance pseudo-exponentielle de Δh en amont des plus gros *labquakes*.

Abstract. We have recently developed an experimental system capable of — for the first time — reaching a stationary regime following *quantitatively* the main laws of seismicity [1]. The intermittent dynamics of our *labquakes* consist of frictional failures in the structure of a compressed granular medium [2] submitted to a continuous shear. By quantitatively replicating the main laws of seismicity: Gutenberg–Richter law [3,4], Omori law [5], distribution of waiting times between events [6]; as well as other qualitative similarities, our work strongly indicates that these two very different systems: earthquakes and our experiment, are governed by similar physics. Here we introduce new results focusing on the evolution of the relative distance between plates Δh during the whole experiment, particularly around very large quakes and where we expect a dilatancy of the medium preceding mainshocks [7]. The analysis of Δh can be divided into a smooth dilation during the whole shear, plus intermittent jumps that both dilate and contract the packing. Preliminary results indicate an exponential-like increase of Δh preceding very large quakes.

1 Introduction

In the last decades, considerable efforts have aimed at the creation of simplified models of earthquakes. In particular, the slow shear of a compressed granular medium has often been used to mimic the intermittent behavior of a tectonic fault [8,9]. In most real [1,10–12] or numerical experiments [13], two parallel plates (mimicking tectonic ones) compress the granular system, simulating a fault gauge [14]. As the plates move laterally in relation to each other, shear stresses build up on the packed grains, and eventually they are liberated through sudden events associated to the reorganisation of the pack. Besides these efforts, in previous experiments it has been difficult to obtain a distribution of events that resembles the Gutenberg–Richter (GR) law, sometimes because the intrinsic response of the system is a regular stick-slip with all “labquakes” having approximately the same size [10], and sometimes due to insufficient statistical sets of data [11]. In order to solve these problems, we have recently built a ring shear experiment, allowing the system to run continuously and therefore capturing rich statistics [1]. Thanks to this new experimental system we have been able to *quantitatively* reproduce the main laws of seismicity: Gutenberg–Richter law [3,4], Omori law [5] and distribution of waiting times between events [6]. These results are a very strong indication that these two very different systems, earthquakes and our experiment, are governed by similar physics.

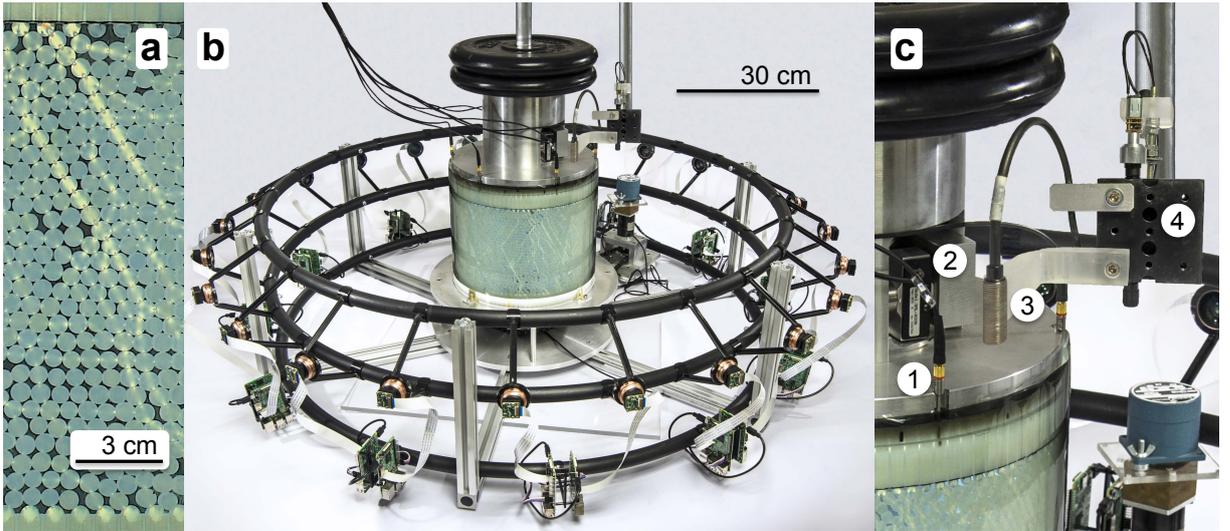


Figure 1. Experimental setup. (a) Close-up of the granular fault displaying the two confining plates and the force networks in the granular structure. (b) Photomontage of the whole setup. (c) Close-up of the setup: The circular shear cell, containing the acoustic (①) and force (②) sensors, is surrounded by 24 Raspberry Pi (R-Pi) cameras where photo-lens have been added. They are controlled by 24 R-Pi cards. A vertical bar holds a motorized stage (④) controlling the vertical position of the positioning sensor (③), in charge of measuring the vertical displacements of the upper plate.

In this work we introduce preliminary results related to the evolution of the distance between the plates (i.e., the global evolution of the packing fraction of the granular medium) during the shearing of the system, and where we expect a dilatancy of the medium before major reorganisation events. Indeed, the dilatancy driven by shear is a phenomenon known since the works of Reynolds in 1885 [15]. Much more recent works have used the strong similarities between the dynamical behaviour of granular materials close to the “jamming transition” and that of liquids close to the glass transition to study granular systems [16]. Granular media close to jamming display a similar dramatic slowing down of the dynamics, dynamical heterogeneities [18,19], as well as other glassy features such as aging and memory effects [17]. The analysis of the evolution of the packing fraction has been already used to predict scale-invariant avalanches [7], thus here we analyze it with the same main purpose: prediction of large “avalanches” or “labquakes”.

2 Experimental setup

The experimental setup consists of two fixed, transparent, and concentric acrylic cylinders with respective diameters of 28 cm (outer) and 29 cm (inner), so that a monolayer of disks can be introduced into the 5 mm gap (Figs. 1 (a) and (b)). These disks, of 4 mm thickness and 6.4 mm and 7.0 mm diameter (in equal proportion) to avoid crystallization, have been 3D-printed in *Durus White 430* thanks to a *Objet30* printer. The plates consist of two rings, 3D-printed in the same material as the grains and consisting of 99 half cylinders (of diameter $d = 6.4$ mm) separated by $\sqrt{2}d \approx 9$ mm each. They are introduced respectively at the bottom and on top of the disks monolayer, and they constrain the pack using a dead load of 276 N. The translucent and photoelastic character of the *Durus* material allows the visualisation of the stress inside the disks when placing the experimental setup between two circular polarisers (Fig. 1 (a)). The zero-frequency Young modulus of *Durus* material is $Y \approx 100$ MPa, which contrasts with classical experiments using photoelastic disks with a Young modulus $Y \approx 4$ MPa [11,16]. Our grains can hold a much larger stress without a considerable deformation, which favours both the acoustic propagation and image analysis [21].

The top ring is free to move vertically but a torque-meter blocks its rotation. The bottom ring is fastened to a gear mechanism and is rotated at a constant and very low speed with a period of 18.33 hours,

quasi-statically shearing the granular pile with a linear velocity of 48.84 mm/hour (approximately 12,600 times faster than the San Andreas fault, with an average rate of slip of 33.9 mm/year [20]). As a result, shear stresses build up on the packed disks. The release of the stress happens with sudden avalanches, i.e., reorganizations of the packing, associated with acoustic emissions.

The torque applied by the granular pile on the top ring is measured thanks to a lever and a force sensor *Interface SML-900N* (Fig. 1 (c)). Six piezoelectric pinducers (*VP-1.5* from *CTS Valpey Corp.*) are inserted regularly in the top ring (Figs. 1 (b) and (c)) and simultaneously record acoustic emissions. A displacement sensor consisting of a capacitive device with a resolution of $0.05 \mu\text{m}$ is in charge of measuring the relative distance between the plates Δh . A motorized platform automatically keeps the sensor inside its measuring range (Fig. 1 (c)). All these measures are recorded with a *NI-USB-6366* card at 100 kHz during the whole experiment, for a duration of more than 29 hours. Images of the system are taken with 24 Raspberry-PI cameras (Fig. 1 (b)) at a frequency of 0.5 Hz. These images will not be analyzed within this report.

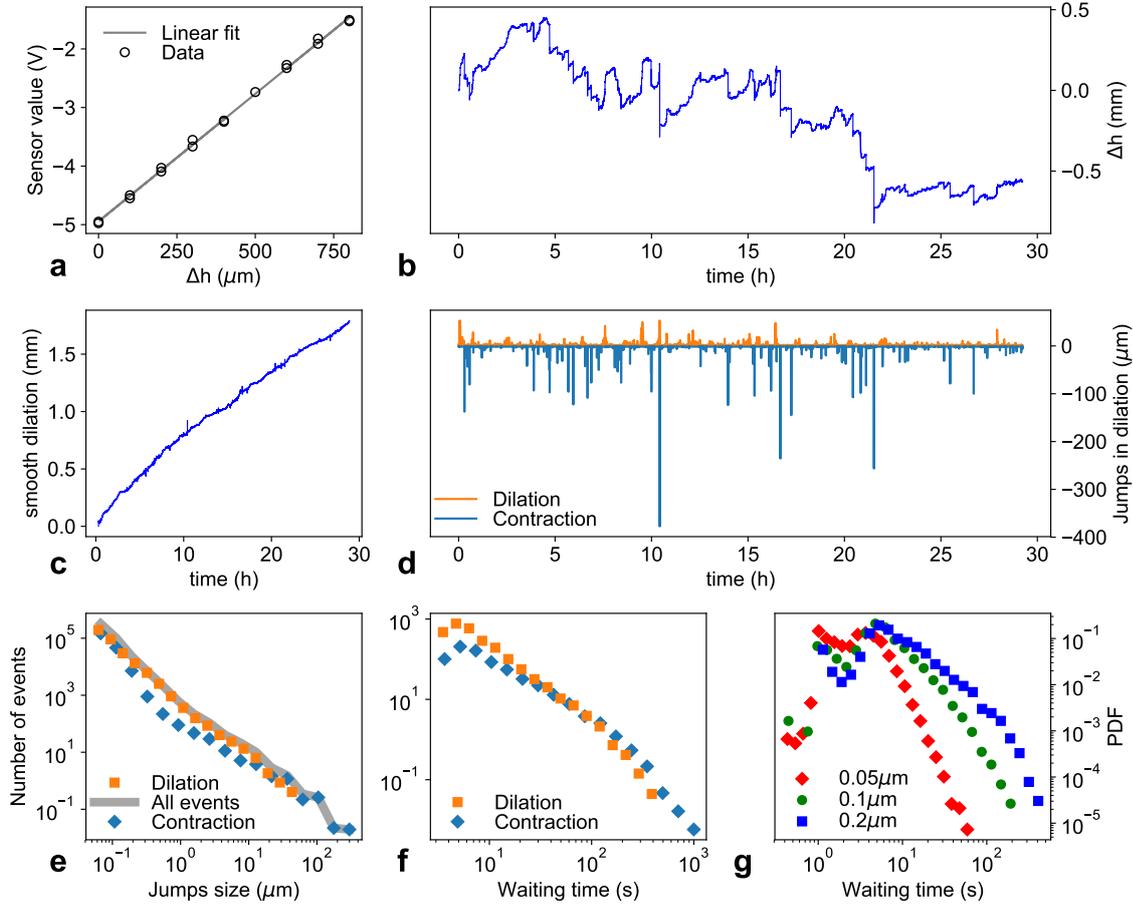


Figure 2. Statistics of Δh . (a) Calibration of the displacement sensor, resulting in linear relation with a slope $-4.4 \text{ mV}/\mu\text{m}$. (b) Time series of Δh . (c) Time series of the smooth part of Δh . (d) Time series of the “jumps” part of Δh showing the contraction events (negative values) and the dilation events (positive ones). (e) Distribution of the jumps size for the contraction events, the dilation events and all jumps together. (f) Distribution of the waiting time between jumps for contraction and dilation events, considering a size threshold of $0.1 \mu\text{m}$. (g) Distribution of the waiting time between all jumps considering different threshold values.

3 Statistics of the relative distance between the plates Δh

After a calibration of the displacement sensor (Fig. 2(a)), the time series of Δh are presented in Fig. 2(b). There is a transition period of around three hours where the granular packing suffers a global dilation, followed by different step-like zones with a global tendency to slowly decrease the packing fraction. However, the nature of the dynamics is more complex and we can separate the signal into the addition of two parts. The first part consists of a “smooth” dilation of the system during the whole experiment (Fig. 2(c)). This dilation is faster in the transition period (≈ 0.1 mm/h) and it seems to converge to a linear-like dilation with time for times larger than 10 h (with an increase rate $\Delta h/\Delta t \approx 0.05$ mm/h). The second part consists of an intermittent dynamics of abrupt jumps in Δh (Fig. 2(d)). The most important in magnitude correspond to “contraction” events. However, there is also a large number of abrupt dilation events, but with amplitudes smaller than the contraction events.

The distribution of sizes of the jumps (Fig. 2(e)) expands over three decades, and in the zone of small jumps (up to 10 μm), the dilation events are much more abundant than the contraction ones (sometimes 10 times less numerous). However, contraction events dominate the range over 40 μm , as no dilation this large are observed. The distributions of waiting time between two consecutive jumps with sizes larger than a threshold value (equal to 0.1 μm) are presented in Fig. 2(f). The distributions expand for more than two decades, from 3 s to more than 300 s for the dilation jumps and arriving to 900 s in the case of the contraction jumps. Both curves cross themselves around 100 s. This crossing point depends on the chosen threshold, moving to small time values when the size threshold is lower. The analysis of both Figs. 2(e) and (f) results in the fact that dilation jumps are smaller and more abundant than contraction ones. However, as stated earlier, the contraction jumps dominate the dynamics due to their larger size values. When all jumps are considered, both distributions of jump sizes (Fig. 2(e)) and waiting time between events (Fig. 2(g)) correspond to the maximum values of the curves containing both contraction and dilation jumps separately. The distributions of waiting times show power-law-like curves with smaller exponent values as the size threshold increases.

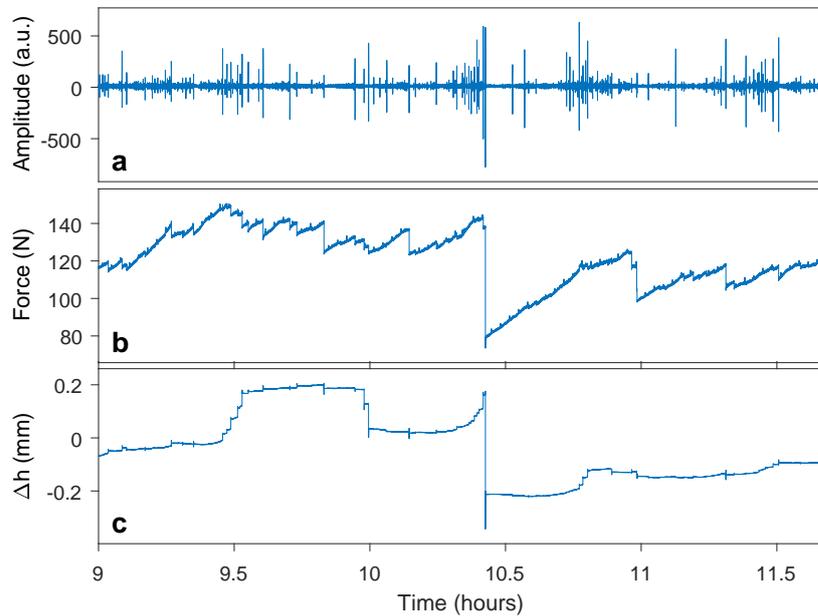


Figure 3. A time window of different measurements around the largest contraction jump: (a) Acoustic signal, (b) Force signal, (c) Δh .

4 Correlation between avalanches and Δh

The main goal of introducing the measurement of Δh is analyzing how it correlates with the “labquakes” measured in term of acoustic or mechanical (force drop) avalanches. Figure 3 shows a time window of the acoustics, force and Δh measurements around the largest contraction jump during the whole experiment, which occurred 10.426 hours after the beginning of the measurement. We can notice a good correspondance between this jump and large avalanches both in the acoustic signal and in the force one. The Δh signal shows an accelerating increase before the jump. We will introduce very preliminary results aiming at using this acceleration as a precursor of very large “labquakes”.

In order to do that we have computed the average behaviour of Δh around very large avalanches. The wavelet analysis of the acoustic signal [1] has detected more than 3×10^7 events with energies covering a range of $E_{\max}/E_{\min} \sim 5 \times 10^4$, from $E_{\min} = 209$ a.u. (arbitrary units) to $E_{\max} = 9.5 \times 10^6$ a.u. The average of Δh around the largest 44 events (corresponding to a threshold energy value of 3×10^6 a.u.) is presented in Fig. 4 (a). It shows a clear increase in the last 12 minutes before a major quake. The increase value corresponds to approximately 0.03 mm. If we compare this value with the smooth dilation during the same time period we find $0.05 \text{ mm/h} \times 12 \text{ minutes} = 0.01 \text{ mm}$, indicating that we can notice an increase of the dilation 3 times faster than the smooth dilation before very large avalanches. Fig. 4 (b) suggests that the increase associated to large events is rather exponential (compared with the linear-like shape of the smooth dilation). Similar results are obtained when the mechanical avalanches are considered (Fig. 4 (c)). However, the increase of Δh displays a linear-like behaviour.

In the latest years, GPS monitoring has reached an overwhelming submillimetric resolution during relatively long-time-period measurements of ground deformations [22]. With the hypothesis that dilation processes may work as precursor of catastrophic earthquakes, would GPS measurements be able to detect them? If we compare our shear deformation (equal to 9.77 mm during 12 minutes) with the vertical dilation (0.03 mm during 12 minutes), the latter is 325 times smaller. If we naively extrapolate these results to earthquakes, dilation deformations will be in the range of a few microns.

Acknowledgments: We thank E. Altshuler and G. Simon for their help during the mounting of the experiment, and M. Métois, T. Hatano and Y. Tanaka for interesting discussions related to GPS monitoring. We acknowledge support from the International Associated Laboratory (LIA), “Deformation, Flow and Fracture of Disordered Materials” (D-FFRACT).

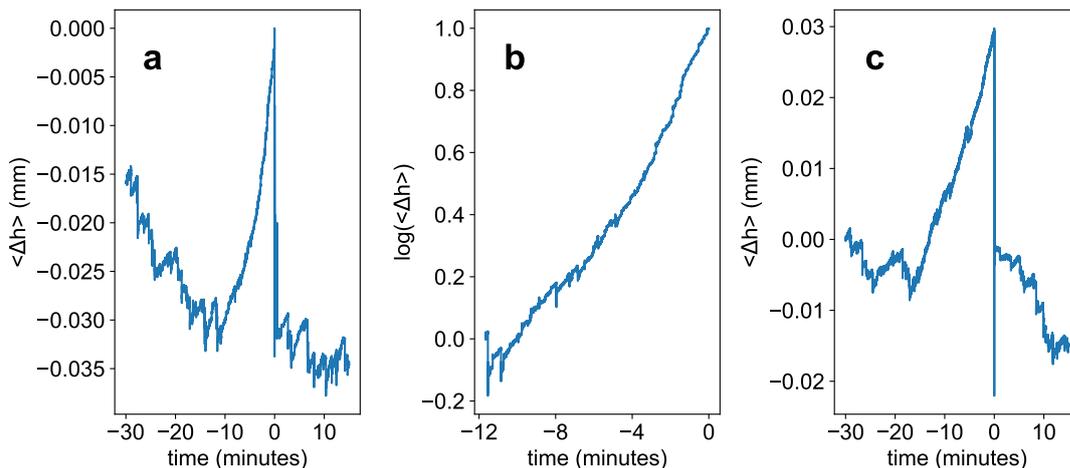


Figure 4. Correlation between avalanches and Δh . (a) Averaged of Δh around the larger 44 acoustic events. (b) The logarithm of a close-up of the previous signal suggests an exponential increase of Δh preceding very large events. (c) Averaged of Δh around the larger 84 mechanical events.

References

1. S. LHERMINIER, R. PLANET, G. SIMON, K. J. MÅLØY, L. VANEL & O. RAMOS, Continuously sheared granular matter reproduces in detail seismicity laws (submitted).
2. F. DUBOURG, S. LHERMINIER, R. PLANET, K. RAPINA, F. BUNEL, L. VANEL & O. RAMOS, The sound of avalanches: From a global to a local perspective, *Eur. Phys. J. Web of Conferences*, **140**, 03015 (2017).
3. T. HANKS & H. KANAMORI, A moment magnitude scale, *J. Geophys. Res. B Solid Earth*, **84**, 2348–2350 (1979).
4. G. L. CHOY & J. L. BOATWRIGHT, Global patterns of radiated seismic energy and apparent stress, *J. Geophys. Res. B Solid Earth*, **100**, 18205–18228 (1995).
5. F. OMORI, On the aftershocks of earthquakes, *J. Coll. Sci. Imp. Univ. Tokyo*, **7**, 111–200 (1894).
6. A. CORRAL, Long-term clustering, scaling, and universality in the temporal occurrence of earthquakes, *Phys. Rev. Lett.*, **92**, 108501 (2004).
7. O. RAMOS, E. ALTSHULER & K. J. MÅLØY, Avalanche prediction in a self-organized pile of beads, *Phys. Rev. Lett.*, **102**, 078701 (2009).
8. D. R. SCOTT, Seismicity and stress rotation in a granular model of the brittle crust, *Nature*, **381**, 592–595 (1996).
9. C. MARONE, Laboratory-derived friction laws and their application to seismic faulting, *Annu. Rev. Earth Planet. Sci.*, **26**, 643–696 (1998).
10. P. A. JOHNSON, H. SAVAGE, M. KNUTH, J. GOMBERG & C. MARONE, Effects of acoustic waves on stick-slip in granular media and implications for earthquakes, *Nature*, **451**, 57–60 (2008).
11. K. E. DANIELS & N. W. HAYMAN, Force chains in seismogenic faults visualized with photoelastic granular shear experiments, *J. Geophys. Res. Solid Earth*, **113**, 2156–2202 (2008).
12. S. LHERMINIER, R. PLANET, G. SIMON, K. J. MÅLØY, L. VANEL & O. RAMOS, Continuously sheared granular matter reproduces in detail seismicity laws, *Rev. Cub. Fis.*, **33**, 55 (2016).
13. H. KAWAMURA, T. HATANO, N. KATO, S. BISWAS & B. K. CHAKRABARTI, Statistical physics of fracture, friction, and earthquakes, *Rev. Mod. Phys.*, **84**, 839–884 (2012).
14. R. H. SIBSON, Fault rocks and fault mechanisms, *J. Geol. Soc.*, **133**, 191–213 (1977).
15. O. REYNOLDS, LVII. On the dilatancy of media composed of rigid particles in contact, with experimental illustrations, *Philos. Mag.*, **20**, 469–481 (1885).
16. T. S. MAJUMDAR, M. SPERL, S. LUDING & R. P. BEHRINGER, Jamming transition in granular systems, *Phys. Rev. Lett.*, **98**, 058001 (2007).
17. C. JOSSE RAND, A. V. TKACHENKO, D. M. MUETH & H. M. JAEGER, Memory effects in granular materials, *Phys. Rev. Lett.*, **85**, 3632–3635 (2000).
18. M. WYART, L. E. SILBERT, S. R. NAGEL & T. A. WITTEN, Effects of compression on the vibrational modes of marginally jammed solids, *Phys. Rev. E*, **72**, 051306 (2005).
19. C. P. GOODRICH, W. G. ELLENBROEK & A. J. LIU., Stability of jammed packings I: The rigidity length scale, *Soft Matter*, **9**, 10993–10999 (2013).
20. K. E. SIEH & R. H. JAHNS, Holocene activity of the san andreas fault at Wallace Creek, California, *Geol. Soc. Am. Bull.*, **95**, 883–896 (1984).
21. S. LHERMINIER, R. PLANET, G. SIMON, L. VANEL & O. RAMOS, Revealing the structure of a granular medium through ballistic sound propagation, *Phys. Rev. Lett.*, **113**, 098001 (2014).
22. M. MÉTOIS, N. D’AGOSTINO, A. AVALLONE, N. CHAMOT-ROOKE, A. RABAUTE, L. DUNI, N. KUKA, R. KOCI, & I. GEORGIEV, Insights on continental collisional processes from GPS data: Dynamics of the peri-Adriatic belts, *J. Geophys. Res. Solid Earth*, **120**, 8701–8719 (2015).

Simulation d'un modèle à dérivée fractionnaire décrivant l'activité électrique des cellules β du pancréas

Saverio Morfu¹, Bertrand Bodo² & Alain Mvogo²

¹ Le2i FRE2005, CNRS, Arts et Métiers, Univ. Bourgogne Franche-Comté F-21000 Dijon, France

² Laboratory of Electronics, Department of Physics, University of Yaounde I, P.O. Box 812, Cameroon
smorfu@u-bourgogne.fr

Résumé. Dans cette communication, nous rappelons tout d'abord les différents régimes de fonctionnement du modèle de Pernarowski. Ce dernier permet de décrire l'activité électrique des cellules β du pancréas. Par la suite, nous définissons le modèle à dérivées fractionnaires. En particulier, le schéma d'intégration numérique choisi pour résoudre le système d'équations à dérivée fractionnaire est intégralement présenté. Notre analyse montre qu'avec ce modèle fractionnaire, l'activité électrique peut être contrôlée par l'ordre des dérivées fractionnaires; ce qui pourrait rendre compte de certains dysfonctionnements dans la sécrétion de l'insuline par les cellules β du pancréas.

Abstract. In this communication, we briefly recall the behavior of the Pernarowski system which can describe the electrical activity of pancreatic β -cell. We then introduce fractional order derivatives to enlarge the behavior of this model. We first detail the numerical procedure used to perform our analysis. We specifically highlight the control of the spike firing by the order of the fractional derivatives. In the context of blood glucose regulation, this control could account for dysfunction in the release of insulin by the pancreatic β -cells.

1 Introduction

Bien que le concept d'analyse fractionnaire soit largement établi maintenant, ce n'est que récemment que ses applications dans les domaines de la physique et des sciences de l'ingénieur commencent à vraiment voir le jour. Parmi les domaines où ce dernier semble trouver un intérêt grandissant se trouve celui de la modélisation de l'excitabilité des systèmes biologiques [1]. En effet, dans ce domaine, un certain nombre de modèles ont été établis avec des dérivées entières comme les modèles de FitzHugh–Nagumo [2] et de Hindmarsh–Rose [3] décrivant le comportement des systèmes neuronaux. On peut également citer le modèle de Pernarowski qui rend compte de l'activité électrique des cellules β du pancréas [4, 5]. Bien qu'un nombre impressionnant de comportements ont pu être établis avec ces modèles à dérivées entières [6–8], une richesse encore plus grande de dynamiques peut être obtenue avec des modèles incluant des dérivées d'ordre fractionnaire. Le principal intérêt réside donc dans une meilleure modélisation des systèmes biologiques par la prise en compte de dérivées d'ordre fractionnaire. Dans cette communication, nous simulons l'activité électrique des cellules β du pancréas à l'aide du modèle à 3 dimensions de Pernarowski [4, 5]. Nous rappelons brièvement que le modèle classique à base de dérivées entières permet de décrire des cellules inactives, de décrire des cellules actives qui produisent des potentiels d'action de façon périodique ou par rafale entrecoupée d'une durée d'inactivité. Nous introduisons alors le modèle à dérivées fractionnaires pour lequel il est possible d'observer des comportements qui pourraient rendre compte de certains dysfonctionnements de la régulation de l'insuline par les cellules β du pancréas [9].

2 Le modèle classique de Pernarowski

Le modèle de Pernarowski comprend 3 variables x , y et z qui décrivent respectivement, le potentiel transmembranaire, le paramètre d'activation des canaux des ions potassium ainsi que la concentration des agents régulant l'activité électrique telle que la concentrations en Ca^{2+} [4, 5]. Cette dernière est directement liée à la libération, par les cellules β du pancréas, de l'insuline qui régule le glucose sanguin.

Ce modèle à 3 dimensions comporte 2 premières équations constituant un premier sous-système qualifié de rapide et une dernière équation constituant le second sous-système qualifié de lent. Le système à 3 dimensions s'exprime sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x) - y - z, \\ \frac{dy}{dt} &= x^3 + f(x) - 3x - y - 3, \quad \text{avec } f(x) = \frac{-a}{3}x^3 + a\mu x^2 + [1 - a(\mu^2 - \eta^2)]x, \\ \frac{dz}{dt} &= \varepsilon(\beta(x - u_\beta) - z), \end{aligned} \quad (1)$$

Les paramètres physiologiques du modèle sont fixés aux valeurs suivantes [4,5]

$$a = \frac{1}{4}, \quad \mu = \frac{3}{2}, \quad \beta = 4, \quad \varepsilon = 0,0025,$$

tandis que les conditions initiales sont

$$x(t=0) = -1,345, \quad y(t=0) = 0 \quad \text{et} \quad z(t=0) = 1,4.$$

Ce modèle peut ainsi être intégré avec des méthodes numériques classiques, comme par exemple, une méthode de Runge-Kutta du 4^e ordre de pas d'intégration $\Delta t = 10^{-2}$.

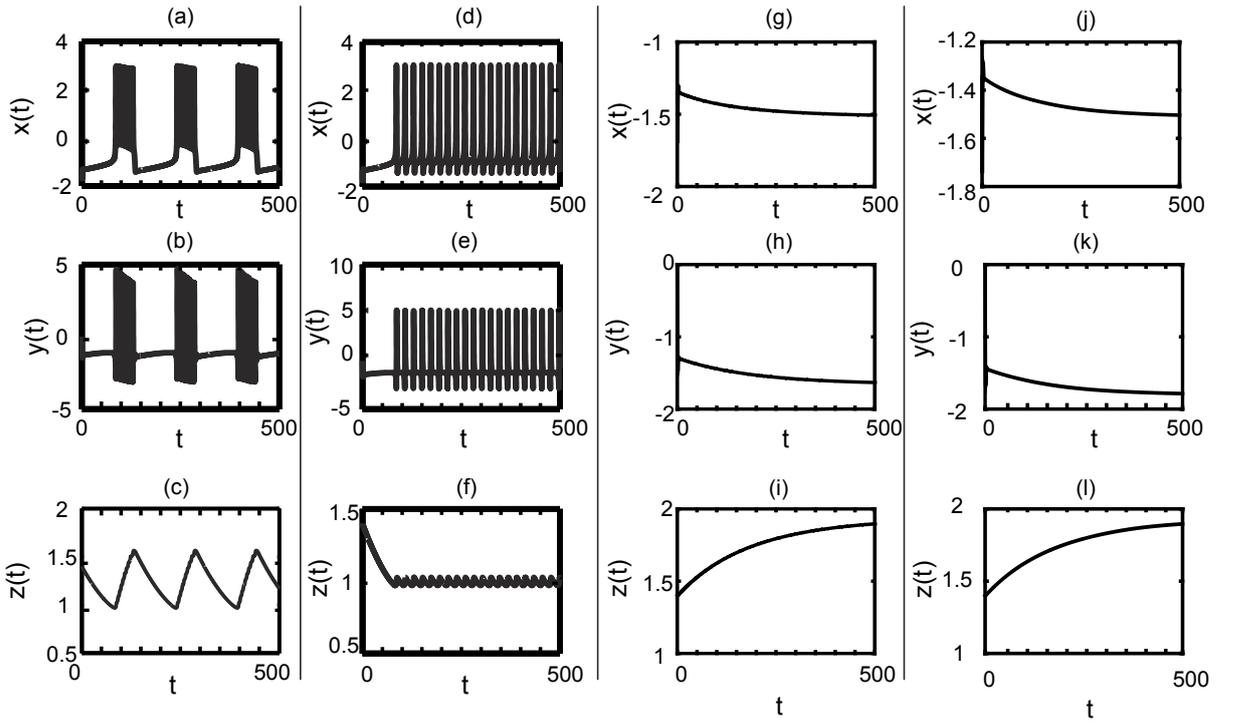


FIGURE 1. Évolution du potentiel transmembranaire x , de l'activité des canaux ioniques potassium y et de la concentration en Ca^{2+} z , pour une cellule avec une activité du type *burst* (a)–(c), pour une cellule produisant continûment des potentiels d'action (d)–(f) et pour une cellule inactive (g)–(l). Paramètres : $a = 1/4$, $\beta = 4$, $\varepsilon = 0,0025$, $\mu = \frac{3}{2}$ et $\eta = \frac{3}{4}$. (a)–(c) cellule active type *burst* pour $u_\beta = -0,954$ et $\eta = \frac{3}{4}$. (d)–(f) Cellule β produisant continûment des potentiels d'action pour $u_\beta = -0,954$ et $\eta = 1$. (g)–(i) Cellule inactive pour $u_\beta = -2$ et $\eta = \frac{3}{4}$. (j)–(l) Cellule inactive pour $u_\beta = -2$ et $\eta = 1$.

Selon les valeurs des paramètres η et u_β , différents comportements du modèle de Pernarowski peuvent être observés. La figure 1 rassemble ces comportements pour 2 valeurs de chacun des paramètres η et u_β , soient $\eta = \frac{3}{4}$, $\eta = 1$ et $u_\beta = -0,954$, $u_\beta = -2$.

Ces valeurs de η et u_β permettent de modéliser :

- des cellules actives du type *bursting*, c'est-à-dire produisant des potentiels d'action par rafale entrecoupée de temps de repos pour $u_\beta = -0,954$ et $\eta = \frac{3}{4}$;
- des cellules produisant de façon continue des potentiels d'action pour $u_\beta = -0,954$ et $\eta = 1$;
- des cellules inactives, c'est-à-dire ne produisant aucun potentiel d'action pour $u_\beta = -2$ que ce soit pour $\eta = 1$ ou $\eta = \frac{3}{4}$.

Analysons le comportement du système (1) pour une cellule active de type *bursting* ($u_\beta = -0,954$ et $\eta = \frac{3}{4}$). Lorsque la concentration z en Ca^{2+} liée au glucose dans le sang augmente, le potentiel transmembranaire x ainsi que l'activation y des canaux ioniques du type potassium entrent en phase active en produisant des potentiels d'action. Il s'ensuit une phase d'inactivité quand la concentration z en Ca^{2+} vient à décroître (Fig. 1 (d)–(f)). On obtient ainsi un comportement de type *bursting*, c'est-à-dire d'alternance entre des phases générant des potentiels d'action et des phases d'inactivité dont la durée est fortement liée à la régulation du glucose [10, 11]. Si maintenant, on augmente η à 1 et on conserve $u_\beta = -0,954$, on obtient une production ininterrompue de potentiels d'action, caractéristique de cellules du pancréas isolées ou de cellules regroupées en petits groupes (Fig. 1 (d)–(f)). Enfin, si le paramètre $u_\beta = -2$, quelle que soit la valeur de η considérée, après un régime transitoire le système évolue vers un état stable (Fig. 1 (g)–(l)), ce qui traduit des cellules β inactives.

3 Le modèle de Pernarowski à dérivées fractionnaires

Il s'agit d'introduire dans le modèle (1) des dérivées $\frac{d^{q_i}}{dt^{q_i}}$ (avec $i = 1, 2, 3$) qui constituent un ordre fractionnaire de l'opérateur dérivée temporelle $\frac{d}{dt}$ avec $0 < q_i < 1$. Le système s'écrit ainsi dans sa forme fractionnaire

$$\begin{aligned} \frac{d^{q_1} x}{dt^{q_1}} &= f(x) - y - z, \\ \frac{d^{q_2} y}{dt^{q_2}} &= x^3 + f(x) - 3x - y - 3, \\ \frac{d^{q_3} z}{dt^{q_3}} &= \varepsilon(\beta(x - u_\beta) - z). \end{aligned} \quad (2)$$

3.1 Schéma d'intégration numérique du modèle fractionnaire

Plusieurs schémas d'intégration existent, nous proposons d'utiliser une méthode du type prédicteur-correcteur qui constitue un bon compromis entre temps de calcul et précision [12, 13]. Plus précisément, en prenant un pas d'intégration Δt , nous déclinons la méthode d'Adams–Bashforth–Moulton (ABM) suivante :

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_0 + \frac{(\Delta t)^{q_1}}{\Gamma(q_1 + 2)} \left\{ [f(x_{n+1}^p) - y_{n+1}^p - z_{n+1}^p] + \sum_{j=0}^n a_{1j,n+1} \times [f(x_j) - y_j - z_j] \right\}, \\ y_{n+1} &= y_0 + \frac{(\Delta t)^{q_2}}{\Gamma(q_2 + 2)} \left\{ [(x_{n+1}^p)^3 + f(x_{n+1}^p) - 3x_{n+1}^p - y_{n+1}^p - 3] \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=0}^n a_{2j,n+1} \times [x_j^3 + f(x_j) - 3x_j - y_j - 3] \right\}, \\ z_{n+1} &= z_0 + \frac{(\Delta t)^{q_3}}{\Gamma(q_3 + 2)} \left\{ [\varepsilon\beta x_{n+1}^p - \varepsilon z_{n+1}^p - \varepsilon\beta u_\beta] + \sum_{j=0}^n a_{3j,n+1} \times [\varepsilon\beta x_j - \varepsilon z_j - \varepsilon\beta u_\beta] \right\}, \end{aligned} \quad (3)$$

où les coefficients $a_{1j,n+1}$, $a_{2j,n+1}$ et $a_{3j,n+1}$ correspondent à

$$\begin{aligned}
 a_{1j,n+1} &= \begin{cases} n^{q_1+1} - (n - q_1)(n + 1)^{q_1}, & j = 0, \\ (n + 2 - j)^{q_1+1} + (n - j)^{q_1+1} - 2(n - j + 1)^{q_1+1}, & 1 \leq j \leq n, \end{cases} \\
 a_{2j,n+1} &= \begin{cases} n^{q_2+1} - (n - q_2)(n + 1)^{q_2}, & j = 0, \\ (n + 2 - j)^{q_2+1} + (n - j)^{q_2+1} - 2(n - j + 1)^{q_2+1}, & 1 \leq j \leq n, \end{cases} \\
 a_{3j,n+1} &= \begin{cases} n^{q_3+1} - (n - q_3)(n + 1)^{q_3}, & j = 0, \\ (n + 2 - j)^{q_3+1} + (n - j)^{q_3+1} - 2(n - j + 1)^{q_3+1}, & 1 \leq j \leq n. \end{cases}
 \end{aligned} \tag{4}$$

De plus, dans l'équation (3), la fonction Gamma correspond à $\Gamma(u) = \int_0^{+\infty} x^{u-1} e^{-x} dx$, tandis que les prédicteurs x_{n+1}^p , y_{n+1}^p et z_{n+1}^p à l'itération temporelle $n + 1$ sont définis par :

$$\begin{aligned}
 x_{n+1}^p &= x_0 + \frac{1}{\Gamma(q_1)} \sum_{j=0}^n b_{1j,n+1} \times [f(x_j) - y_j - z_j], \\
 y_{n+1}^p &= y_0 + \frac{1}{\Gamma(q_2)} \sum_{j=0}^n b_{2j,n+1} \times [x_j^3 + f(x_j) - 3x_j - y_j - 3], \\
 z_{n+1}^p &= z_0 + \frac{1}{\Gamma(q_3)} \sum_{j=0}^n b_{3j,n+1} \times [\varepsilon\beta x_j - \varepsilon z_j - \varepsilon\beta u_\beta],
 \end{aligned} \tag{5}$$

où les coefficients $b_{1j,n+1}$, $b_{2j,n+1}$ et $b_{3j,n+1}$ s'expriment sous la forme :

$$\begin{aligned}
 b_{1j,n+1} &= \frac{(\Delta t)^{q_1}}{q_1} [(n + 1 - j)^{q_1} - (n - j)^{q_1}], & 0 \leq j \leq n, \\
 b_{2j,n+1} &= \frac{(\Delta t)^{q_2}}{q_2} [(n + 1 - j)^{q_2} - (n - j)^{q_2}], & 0 \leq j \leq n, \\
 b_{3j,n+1} &= \frac{(\Delta t)^{q_3}}{q_3} [(n + 1 - j)^{q_3} - (n - j)^{q_3}], & 0 \leq j \leq n.
 \end{aligned} \tag{6}$$

Dans ce qui suit, les paramètres du système demeurent inchangés $a = \frac{1}{4}$, $\beta = 4$, $\varepsilon = 0,0025$, $\mu = \frac{3}{2}$, $\eta = 1$ et $u_\beta = -0,954$. Ces paramètres sont ceux pour lesquels le système à ordre entier ($q_1 = q_2 = q_3 = 1$) produit de façon continue des potentiels d'action, comme c'est le cas à la figure 1 (d).

3.2 Influence de l'ordre fractionnaire du sous-système rapide

L'ordre fractionnaire q_3 du sous-système lent est pris égale à 1, tandis que l'ordre du système rapide sera variable avec, cependant, $q_1 = q_2$. La figure 2 montre que l'ordre fractionnaire du système rapide change le fonctionnement du système. En effet, à l'ordre entier ($q_1 = q_2 = q_3 = 1$) le système produisait des potentiels d'action de façon continue (Fig. 1 (d)) tandis que si les ordres q_2 et q_3 sont pris fractionnaires, les potentiels d'action sont produits par rafale (*burst*). De plus $q_3 = q_2$ permet d'ajuster le nombre de potentiels d'action produit pendant les phases actives du potentiel transmembranaire $x(t)$. En effet, en partant de $q_1 = q_2 = 0,989$ où des rafales de deux potentiels d'action sont produites, un nouveau potentiel d'action est ajouté à chaque fois que l'ordre fractionnaire $q_1 = q_2$ diminue d'un ordre du millièème.

3.3 Influence de l'ordre fractionnaire du sous-système lent

Cette fois-ci, c'est le sous-système lent dont l'ordre fractionnaire q_3 va varier tandis que les ordres du sous-système rapide $q_1 = q_2$ vont rester constants et entiers soit $q_1 = q_2 = 1$. On se place dans

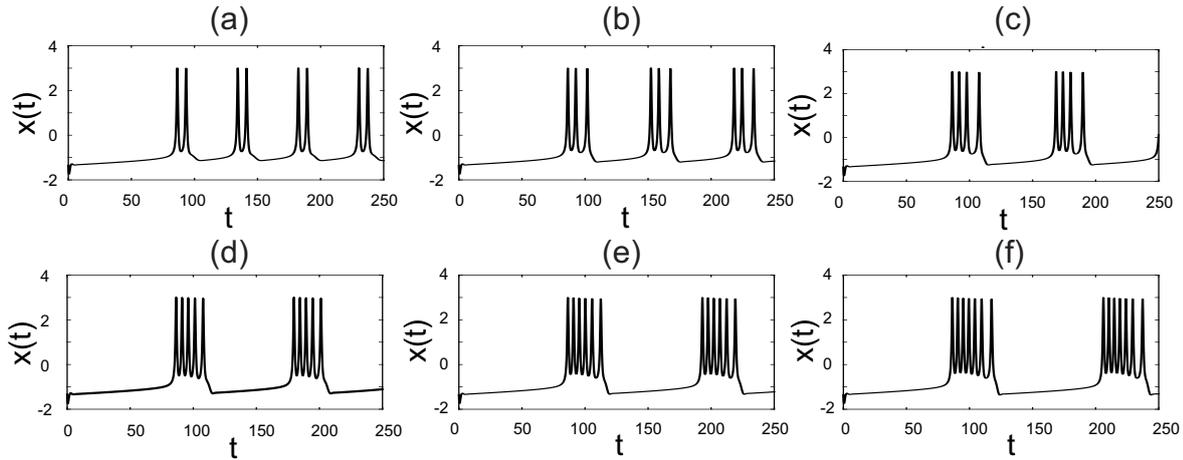


FIGURE 2. Contrôle du nombre de potentiels d'action produit par *burst* à l'aide de l'ordre fractionnaire du sous-système rapide. Le potentiel transmembranaire $x(t)$ est constitué de phase active comportant 2 potentiels d'action pour (a) $q_1 = q_2 = 0,989$; 3 potentiels d'action pour (b) $q_1 = q_2 = 0,9887$; 4 potentiels d'action pour (c) $q_1 = q_2 = 0,988$; 5 potentiels d'action pour (d) $q_1 = q_2 = 0,987$; 6 potentiels d'action pour (e) $q_1 = q_2 = 0,9865$; 7 potentiels d'action pour (f) $q_1 = q_2 = 0,986$. Les autres paramètres sont $a = \frac{1}{4}$, $\beta = 4$, $\varepsilon = 0,0025$, $u_\beta = -0,954$, $\eta = 1$, $\mu = \frac{3}{2}$ et $q_3 = 1$.

le cas de figure où le système déclenche des potentiels d'action de façon continue, comme c'est le cas à la figure 1(d). La figure 3 rassemble les résultats de simulation obtenus quand l'ordre q_3 est tel que $0,72 < q_3 < 0,99$. En fait, dans le cas où la glycémie est importante, le potentiel transmembranaire des cellules β est une succession continue de potentiel d'action qui permet d'aboutir à régulation du glucose sanguin. La figure 3 (a₁), obtenue pour $q_3 = 0,9$, montre une activité électrique constituée de 15 potentiels d'action pendant la durée d'observation de la simulation. La Fig. 3 (a₂), montre que pour un ordre plus faible, $q_3 = 0,75$, l'activité électrique se réduit à 4 potentiels d'action pour la même durée d'observation.

Par ailleurs, si q_3 est diminué jusqu'à 0,72, la figure 3 (a₃) ne laisse plus apparaître qu'un seul potentiel d'action. L'activité électrique peut donc être régulée par l'ordre fractionnaire q_3 dont la diminution entraîne un délai de réponse plus important et une activité électrique moins soutenue. La figure 3 (b) montre l'évolution de la concentration $z(t)$ en ions calcium pour $q_3 = 0,9$ et $q_3 = 0,72$. On voit que malgré la présence d'insuline, liée à la concentration z d'ion calcium, on peut simuler un dysfonctionnement de

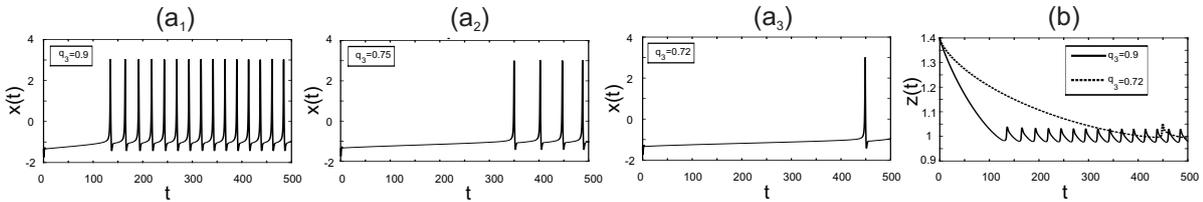


FIGURE 3. Contrôle du déclenchement et de l'activité électrique à l'aide de l'ordre fractionnaire q_3 du sous-système lent. Le potentiel transmembranaire $x(t)$ produit 15 potentiels d'action pour $q_3 = 0,9$ (a₁), 4 potentiels d'action pour $q_3 = 0,75$ (a₂) et un potentiel d'action pour $q_3 = 0,72$ (a₃). La concentration en Ca^{2+} $z(t)$ pour $q_3 = 0,9$ et $q_3 = 0,72$ est précisé à la sous-figure (b). Les autres paramètres sont $a = \frac{1}{4}$, $\beta = 4$, $\varepsilon = 0,0025$, $u_\beta = -0,954$, $\eta = 1$ et $q_1 = q_2 = 1$.

l'activité électrique. Le modèle fractionnaire peut ainsi traduire un dysfonctionnement qui peut être observé dans certains problèmes de diabète.

4 Conclusion

Dans cette communication, nous avons étudié le modèle de Pernarowski qui permet de décrire l'activité électrique des cellules β du pancréas. Plus précisément, nous avons analysé le comportement du modèle fractionnaire de Pernarowski afin de mettre en évidence l'effet de l'ordre fractionnaire sur la dynamique du système. Il est apparu notamment que l'ordre fractionnaire permettait de contrôler l'activité électrique du potentiel transmembranaire. Nous avons restreint notre étude à l'activité électrique d'une cellule isolée, il serait maintenant intéressant d'analyser le comportement de cellules couplées.

Références

1. D. JUN, Z. GUANG-JUN, X. YONG, Y. HONG & W. JUE, Dynamic behavior analysis of fractional-order Hindmarsh–Rose neuronal model, *Cogn. Neurodyn.*, **8**, 167–175 (2014).
2. R. FITZHUGH, Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane, *Biophys. J.*, **1**, 445–466 (1961).
3. J. L. HINDMARSH & R. M. ROSE, A model of neuronal bursting using three coupled first order differential equations, *Proc. R. Soc. Lond. B*, **221**, 87–102 (1984).
4. M. PERNAROWSKI, Fast subsystem bifurcations in a slowly varying Liénard system exhibiting bursting, *SIAM J. Appl. Math.*, **54**, 814–832 (1994).
5. M. PERNAROWSKI, Fast and slow subsystems for a continuum model of bursting activity in the pancreatic islet, *SIAM J. Appl. Math.*, **58**, 1667–1687 (1998).
6. S. RAJASEKAR & M. A. F. SANJUAN, *Nonlinear resonances*, Springer Series in Synergetics (2016).
7. S. MORFU & M. BORDET, On the correlation between phase-locking modes and vibrational resonance in a neuronal model, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, **55**, 277–286 (2018).
8. M. BORDET & S. MORFU, Experimental and numerical study of noise effects in a FitzHugh–Nagumo system driven by a biharmonic signal, *Chaos Solitons Fractals*, **54**, 82–89 (2013)
9. B. BODO, A. MVOGO & S. MORFU, Fractional dynamical behavior of electrical activity in a model of pancreatic β –cells, *Chaos Solitons Fractals.*, **102**, 426–432 (2017).
10. P. M. DEAN & E. K. MATTHEWS, Electrical activity in pancreatic islet cells: Effect of ions, *J. Physiol.*, **210**, 265–275 (1970).
11. T. R. CHAY & J. RINZEL, Bursting, beating, and chaos in an excitable membrane model, *Biophys. J.*, **47**, 357–366 (1985).
12. K. DIETHELM, N. J. FORD & A. D. FREED, A predictor–corrector approach for numerical solution of fractional differential equations, *Nonlinear Dyn.*, **29**, 3–22 (2002).
13. K. DIETHELM, An algorithm for numerical solution of differential equations of fractional-order, *Electron. Trans. Numer. Anal.*, **5**, 1–6 (1997).

Propriétés statistiques multi-échelles de produits satellitaires SMOS d'humidité du sol désagrégés à la résolution kilométrique

Mathis Neuhauser, Sébastien Verrier, Sylvain Mangiarotti, Olivier Merlin, Beatriz Molero & Yann Kerr

CESBIO, Université de Toulouse, CNES, CNRS, IRD, UPS, France

`mathis.neuhauser@cesbio.cnes.fr`

Résumé. Nous étudions les propriétés statistiques multi-échelles du produit satellitaire de désagrégation d'humidité du sol DisPATCh. Nous effectuons une analyse spectrale et multifractale (dans le cadre du modèle des Multifractales Universelles) de l'humidité désagrégée, de l'humidité d'origine (SMOS) et des données auxiliaires (MODIS). L'humidité désagrégée présente un comportement similaire à celui de l'humidité d'origine pour les échelles spatiales communes aux deux produits. En revanche, une évolution particulière de l'humidité désagrégée est remarquée pour les fines échelles. Le spectre de puissance et les moments statistiques semblent modifiés. Nous proposons des raisons possibles à ce comportement en deux gammes d'échelles.

Abstract. We study multi-scale statistical properties of disaggregated satellite soil moisture product DisPATCh. We apply spectral and multifractal analysis (in the framework of Universal Multifractal) to disaggregated soil moisture, original SMOS soil moisture, and MODIS auxiliary data. Disaggregated soil moisture shows a behavior similar to that of the original soil moisture for space scale common to both products. However, a specific evolution of disaggregated soil moisture is noticed for small scales. Power spectrum and statistical moments seem to be modified. We propose some possible reasons to this “two scale ranges” behavior.

1 Introduction

L'humidité du sol est une variable géophysique qui intervient sur une large gamme d'échelles spatiales. Elle a une influence sur les grandes échelles continentales, avec un impact direct sur le climat, et sur des échelles plus petites telles que les bassins versants ou les parcelles agricoles. Les modèles climatiques actuels ne prennent pas en compte la variabilité multi-échelle de l'humidité du sol. Cela est dû en partie aux techniques de mesures qui se limitent à une gamme d'échelle restreinte. En effet, la plupart des satellites dédiés à la mesure de l'humidité du sol offrent une résolution spatiale supérieure au kilomètre. Par exemple, le satellite SMOS (*Soil Moisture and Ocean Salinity* [1]) permet un suivi global avec une résolution spatiale de 40 km. Cependant, une grande partie des applications hydro-agricoles nécessitent d'avoir une information à une résolution plus haute, infra-kilométrique [2]. Des algorithmes opérationnels dits de « désagrégation » ou « super-résolution » ont été développés pour résoudre ce problème en améliorant la faible résolution spatiale des données satellites. Ils consistent à combiner l'humidité du sol de basse résolution à d'autres données satellitaires de haute résolution. On peut citer par exemple la méthode proposée par la NASA au cours de la mission SMAP (*Soil Moisture Active Passive* [3]) ou encore l'algorithme DisPATCh (*Disaggregation based on Physical And Theoretical scale Change* [4, 5]). Ce dernier a été validé en comparant les produits d'humidité du sol désagrégés avec des données in-situ d'humidité du sol ramenées à 1 km de résolution. Dans cette étude, nous proposons une méthode alternative et complémentaire qui permettrait d'apporter une validation du produit en termes de comportement d'échelle. L'objectif sera d'étudier les propriétés statistiques multi-échelles de DisPATCh en appliquant le modèle des Multifractales Universelles [6].

2 Matériel et méthode

DisPATCh est un algorithme de désagrégation déterministe qui améliore la résolution spatiale de l'humidité du sol SM (*Soil Moisture*) issue du satellite SMOS jusqu'à 1 km. Les données d'humidité

sont acquises par SMOS à une résolution de 40 km, via des mesures de température de brillance émise par la surface en bande L (1,4 GHz). DisPATCh combine l'humidité SMOS avec des données satellites auxiliaires à 1 km de résolution provenant du capteur optique MODIS (*Moderate resolution Imaging Spectroradiometer*), embarqué sur deux satellites Aqua et Terra. Il s'agit de données de température de surface LST (*Land Surface Temperature*) correspondant aux émissions (rayonnements) de la surface terrestre dans l'infrarouge thermique (3–15 μm), et des données nous informant sur l'état de la végétation sous la forme d'indice NDVI (*Normalized Difference Vegetation Index*) construit à partir des réflectances de surfaces dans les longueurs d'onde rouge (0,7 μm) et proche infrarouge (0,8 μm). L'algorithme se base sur un modèle semi-empirique [7] qui estime le taux d'évaporation du sol appelé efficacité évaporative SEE (*Soil Evaporative Efficiency*) à haute résolution à partir des données LST et NDVI. L'évaporation est ensuite utilisée pour modéliser la variabilité spatiale de l'humidité du sol à l'intérieur des pixels SMOS (Fig. 1). Le travail ici va résider dans l'analyse spectrale et multifractale (suivant le modèle des Multifractales Universelles) de chacun des produits, afin de comparer sur un continuum d'échelles la variabilité du produit désagrégé à celle des produits d'origine SMOS et optiques. Durant cette étude, nous utiliserons des données d'humidité journalières obtenues de juin à décembre 2010, sur la partie Sud-Est de l'Australie. Plus particulièrement, les données SMOS correspondent à une surface de 2000×2000 km, les données DisPATCh (et optiques) couvrent une zone située à l'intérieur plus petite que celle de SMOS dont l'échelle correspond au bassin du Murrumbidgee (500×500 km) en Australie. Nous avons choisi l'Australie comme lieu d'étude en raison des nombreuses missions menées au cours des dernières années pour l'analyse de l'humidité du sol à partir de données terrains, aéroportées ou satellites.

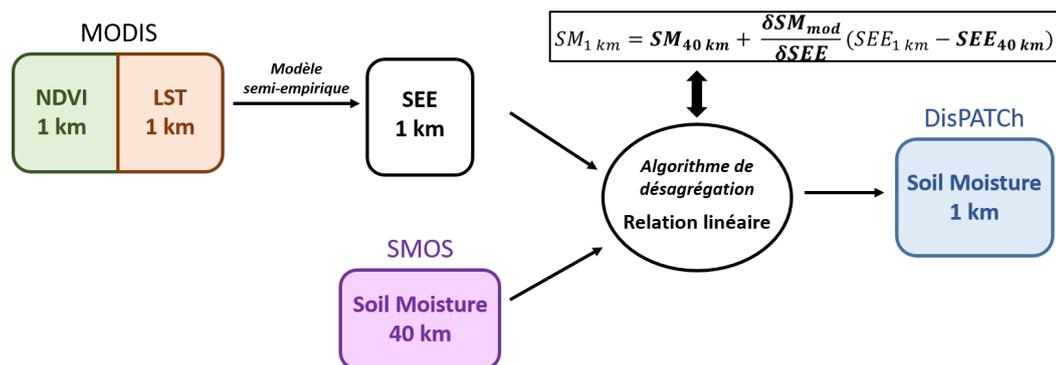


FIGURE 1. Diagramme présentant l'algorithme DisPATCh. En entrée, les données optiques à 1 km de résolution (végétation, température de surface) et l'humidité du sol SMOS à 40 km. Cette dernière est combinée à l'efficacité évaporative SEE à 1 km via l'équation décrite (les variables en gras sont à 40 km de résolution, les autres à 1 km). En sortie, l'humidité du sol obtenue est à 1 km de résolution.

Au cours du siècle dernier, des travaux basés sur l'analyse statistique ont montré qu'une grande partie des phénomènes géophysiques présentaient des lois d'invariance d'échelle ou « fractales » [6, 8]. Des outils tels que l'analyse spectrale ou l'analyse multifractale permettent de mettre en évidence ces comportements multi-échelles.

L'analyse spectrale est une méthode souvent utilisée en géophysique pour caractériser, de manière simple et rapide, et sur plusieurs échelles, certaines propriétés de produits spatialisés [9]. Elle consiste à estimer la densité spectrale de puissance, que l'on peut assimiler à une statistique d'ordre quadratique de la variable analysée. Comme le support d'étude est une image, la densité spectrale de puissance se présente sous la forme d'une variable à deux dimensions. Celle-ci est ramenée à une dimension par intégration angulaire [9, Sec. 8]. Ainsi, nous obtenons l'évolution du spectre $E(k)$ en fonction du nombre d'onde k , ce dernier étant directement lié à la résolution spatiale (inverse de l'échelle). Si la variable étudiée possède des propriétés d'invariance d'échelle, son spectre suit la loi de puissance :

$$E(k) = k^{-\beta}, \quad (1)$$

où β est la pente négative de $E(k)$ sur une représentation log–log. Cette méthode permet d'identifier la gamme d'échelles (ici les valeurs de k) où il y a des propriétés d'échelle, et ce à travers un premier exposant d'échelle β .

L'analyse multifractale approfondit et étend l'analyse spectrale en s'intéressant aux variabilités extrêmes du signal. Par comparaison à l'analyse spectrale qui ne représente l'évolution que d'un seul ordre de statistique, cette méthode analyse le comportement d'un ensemble de moments statistiques sur la gamme d'échelles étudiée. Cette technique se base sur des cascades multiplicatives, qui consistent à construire un champ (signal stochastique à deux dimensions) dit « multifractal » pour lequel sa distribution statistique à une échelle donnée est dépendante des distributions aux échelles supérieures et dont la moyenne est conservée pour chaque échelle. Tout champ Φ construit sur ce principe possède des propriétés d'invariance d'échelle. Ainsi, pour l'ensemble des résolutions λ (définies comme l'inverse de l'échelle), ses moments statistiques d'ordre q suivent une loi de puissance de la forme (avec q réel positif) :

$$\langle \Phi_\lambda^q \rangle = \lambda^{K(q)}. \quad (2)$$

La fonction d'échelle $K(q)$ caractérise le champ multifractal. Plusieurs modèles de cascade ont été développés jusqu'à présent, avec des formalismes différents. Dans cette étude, nous utiliserons celui des Multifractales Universelles [6], pour lequel $K(q)$ est modélisée par l'équation :

$$K(q) = \frac{C1}{\alpha - 1}(q^\alpha - q). \quad (3)$$

Deux paramètres dits « universels » interviennent dans cette équation : α le degré de multifractalité et $C1$ la dispersion du champ moyen.

3 Résultats

Pour ce qui est de l'analyse spectrale, si l'on s'intéresse aux spectres moyens sur toute la période d'étude qui s'étend de juin à décembre 2010 (Fig. 2(a)), nous constatons que les produits SMOS et MODIS présentent chacun une loi d'échelle sur toute la gamme d'échelle. Cela s'observe par une évolution linéaire de $\log(E(k))$ (Éq. (1)). En revanche, nous remarquons un comportement différent pour le spectre de l'humidité désagrégée. Deux gammes d'échelles semblent apparaître, avec une pente qui s'accroît pour les échelles inférieures à la dizaine de kilomètres. Nous avons appliqué à ce spectre un algorithme de segmentation [10] qui a confirmé la présence d'une brisure de pente pour $\lambda \approx 10$ km. Nous pouvons distinguer trois groupes de valeurs pour les pentes spectrales (Tableau 1) :

- $\beta \approx 1$: humidité SMOS, végétation MODIS et humidité désagrégée DisPATCh ($\lambda > 10$ km) ;
- $1 < \beta < 2$: températures de surface MODIS (pour les deux satellites Aqua et Terra) ;
- $\beta > 2$: humidité désagrégée DisPATCh ($\lambda < 10$ km).

Nous constatons à la vue des spectres moyens que l'humidité DisPATCh suit la même loi d'échelle que l'humidité SMOS pour des échelles supérieures à 10 km, mais que cette loi semble changer pour des échelles inférieures à la dizaine de kilomètres. Pour vérifier ce résultat, la même analyse spectrale a été appliquée à une date unique. La figure 2(b) représente les spectres correspondant au 8 juillet 2010. Des comportements identiques aux spectres moyens sont observés : l'humidité désagrégée présente le même comportement en deux gammes d'échelles (brisure à 10 km et pente spectrale augmentant avec la résolution), l'humidité SMOS, l'indice de végétation et la température de surface Aqua ont également les mêmes propriétés d'échelles spectrales que sur toute la période d'étude (Tableau 1). Nous remarquons un changement de pente spectrale pour la température de surface Terra (courbe jaune). Celle-ci passe de $\beta = 1,6$ pour juin–décembre à $\beta = 1,8$ pour le 8 juillet. Les satellites Aqua et Terra permettent chacun l'acquisition de données journalières à des moments différents de la journée : le matin à 10h30 pour Terra et en début d'après-midi à 13h30 pour Aqua. Il semble que pour une date précise la pente spectrale soit plus forte pour des températures de surface obtenues le matin (Terra) que pour des températures

en début d'après-midi (Aqua). Cela correspondrait au cycle diurne de la température de surface, avec une puissance du signal fine échelle plus faible le matin qu'à 13h30 (correspondant aux heures les plus chaudes de la journée). Toutefois, ce comportement journalier des températures ne paraît pas impactant pour l'humidité désagrégée (pente spectrale inchangée vis-à-vis de l'étude globale juin-décembre).

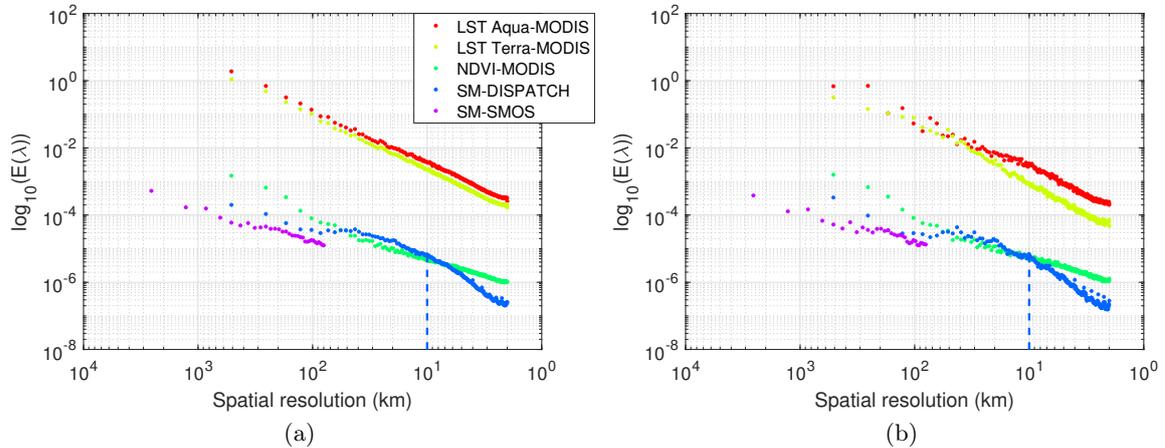


FIGURE 2. Analyse spectrale des produits intervenant dans DisPATCh : (a) Spectres de puissance moyens sur l'ensemble de la période d'étude (juin-décembre 2010) ; (b) Spectres obtenus pour le 8 juillet 2010. Chaque graphique est en représentation log-log, l'axe des abscisses a été converti en résolution spatiale λ (en km). Pour la température de surface, sont représentés les spectres pour chacun des satellites Aqua et Terra. Pour ce qui est de l'indice de végétation, seules les données issues de Terra ont été analysées.

La figure 3 présente les résultats obtenus après analyse multifractale des produits d'humidité du sol SMOS et DisPATCh sur la période juin-décembre 2010. Les moments statistiques ont été calculés pour des ordres de grandeur de 0 à 3, par pas de 0,1. En ce qui concerne l'humidité désagrégée (Fig. 3(a)), pour chacun des moments nous observons un changement de pente autour de la dizaine de kilomètres. L'humidité SMOS (Fig. 3(b)) ne présente pas de changement de pente aussi marqué. Ces résultats sont cohérents avec les deux gammes d'échelles observées par analyse spectrale. La figure 3(c) superpose trois fonctions d'échelle $K(q)$ correspondant à l'évolution des moments statistiques en fonction de l'ordre q , pour les deux gammes d'échelles de l'humidité désagrégée d'une part (échelles 1 à 10 km en rouge, et 10 à 500 km en vert) et l'humidité SMOS d'autre part (courbe violette). Pour les trois fonctions, $K(1) = 0$ est vérifié (condition d'application du modèle multifractale qui est la conservation de la moyenne pour toutes les échelles étudiées). Pour les ordres de moments supérieurs à 1, nous observons une divergence croissante entre les courbes. Les paramètres α ont des valeurs relativement proches ($\approx 1,6$) pour les deux gammes d'échelles de l'humidité désagrégée et également par comparaison à l'humidité SMOS (Tableau 1). En revanche, la valeur de $C1$ est inférieure à 0,1 pour DisPATCh (deux gammes confondues), et supérieure à 0,1 pour SMOS, ce qui traduit une plus grande dispersion des données d'humidité SMOS que celles désagrégées. Nous constatons également que les valeurs de $C1$ des produits optiques sont similaires à celles de DisPATCh ($< 0,1$). Les moments statistiques de l'humidité désagrégée semblent influencés par ceux de la température de surface et de l'indice de végétation. Cela pourrait être lié au comportement en deux gammes d'échelles de l'humidité désagrégée.

4 Discussion et perspectives

Au cours de cette étude, nous avons présenté une application du modèle des Multifractales Universelles. Cette méthode originale permet de caractériser la variabilité d'un signal physique, sur plusieurs échelles, de

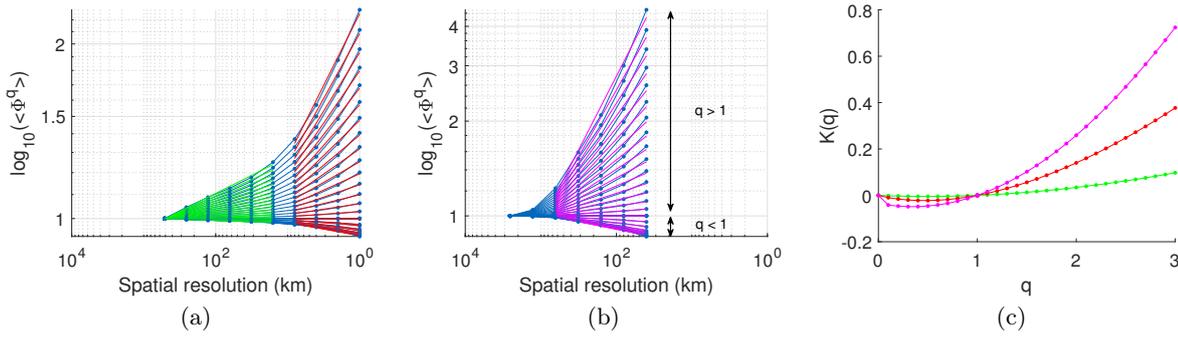


FIGURE 3. Analyse multifractale : (a) Moments statistiques de l'humidité désagrégée DisPATCH ; (b) Moments statistiques de l'humidité d'origine SMOS ; (c) Fonctions d'échelle $K(q)$ de DisPATCH (échelles 1 à 10 km en rouge, et 10 à 500 km en vert) et de SMOS (courbe violette). Chaque fonction d'échelle est obtenue à partir des régressions linéaires des moments sur les gammes d'échelles correspondantes (deux gammes pour DisPATCH et une gamme pour SMOS).

| Produits | Résolution (km) | Gamme d'échelles (km) | β | R^2 (calcul de β) | α | C1 |
|-----------------|--------------------|--------------------------|---------|-------------------------------|----------|------|
| SM-DisPATCH | 1 | [500–10] | 0,8 | 0,92 | 1,8 | 0,02 |
| | | [10–1] | 2,3 | 0,99 | 1,6 | 0,08 |
| SM-SMOS | 40 | [2000–40] | 1 | 0,97 | 1,5 | 0,16 |
| LST Aqua-MODIS | 1 | [500–1] | 1,6 | 1 | 1,9 | 0,04 |
| LST Terra-MODIS | 1 | [500– 1] | 1,6 | 1 | 2 | 0,04 |
| NDVI-MODIS | 1 | [500–1] | 1,1 | 0,98 | 1,8 | 0,03 |

TABLE 1. Paramètres d'échelle β , α et C1 pour la période juin–décembre 2010 obtenus après analyse spectrale et multifractale. Sont précisés également la résolution des produits, la gamme d'échelles étudiée ainsi que le coefficient de détermination de la régression linéaire pour le calcul de β .

manière rapide et avec un nombre de paramètres limité. La démarche que nous avons suivie est applicable à toute donnée géophysique, présente sous forme d'images satellites ou même de séries temporelles (signal à une dimension).

Notre analyse montre que le produit désagrégé (DisPATCH) présente des comportements différents suivant les gammes d'échelles considérées. Une échelle limite à une dizaine de kilomètres a été mise en évidence, séparant la variabilité de l'humidité en deux gammes d'échelles. Le comportement aux échelles supérieures à 10 km suit le comportement basse résolution mesuré par satellite (données SMOS). Aux échelles fines, le comportement d'échelle se différencie très nettement du comportement basse résolution. Plusieurs facteurs peuvent être à l'origine de ce comportement par gammes d'échelles. Cette brisure de pente pourrait être le résultat de processus différents agissant à échelle fine (processus d'évapotranspiration [11], d'infiltration, etc., localisés en surface, comportement moyenné des microclimats) et à grande échelle (comportement résultant des mouvements de convection mésoscopique). Ce comportement d'échelle aurait alors un sens physique. Le fait que les produits SMOS et DisPATCH ne soient pas superposables géographiquement pourrait également contribuer à ce changement de comportement d'échelle. En effet, la surface correspondant aux données SMOS est de 2000×2000 km, alors que celle des données désagrégées ne couvre qu'une partie plus petite (500×500 km) de cette zone. Ainsi la variabilité de l'humidité n'est pas la même pour les deux zones d'étude. Ce comportement pourrait aussi être engendré par l'algorithme de désagrégation lui-même. L'estimation de l'humidité du sol à 1 km se fait à partir

de l'efficacité évaporative du sol (SEE), elle-même calculée en combinant NDVI et LST. Or, le modèle semi-empirique utilisé pour la désagrégation s'appuie sur une formulation non linéaire entre la SEE et le NDVI. Cette non-linéarité pourrait modifier la pente spectrale de l'humidité aux fines échelles et donc laisser apparaître cette brisure au niveau du spectre et des moments statistiques. Enfin, d'un point de vue dynamique, le phénomène d'agrégation peut conduire, dans certaines conditions (en cas de synchronisation de phase des processus), à conserver certaines propriétés d'échelle [12]. Un tel comportement pourrait contribuer à expliquer le redressement de pente observé à certaines gammes d'échelle.

Plusieurs pistes sont envisageables pour approfondir ce travail. Idéalement, il faudrait vérifier l'existence du comportement en deux gammes d'échelles pour l'humidité grâce à d'autres jeux de données (aéroportées ou terrain) existantes aux échelles kilométriques et sub-kilométriques. Cela pourra se faire grâce aux données AACES (*Australian Airborne Cal/val Experiments for SMOS* [13]) et NAFE (*National Airborne Field Experiment* [14]). Pour comparer nos données satellites sur la même surface d'étude, il serait utile de relancer l'algorithme de désagrégation sur l'ensemble de la zone couverte par SMOS. Enfin, il serait utile de vérifier notre analyse à partir d'un algorithme de caractérisation indépendant et complémentaire. A ce stade, des travaux préliminaires utilisant une variante anisotrope de l'analyse multifractale [15] semblent confirmer l'évolution en deux gammes d'échelles.

Remerciements : Nous tenons à remercier le projet PNTS Crops'I Chaos (CNRS) pour ses ressources.

Références

1. Y. H. KERR *et al.*, The SMOS Mission: New tool for monitoring key elements of the global water cycle, *Proc. IEEE*, **98**, 666–687 (2010).
2. J. P. WALKER & P. R. HOUSER, Requirements of a global near-surface soil moisture satellite mission: Accuracy, repeat time, and spatial resolution, *Adv. Water Resour.*, **27**, 785–801 (2004).
3. D. ENTEKHABI *et al.*, The soil moisture active passive (SMAP) mission, *Proc. IEEE*, **98**, 704–716 (2010).
4. O. MERLIN, J. WALKER, A. CHEHBOUNI & Y. KERR, Towards deterministic downscaling of SMOS soil moisture using MODIS derived soil evaporative efficiency, *Rem. Sens. Environ.*, **112**, 3935–3946 (2008).
5. B. MOLERO *et al.*, SMOS disaggregated soil moisture product at 1 km resolution: Processor overview and first validation results, *Rem. Sens. Environ.*, **180**, 361–376 (2016).
6. D. SCHERTZER & S. LOVEJOY, Physical modeling and analysis of rain and clouds by anisotropic scaling multiplicative processes, *J. Geophys. Res. Atmos.*, **92**, 9693–9714 (1987).
7. J. NOILHAN & S. PLANTON, A simple parameterization of land surface processes for meteorological models, *Mon. Weather Rev.*, **117**, 536–549 (1989).
8. B. B. MANDELBROT, *The fractal geometry of nature/Revised and enlarged edition*, W. H. Freeman and Co., New York (1983).
9. S. LOVEJOY, A. M. TARQUIS, H. GAONAC'H & D. SCHERTZER, Single-and multiscale remote sensing techniques, multifractals, and MODIS-derived vegetation and soil moisture, *Vadose Zone J.*, **7**, 533–546 (2008).
10. J. D'ERRICO, Shape Language Modelling, <https://fr.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/24443-slm-shape-language-modeling> (16 April 2017).
11. G. G. KATUL *et al.*, On the spectrum of soil moisture from hourly to interannual scales, *Water Resour. Res.*, **43**, W05428 (2007).
12. S. MANGIAROTTI, F. LE JEAN, M. HUC & C. LETELLIER, Global modeling of aggregated and associated chaotic dynamics, *Chaos Solitons Fractals*, **83**, 82–96 (2016).
13. S. PEISCHL *et al.*, The AACES field experiments: SMOS calibration and validation across the Murrumbidgee River catchment, *Hydrol. Earth Syst. Sc.*, **16**, 1697–1708 (2012).
14. O. MERLIN, J. P. WALKER, R. PANCIERA, M. J. ESCORIHUELA & T. J. JACKSON, Assessing the SMOS soil moisture retrieval parameters with high-resolution NAFE'06 data, *IEEE Geosci. Remote Sens. Lett.*, **6**, 635–639 (2009).
15. S. LOVEJOY & D. SCHERTZER, Towards a new synthesis for atmospheric dynamics: Space–time cascades, *Atmospheric Res.*, **96**, 1–52 (2010).

Dynamique non linéaire des flammes de prémélange : description en pôles

Basile Radisson, Christophe Almarcha, Elias Al Sarraf, Joël Quinard, Emmanuel Villermaux & Bruno Denet

Aix-Marseille Université, CNRS, Centrale Marseille, IRPHÉ, UMR 7342, 13384 Marseille, France
radisson@irphe.univ-mrs.fr

Résumé. Les flammes de prémélange sont naturellement instables. Leur surface se plisse, formant des motifs cellulaires qui évoluent selon une dynamique complexe résultant d'une compétition entre effets hydrodynamiques, effets thermodiffusifs et non-linéarités géométriques. Au travers d'une expérience de laboratoire et sur la base d'un modèle d'évolution de front, nous démontrons la possibilité de décrire la dynamique de flamme par des trajectoires de pôles évoluant dans le plan complexe et nous en dégagons un processus autosimilaire qui contrôle la statistique des tailles de cellules.

Abstract. Premixed flames are intrinsically unstable. Hence, wrinkling are appearing on the front, developing cellular patterns which evolve by merging and splitting due to competition between hydrodynamics, thermo-diffusive and geometrical nonlinear effects. By means of a laboratory experiment, we show that the flame dynamics can be described by poles evolving in the complex plane. In light of this interface evolution model, we underline a mechanism to explain the self-similar properties of the flame front.

1 Introduction

Une flamme de prémélange est une interface submillimétrique séparant un mélange réactif des produits de réaction. Cette interface se propage, de proche en proche, par diffusion thermique dans tout le milieu réactif disponible. À la traversée de la flamme, la réaction de combustion est responsable d'une dilatation des gaz qui modifie les lignes de courant et rend le front de flamme instable. Par conséquent, la surface de réaction se plisse et évolue selon une dynamique complexe, fruit d'une compétition entre effets hydrodynamiques et thermodiffusifs. Ces instabilités de flammes ont été étudiées par le biais d'études asymptotiques permettant de traiter la flamme comme une discontinuité hydrodynamique grâce à l'introduction d'une longueur (longueur de Markstein) qui rend compte des phénomènes de transport qui ont lieu dans l'épaisseur de flamme [1, 2]. Grâce à cette approche, la théorie linéaire des flammes de prémélange est aujourd'hui bien comprise et les mesures expérimentales semblent concordantes (bien que peu nombreuses). En revanche, la dynamique cellulaire qui se met en place après l'apparition des premières non-linéarités est encore mal comprise. Sous l'effet de la propagation normale du front, l'évolution de l'amplitude des perturbations est rapidement saturée par la formation de cellules séparées par des crêtes (quasi-singularités régularisées par diffusion thermique). Ces crêtes évoluent selon un mécanisme de fusion pour former des cellules plus grandes. Dans des domaines de propagation de taille Λ grande devant la plus petite longueur instable $2\pi/k_c$, ce processus d'appariement de cellules est en permanence alimenté par l'apparition de nouvelles crêtes formées à partir des perturbations extérieures, amplifiées par l'instabilité hydrodynamique [3]. L'objectif de cette étude est d'apporter des éléments de compréhension sur les mécanismes qui contrôlent la taille moyenne des cellules et leur distribution. Dans un premier temps, nous présentons le dispositif expérimental utilisé. Le modèle de Michelson-Sivashinsky (MS) est ensuite introduit. Sa pertinence vis-à-vis de l'expérience modèle est alors démontrée. Enfin, son interprétation permet de dégager un processus autosimilaire qui régit la distribution de taille de cellules.

2 Dispositif expérimental

La propagation de flamme est analysée dans un brûleur de Hele-Shaw [5]. Ce dispositif est constitué de deux vitres vitrocéramiques parallèles, orientées verticalement et distantes de quelques millimètres (Fig. 1). L'enceinte est alimentée en bas, fermée sur les côtés, et ouverte en haut. L'épaisseur du brûleur étant plus petite que la plus petite longueur instable $2\pi/k_c$. L'intérêt d'un tel dispositif est de rendre la dynamique étudiée quasi-unidimensionnelle.

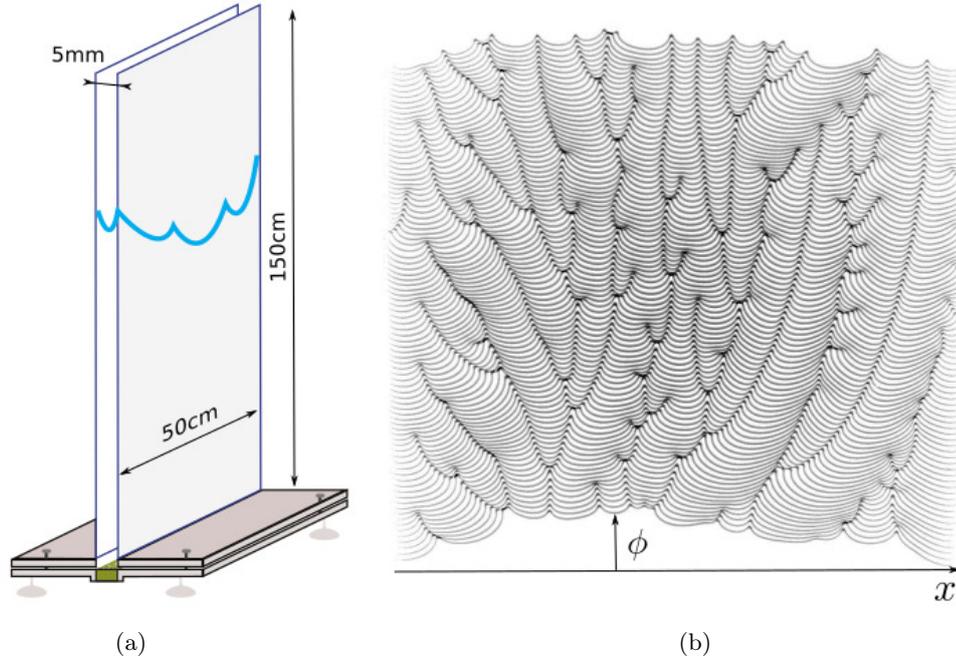


FIGURE 1. (a) Schéma du dispositif expérimental utilisé dans cette étude. (b) Superposition des fronts successifs (couleurs inversées) observés dans le brûleur. On a un intervalle de 0,016 s entre chaque front. Les trajectoires des crêtes, plus sombres, sont bien visibles.

Le brûleur est d'abord rempli d'un prémélange air/propane via une alimentation située au bas de l'enceinte. Le débit est ajusté de façon à ce que la vitesse de l'écoulement soit plus grande que la vitesse normale de propagation de la flamme. Une flamme est alors initiée sur le haut du brûleur et reste accrochée jusqu'à coupure de l'écoulement à l'aide d'une vanne située en amont du dispositif. La flamme commence alors sa propagation à l'intérieur du brûleur, se déstabilise par effet hydrodynamique, puis la dynamique cellulaire étudiée ici se met en place. On compare cette dynamique à celle décrite par le modèle de Michelson–Sivashinsky.

3 Équation de propagation du front

Obtenu à partir d'un développement asymptotique des équations du problème, le modèle de Michelson–Sivashinsky [4] permet de ramener la dynamique de flamme (écoulement réactif à densité variable) à une équation d'évolution pour la position $\phi(x, t)$ du front

$$\phi_t + \frac{u_A}{2} \phi_x^2 = \frac{4\sigma_M}{k_c} \left(\frac{\phi_{xx}}{k_c} + I(\phi, x) \right), \quad (1)$$

où les paramètres u_A , σ_M et k_c dépendent des propriétés intrinsèques de la réaction. L'opérateur linéaire non local $I(\phi, x)$ correspond à la multiplication par $|k|$ dans l'espace de Fourier. La relation de dispersion

associée s'écrit :

$$\sigma = \frac{4\sigma_M}{k_c} \left(|k| - \frac{k^2}{k_c} \right). \quad (2)$$

Le taux de croissance pour des perturbations de différentes longueurs d'ondes est mesuré dans les premiers instants par détection du front sur les images et transformée de Fourier. Cette procédure permet de déterminer la valeur des paramètres σ_M et k_c en ajustant la relation de dispersion théorique aux points de mesure (2).

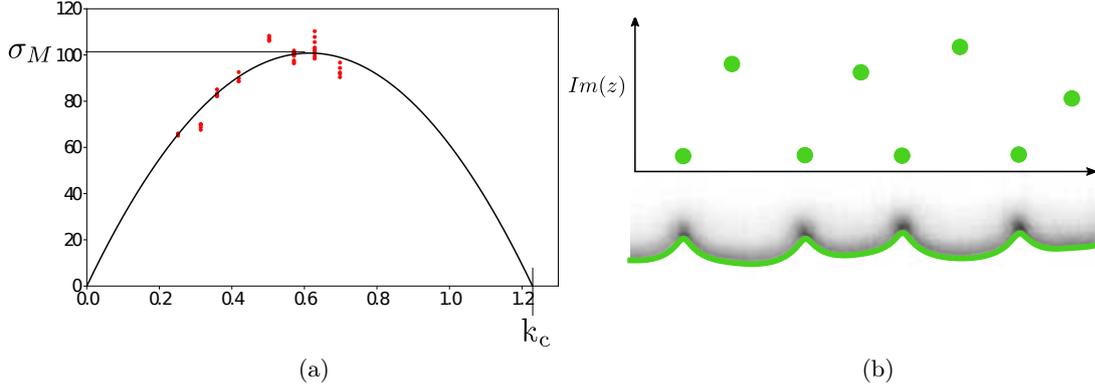


FIGURE 2. (a) Relation de dispersion associée à l'équation Michelson–Sivashinsky. Points rouges : taux de croissance mesurés en forçant différentes longueurs d'ondes. Trait noir : meilleur fit des points avec l'équation (2) qui permet de déterminer σ_M et k_c . (b) Ajustement d'un front expérimental avec (3) En noir : front issu d'une expérience. En vert : interpolation correspondant aux pôles complexes représentés au-dessus (points verts) (Seule la partie supérieure du plan complexe est représentée). Les pôles de partie imaginaire faible forment des crêtes, les autres sont responsables de l'aplatissement des cellules.

L'équation de Michelson–Sivashinsky (1) possède des solutions analytiques [6]. Dans le cas de conditions aux limites périodiques ces solutions sont de la forme

$$\phi = -A \sum_{n=1}^{2N} \ln \left(\sin \left(\frac{\pi (x - z_n)}{\Lambda} \right) \right), \quad (3)$$

avec $A = 8\sigma_M/u_A k_c^2$, Λ la largeur du domaine et N le nombre de paires de pôles z_n intervenant par paires de complexes conjugués. Chaque paire de pôles correspondant à une déformation du front autour de l'abscisse $x = \text{Re}(z_n)$, déformation d'autant plus prononcée que la partie imaginaire $\text{Im}(z_n)$ est faible ($\lim_{\text{Im}(z_n) \rightarrow 0} \phi(x = \text{Re}(z_n)) = +\infty$) (cf. Fig. 2).

La dynamique de flamme est alors réduite à un système d'équations différentielles qui décrit l'évolution de la position des pôles dans le plan complexe :

$$\dot{z}_n = \frac{4\sigma_M}{k_c} \left[\frac{2\pi}{\Lambda k_c} \sum_{p \neq n} \cot \left(\frac{\pi}{\Lambda} (z_p - z_n) \right) - i \text{sign}(\text{Im}(z_n)) \right]. \quad (4)$$

Afin de valider cette description, un jeu de solutions en pôles (3) est alors ajusté, au sens des moindres carrés, à un front expérimental par un algorithme de Levenberg–Marquardt (Fig. 2). Le système d'équations différentielles (4) est ensuite intégré à partir de cette condition initiale. L'évolution du front donnée par la dynamique de pôles est ensuite confrontée à l'expérience (Fig. 3).

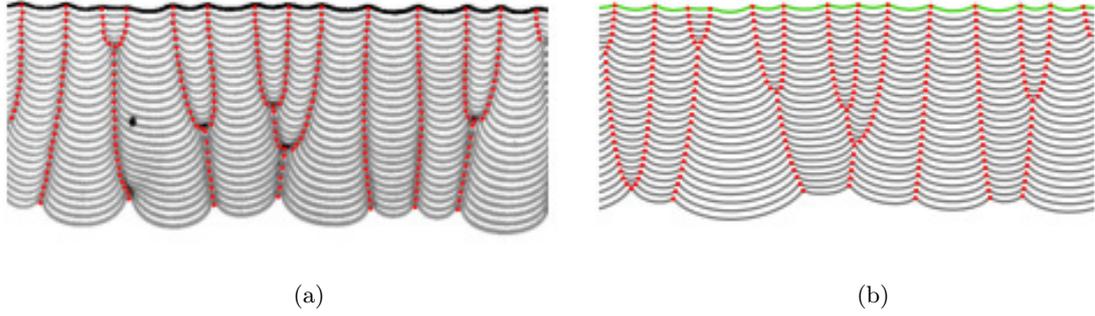


FIGURE 3. (a) Flamme air/propane de richesse égale à 0,8 se propageant dans une cellule de Hele-Shaw. Les crêtes sont repérées par des points rouges. Le front initial en noir est ajusté par un jeu de solutions en pôles (3) qui sert de condition initiale pour la figure de droite. (b) Évolution décrite par la dynamique de pôle à partir de la condition initiale issue de l'expérience.

La dynamique obtenue est en accord avec l'expérience sur une durée d'environ dix fois le temps caractéristique de l'instabilité $t_\sigma = 1/\sigma_M$. Au-delà, la sensibilité aux conditions initiales limite la comparaison. Cependant les trajectoires décrites par (4) permettent de déduire certaines propriétés statistiques du front de flamme aux temps longs.

4 Dynamique d'agrégation

Comme on peut le voir sur la figure 3, les cellules ont tendance à fusionner pour donner des cellules plus grandes. Mais comme souvent avec les phénomènes de propagation de front, les perturbations externes jouent un rôle important aux temps longs [7]. Comme le montre la figure 1, le processus d'appariement de cellules est en permanence alimenté par l'apparition de nouvelles crêtes, fruits de l'amplification de perturbations extérieures (hydrodynamiques, thermiques) ou inhérentes à la flamme (variation de la surface de flamme au cours du temps). Chaque crête étant un marqueur de la présence d'au moins une paire de pôles dans le plan complexe, l'apparition permanente de ces nouvelles cellules n'est pas compatible avec une description à nombre de pôles fixé. Cependant la dynamique élémentaire d'appariement des cellules étant bien décrite, on peut déduire certaines propriétés statistiques du front à partir de ce modèle. Sous l'effet de l'attraction des pôles, deux cellules de tailles d_1 et d_2 fusionnent pour donner une cellule de taille $d = d_1 + d_2$. En se basant sur la théorie d'agrégation de Smoluchowski, on peut montrer que la distribution d'une grandeur pour laquelle la règle d'interaction est de nature additive est de type loi Gamma [8]

$$p\left(x = \frac{l}{\langle l \rangle}\right) = \frac{\nu^\nu}{\Gamma(\nu)} x^{\nu-1} e^{-\nu x}. \quad (5)$$

De plus, on peut montrer que l'unique paramètre ν qui contrôle la largeur de la distribution dépend de la dynamique d'agrégation élémentaire de deux cellules. En considérant deux crêtes isolées, c'est-à-dire deux paires de pôles complexes conjugués assez proches l'une de l'autre pour ne pas ressentir l'effet d'interaction avec d'autres pôles, on peut déterminer un temps typique d'agrégation par résolution de ce problème à deux corps $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$.

On se place dans la limite où les deux pôles conjugués sont sur l'axe réel $z_1 = z_1^* = a_1$ et $z_2 = z_2^* = a_2$, le système d'équations (4) devient

$$\begin{cases} \frac{\partial a_1}{\partial t} = K \cot\left(\frac{\pi(a_2 - a_1)}{\Lambda}\right), \\ \frac{\partial a_2}{\partial t} = K \cot\left(\frac{\pi(a_2 - a_1)}{\Lambda}\right), \end{cases}$$

avec $K = \frac{16\sigma_M\pi}{\Lambda k_c^2}$. Soit $d = a_2 - a_1$ la distance entre les deux pôles, on a donc dans la limite d faible :

$$d^2(t) = d_0^2 - \frac{64\sigma_M}{k_c^2}t.$$

Le carré de la distance entre deux crêtes décroît donc linéairement avec le temps. Cette limite théorique est vérifiée expérimentalement en mesurant l'évolution de la distance entre deux crêtes pendant une fusion de cellules (Fig. 4).

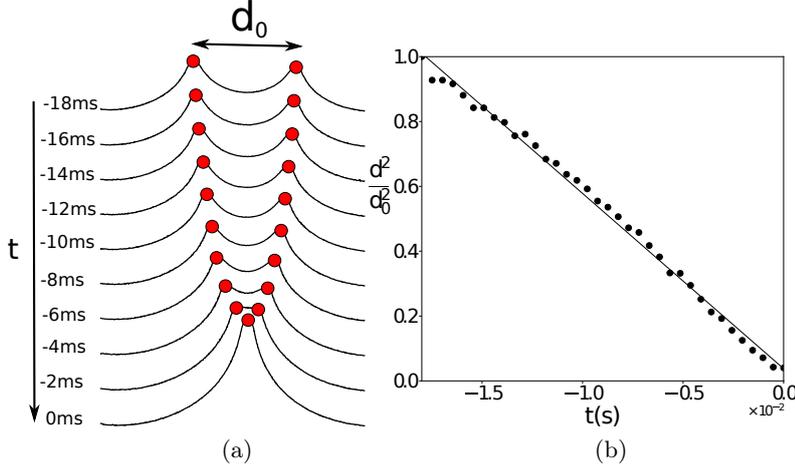


FIGURE 4. (a) Fusion de deux crêtes isolées dans la cellule de Hele-Shaw. (b) Évolution du carré de la distance inter-crêtes en fonction du temps

La *théorie de la convolution incomplète* [8] permet de relier l'ordre ν de la distribution Gamma au temps typique d'agrégation de deux cellules. On peut montrer ainsi que la distribution des tailles de cellules doit suivre une loi Gamma d'ordre $\nu = 2$.

Dans la figure 5, cette distribution théorique (trait noir plein) est comparée aux distributions numériques (étoiles noires) et expérimentales (couleurs). L'équation de Michelson–Sivashinsky (1) est intégrée par méthode pseudo-spectrale avec conditions aux limites périodiques à partir d'un front plan sur un domaine très large devant la longueur de coupure $\frac{\Lambda}{k_c} = 200$. Les erreurs d'arrondi et de troncature génèrent un bruit numérique qui joue un rôle similaire à celui des perturbations externes présentes dans notre expérience [9]. Ainsi, de nouvelles crêtes apparaissent en permanence. La fonction de densité de probabilité des tailles de cellules obtenue par cette intégration numérique est très proche de la distribution théorique prédite précédemment (Fig. 5). En revanche, pour le cas des distributions expérimentales — si l'ensemble des pdf pour différentes richesses de mélange collapent sur une même courbe une fois adimensionnées par la taille de cellules moyennes, révélant le processus autosimilaire qui détermine la distribution de taille — la distribution s'écarte de la courbe théorique pour les cellules de grandes tailles. Ce déficit est certainement dû aux effets de gravité.

5 Conclusion

Nous montrons ici que la dynamique non linéaire des flammes de prémélange peut-être décrite avec précision aux temps courts à l'aide d'une équation d'évolution du front de flamme : l'équation de Michelson–Sivashinsky (1). De plus, en se basant sur les propriétés des solutions analytiques de cette équation, il est possible de décrire finement la dynamique élémentaire de fusion des cellules et d'en déduire une distribution statistique de tailles. Les distributions observées dans notre expérience de laboratoire sont en bon accord avec cette description théorique.

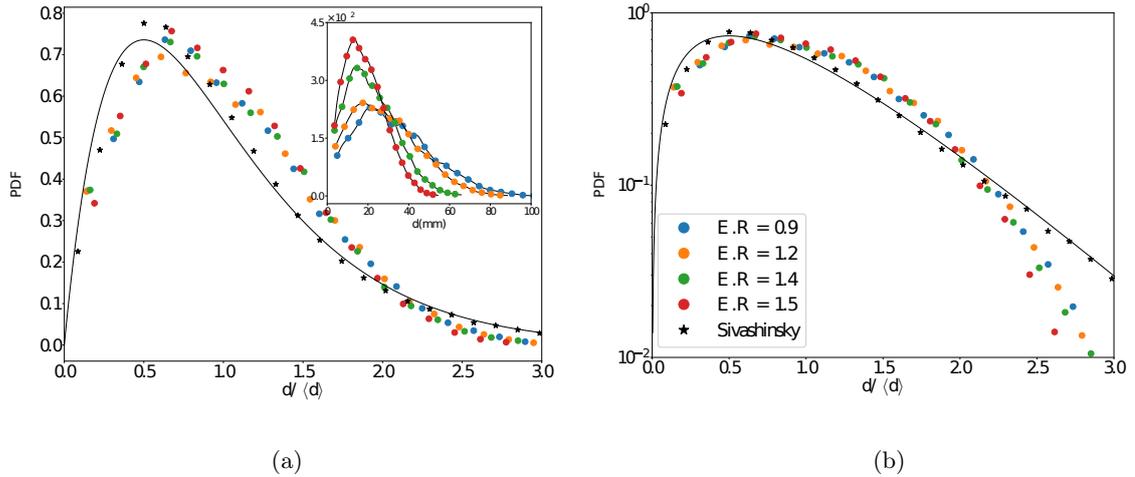


FIGURE 5. Distribution des tailles de cellules théorique (trait noir plein), numérique (étoiles) et expérimentales (flamme air/propane pour différentes richesses de mélange). (a) Échelle lin-lin. Encart : Taille de cellule non-adimensionnée par la valeur moyenne, la taille des cellules diminue quand la richesse augmente. (b) Échelle lin-log.

Remerciements : Nous tenons à remercier Guy Joulin pour les nombreuses discussions sur la dynamique de pôles, ainsi que l'Agence Nationale de la Recherche pour les financements ANR « PDF » ANR-14-CE05-0006 et ANR « FISICS » ANR-15-CE30-0015-03, l'initiative d'excellence d'Aix-Marseille Université - A*MIDEX et le Labex MEC.

Références

1. P. PELCÉ & P. CLAVIN, Influence of hydrodynamics and diffusion upon the stability limits of laminar premixed flames, *J. Fluid Mech.*, **124**, 219–237 (1982).
2. M. MATALON & B. J. MATKOWSKY, Flames as gasdynamic discontinuities, *J. Fluid Mech.*, **124**, 239–259 (1982).
3. F. CRETA, N. FOGLA & M. MATALON, Turbulent propagation of premixed flames in the presence of Darrieus–Landau instability, *Combust. Theor. Model.*, **15**, 267–298 (2011).
4. G. I. SIVASHINSKY, Nonlinear analysis of hydrodynamic instability in laminar flames — I. Derivation of basic equations, *Acta Astronaut.*, **4**, 1177–1206 (1977).
5. C. ALMARCHA, J. QUINARD, B. DENET, E. AL-SARRAF, J. M. LAUGIER & E. VILLERMAUX, Experimental two dimensional cellular flames, *Phys. Fluids*, **27**, 091110 (2015).
6. O. THUAL, U. FRISCH & M. HÉNON, Application of pole decomposition to an equation governing the dynamics of wrinkled flame fronts, *J. Physique*, **46**, 1485–1494 (1985).
7. M. KARDAR, G. PARISI & Y. C. ZHANG, Dynamic scaling of growing interfaces, *Phys. Rev. Lett.*, **56**, 889–892 (1986).
8. A. VLEDOUTS, N. VANDENBERGHE & E. VILLERMAUX, Fragmentation as an aggregation process, *Proc. R. Soc. Lond. A*, **471**, 20150678 (2015).
9. V. KARLIN, Estimation of the linear transient growth of perturbations of cellular flames, *Math. Models Meth. Appl. Sc.*, **14**, 1191–1210 (2004).

Auto-assemblage de colloïdes superparamagnétiques dans un vaisseau quasi-bidimensionnel

Nicolás Rojas

SPEC, CEA Saclay, 91191 Gif-sur-Yvette
nicolas.rojas@email.com

Résumé. Quand l'amplitude du champ magnétique appliqué est augmentée, des colloïdes superparamagnétiques se regroupent dans un vaisseau quasi-bidimensionnel, avec un comportement typique de l'équilibre thermodynamique. Une théorie décrivant des données expérimentales multistables pour la longueur moyenne des rubans est présentée.

Abstract. As the amplitude of the applied magnetic field is increased, superparamagnetic colloids in a quasi-two-dimensional chamber assemble, interacting as a typical behavior of thermodynamic equilibrium. A theory describing multistable experimental data for the average length of the bundles is presented.

1 Introduction

Dans les références [1] et [2], le processus d'agrégation de colloïdes superparamagnétiques sous un champ magnétique externe a été étudié, avec une conclusion intéressante : à l'équilibre thermodynamique, la formation de chaînes conduit à des structures stables telles que des rubans lorsque le champ magnétique est augmenté. Des colloïdes superparamagnétiques sous un champ magnétique constant $\mathbf{B} = B \hat{\mathbf{y}}$ dans un système bidimensionnel avec particules orientées dans le sens du champ magnétique ont été trouvés expérimentalement et dans des simulations numériques [3, 4]. La dynamique transitoire qui conduit à des agrégats saturés à l'équilibre thermodynamique a été étudiée de manière approfondie. Dans les références [5] et [6], l'équation de Smoluchowsky est résolue en utilisant une méthode numérique décrite dans la référence [7], en utilisant un noyau pour l'agrégation induite par champ magnétique qui dépend du diamètre des particules, l'angle critique $\theta_m = 54,7^\circ$, le coefficient moyen de diffusion en translation des tiges rigides, la viscosité cinétique de la phase liquide et l'énergie thermique $k_B T$. Plus tard, les dynamiques d'équilibre transitoire et à longue distance sont obtenues avec les simulations de dynamique de Langevin [3, 8, 9], et dans les résultats expérimentaux [1, 2, 5, 6, 10]. L'évolution de la longueur moyenne des agrégats suit une loi d'échelle en t^z [4] jusqu'au régime de saturation, où elle converge vers une valeur constante à l'équilibre thermodynamique après un temps transitoire. L'exposant z et la valeur de saturation dépendent de l'amplitude du champ magnétique. Dans ce dernier régime, les agrégats interagissent et échangent des particules comme un comportement typique de l'équilibre dynamique, alors que leur longueur moyenne \bar{s} dans le système reste à peu près constante, c'est qu'on appelle des agrégats saturés.

Récemment [1], en plus des chaînes, on trouve des rubans lorsque l'intensité du champ magnétique est augmentée dans un système quasi-bidimensionnel. Dans ce régime, l'expérience est très sensible au bruit externe. Par exemple, l'écoulement autour d'une petite bulle d'air ou d'huile en mouvement accidentellement piégée dans la suspension colloïdale peut influencer le processus de croissance des agrégats. Ensuite, chaque réalisation expérimentale conduit à une valeur différente de \bar{s} à constante B dans l'intervalle $B^2 = 200$ à 700 G^2 , qui fournit une région multistable pour la longueur moyenne des agrégats. Le système est *quasi* bidimensionnel, le diamètre de la chambre cylindrique est de 5 mm, avec une hauteur d'environ 50 μm , le rayon des particules est de $0,6 \pm 0,3 \mu\text{m}$. Le rapport d'aspect du système est environ 10^{-2} . Ce travail se concentrera sur les résultats expérimentaux récents [1], dans la région des paramètres des rubans stables à l'équilibre thermodynamique. La nouveauté principale des résultats obtenus dans

cet article est résumée dans la section 2.3 où les données expérimentales multistables pour la longueur moyenne des rubans superparamagnétiques sont décrites par la multiplicité des résultats numériques, qui augmentent avec l'intensité du champ magnétique.

2 Agrégats saturés

2.1 Chaînes

Dans cette section, une revue de la théorie expliquant les chaînes saturées à l'équilibre thermodynamique sera présentée. Comme point de départ, l'énergie libre Gibbs [11] du système est écrite

$$F = \sum_{s'=1}^{\infty} \left[-\frac{N_{s'}}{s'}(s'-1)\epsilon_m + k_B T \frac{N_{s'}}{s'} \log \left(\frac{N_{s'}}{s'A} \right) \right] + F_0, \quad (1)$$

le premier terme de la somme est l'énergie des chaînes de longueur s' , le second terme est $-T \times$ l'entropie des chaînes de longueur s' et F_0 est toute autre contribution à la énergie libre. La longueur s' est mesurée en nombre de grains $s' = 1, 2, \dots$. Ici $-\epsilon_m$ est l'énergie magnétique de chaque lien de premier ordre (plus proche voisin) dans une chaîne, $N_{s'}$ est le nombre de grains dans les chaînes de longueur s' , $A = \sum_{s'=1}^{\infty} A_{s'}$ est le nombre total de chaînes dans la suspension, où $A_{s'}$ est le nombre de chaînes de longueur s' , k_B est la constante de Boltzmann et T est la température du système. Pour calculer le potentiel chimique d'un agrégat $\mu_s = (\partial F / \partial N_s)|_{(N_s \neq N_{s'}, T, V)}$ en employant (1), l'utilisation des conventions de delta Kronecker est requise, avec $\mu_0 = (\partial F_0 / \partial N_s)|_{(N_s \neq N_{s'}, T, V)}$ et V le volume de la suspension. La fraction volumique en absence de champ magnétique (avant agrégation) $\phi_0 = NV_{\odot} / V$ est égale à la somme des fractions volumiques en présence de champ magnétique (après agrégation), ce qui équivaut à la conservation des grains dans le système. V_{\odot} est le volume de chaque particule colloïdale, N est le nombre total de grains, qui est une quantité conservée et $\phi_s = N_s V_{\odot} / V$ est la fraction volumique de particules dans les chaînes de longueur s . Les fractions volumiques ϕ_0 et ϕ_s sont inférieures à 1 puisque le volume total de particules colloïdales est inférieur au volume de la suspension. μ_s peut être écrite en utilisant μ_s^0 , la partie standard du potentiel chimique (l'énergie moyenne d'interaction par particule)

$$\mu_s = \frac{1}{s} \left[k_B T \log \left(\frac{\phi_s}{s} \right) - (s-1)\epsilon_m \right] + \mu_s^0, \quad (2)$$

avec $\mu_s^0 = \mu_0 + \alpha k_B T / s$ et $\alpha = \log(V / AV_{\odot})$. Dans ce cas, $V / AV_{\odot} = V\bar{s} / V_p > 1$ en utilisant $\bar{s} = N / A$ et $V_p = NV_{\odot}$ le volume total occupé par les grains, alors $\alpha > 0$. Pour comprendre l'utilisation de $\mu_s^0 \equiv \mu^0$ comme constante dans [3], une lecture de [11, Chap. 16] est importante. À l'équilibre thermodynamique, le potentiel chimique de tous les agrégats est égal, indiqué par l'équation $\mu_s = \mu_1$. Le taux d'association des agrégats est donné par $k_1 \phi_1^s$ qui néglige, par exemple, la formation possible d'un pentamère par l'union d'un dimère avec un trimère. Le taux de dissociation est $k_s \phi_s / s$, ce qui implique par exemple que les s -mères ne peut que se dissocier complètement pour former des monomères ($s = 1$), et pas un $(s-1)$ -mère et un monomère. Le rapport des vitesses de réaction est défini par $K_s = k_1 / k_s$, connu comme la *constante d'équilibre* selon la loi d'action de masse généralisée. Le calcul est simplifié en considérant que les particules n'ont pas d'interaction magnétique ($\epsilon_m = 0$). À l'équilibre thermodynamique, les équations $\mu_1 = \mu_s$ et (2) indiquent

$$\phi_s = s \left[\phi_1 e^{\beta(\mu_1^0 - \mu_s^0)} \right]^s = s \phi_1^s K_s, \quad (3)$$

avec $\beta = 1 / k_B T$. La dernière égalité dans (3) implique que le taux d'association est égal au taux de dissociation, ceci est connu sous le nom de mélange idéal et est limité aux systèmes dilués. Considérer μ_s^0 comme une constante équivaut à imposer $K_s = 1$, ce qui est une approximation qui favorise les monomères puisqu'elle donne $0 < \phi_s \ll \phi_1 < 1$. Si μ_s^0 (croît) diminue avec s , l'équation (3) montre que l'apparition de grandes chaînes devient (moins) plus probable. Dans ce cas $\mu_s^0 = \mu_0 + \alpha k_B T / s$ diminue avec s et l'apparition de grands agrégats devient plus probable. La constante d'équilibre est $K_s = e^{\alpha(s-1)} \geq 1$ car

$\alpha > 0$ et $s \geq 1$, indépendamment de la valeur de μ_0 . Dans [3] le processus d'agrégation est considéré principalement magnétique ($K_s = 1$, $\epsilon_m > 0$), l'énergie d'interaction ϵ_m est proportionnelle à $\Gamma - 1 = \beta\epsilon_m$ en faisant la moyenne de l'énergie d'interaction magnétique

$$U(r, \theta) = \frac{4\Gamma R^3}{\beta} \left(\frac{1 - 3\cos^2\theta}{r^3} \right) \quad (4)$$

sur la région attractive en coordonnées sphériques, avec $\Gamma = \pi\chi^2 R^3 B^2 / 9\bar{\mu}_0 k_B T$ le rapport entre l'énergie magnétique et l'énergie thermique, et Γ/β l'amplitude du potentiel magnétique évalué dans $r = 2R$ et $\theta = 0$ (deux particules en contact dans une chaîne). Le potentiel (4) a une symétrie azimutale. Ici $\bar{\mu}_0$ est la perméabilité au vide, cette notation est utilisée afin d'éviter toute confusion avec le potentiel chimique μ_0 , χ est la susceptibilité magnétique et R est le rayon moyen des grains dans la suspension. On remarque que dans [1] l'approximation $\beta\epsilon_m \approx \Gamma$ est utilisée, c'est-à-dire sans tenir compte des moyennes sur le potentiel magnétique, qui sera également utilisée dans ce travail. Le nombre de chaînes de longueur s , $A_s = N_s/s = \phi_s V / sV_\odot$ peut être exprimé comme $A_s = \phi_1 x^s V / xV_\odot$ [3].

2.2 Rubans

Dans le cas des rubans, leur largeur est donnée par le paramètre d , mesuré en nombre de grains ($d = 2, 3, 4$). Le nombre total de grains dans la suspension est donné par

$$N = \sum_{d=1}^{d_{\max}} \sum_{s=d}^{\infty} ds A_{d,s}, \quad (5)$$

qui contient la considération implicite que chaque agrégat a un nombre de particules $n = ds$ (approximation symétrique, voir texte suivant). Pour calculer la longueur moyenne des chaînes ou des rubans, \bar{s} est moyenné. Pour simplicité, seulement les agrégats *symétriques* sont pris en compte dans cette section, ce qui signifie que chaque colonne d'un ruban a le même nombre de particules (longueur). Alors la formule pour \bar{s} est

$$\bar{s} = \frac{1}{A} \sum_{d=1}^{d_{\max}} \sum_{s=d}^{\infty} s A_{d,s}. \quad (6)$$

La partie suivante sera consacrée à la définition de $A_{d,s}$ en fonction de d , s et x . Le nombre de particules dans tous les rubans de longueur s et largeur d est $N_{d,s} = ds A_{d,s}$, la fraction volumique $\phi_{d,s} = V_\odot N_{d,s} / V$ donne alors $A_{d,s} = \phi_{d,s} V / ds V_\odot$. La fraction de volume $\phi_{d,s}$ sera calculée en fonction de $\phi_{1,1}$ et $x = \phi_{1,1} e^{\beta\epsilon_m}$ en employant $\mu_{1,1} = \mu_{d,s}$ à l'équilibre thermodynamique. L'énergie libre de Gibbs est

$$F = F_0 + \sum_{d'=1}^{d'_{\max}} \sum_{s'=d'}^{\infty} \frac{N_{d',s'}}{d's'} \left[U_{d',s'} + k_B T \log \left(\frac{N_{d',s'}}{d's' A} \right) \right], \quad (7)$$

où $U_{d',s'}$ est l'énergie magnétique des rubans, $A = \sum_{d=1}^{d_{\max}} \sum_{s=d}^{\infty} A_{d,s}$ et F_0 est toute autre contribution à l'énergie libre. Notons que $U_{d,s}$ ne dépend pas de $N_{d,s}$, donc le calcul de $\mu_{d,s} = (\partial F / \partial N_{d,s})|_{(N_{d',s'} \neq N_{d',s'}, T, V)}$ est similaire au précédente dans la section 2.1. L'utilisation des conventions delta Kronecker sur $\mu_{d,s}$ donne

$$\mu_{d,s} = \frac{1}{ds} \left[k_B T \log \left(\frac{\phi_{d,s}}{ds} \right) + U_{d,s} \right] + \mu_{d,s}^0 \quad (8)$$

avec $\mu_{d,s}^0 = \mu_0 + \alpha k_B T / (ds)$. Dans ce cas $\alpha = \log(V / AV_\odot) > 0$ car $V / AV_\odot = \bar{n} / \phi_0 > 1$. L'énergie magnétique d'un agrégat U_N normalisée par particule (similaire à $U_{d,s} / \epsilon_m n$), a été calculée dans [1] en fonction de N , en tenant compte la position de chaque particule et toutes les interactions possibles dans les agrégats avec des grains ordonnés de bas en haut et de gauche à droite, plusieurs cas asymétriques sont encore négligés. Dans [1], le calcul de U_N jusqu'à $N = 50$ montre que la structure la plus stable

pas des chaînes aux rubans lorsque l'intensité du champ magnétique augmente. Puisque le calcul de l'énergie magnétique par particule a été effectué, incluant toutes les interactions dans des cas symétriques et dans certains cas non symétriques, une revue du calcul est présentée ici et elle sera utilisée dans $\phi_{d,s}$ et \bar{s} . Chaque particule dans un agrégat est étiquetée avec l'index i , lié à sa position $\rho_i = (\rho_{i,x}, \rho_{i,y})$ avec

$$\rho_{i,x}(d) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)([i-1]\%d), \quad \rho_{i,y}(d) = \text{int}\left(\frac{i-1}{d}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)([i-1]\%d)\%2, \quad (9)$$

les coordonnées normalisées de $\rho_i = \mathbf{r}_i/2R$ pour $i = 1, 2 \dots n$, valide pour toute valeur entière de d . $a\%b$ est l'opérateur modulo et $\text{int}(x)$ la partie entière de x . Le nombre de particules dans un agrégat est lié à sa longueur et sa largeur par $n = ds + n\%d$. La position de la première particule est $(0, 0)$, et les grains sont ordonnés de bas en haut et de gauche à droite. La distance entre deux grains est $\rho_{ij} = |\rho_j - \rho_i|$ et l'énergie magnétique normalisée $u_0(i, j) = U(i, j)/U_0$ (avec $U_0 = \Gamma/2\beta$) est obtenue en utilisant l'équation (4), puis l'énergie magnétique complète par particule dans un agrégat est calculée (voir Fig. 1) avec

$$u(d, n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \frac{1}{\rho_{ij}^3} \left(1 - \frac{3(\rho_{j,y} - \rho_{i,y})^2}{\rho_{ij}^2} \right). \quad (10)$$

La dépendance de l'énergie magnétique sur n peut être obtenue en approximant les résultats numériques donnés par (10). L'approximation symétrique $n = ds$ est exacte dans les cas $n\%d = 0$, et est applicable car $0 \leq n\%d \leq d-1 \ll n$.

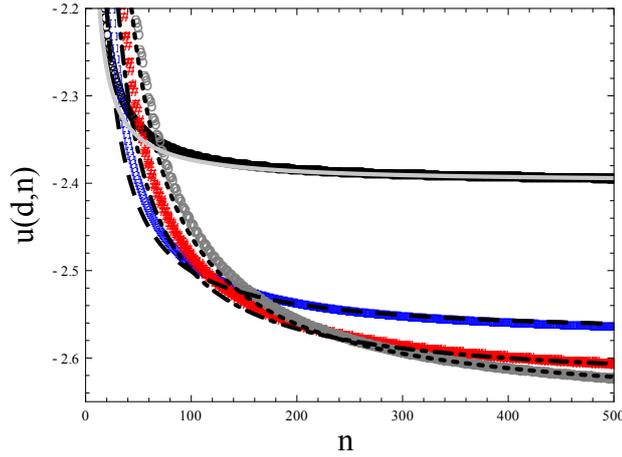


FIGURE 1. Énergie magnétique d'une chaîne ou d'un ruban normalisée par particule $u(d, n)$, calculé en utilisant l'équation (10) jusqu'à $n = 500$ à $d = 1$ (cercles), $d = 2$ ((bleu) \square), $d = 3$ ((rouge) $\#$) et $d = 4$ (cercles gris). Loi $u_{d,n} = 2(a_d - b_d n)/n$ pour $d = 1$ (ligne grise), $d = 2$ (courbe en tirets), $d = 3$ (trait mixte) et $d = 4$ (ligne pointillée). L'agrégat le plus stable change à environ $n_d = 30, 113, 263$ pour $d = 2, 3, 4$ respectivement.

L'énergie magnétique par grain est calculée jusqu'à $n = 500$ en utilisant l'équation (10). Les chaînes sont l'agrégat le plus stable pour $n < 30$, les rubans apparaissent à environ $n_2 = 30$ pour $d = 2$, $n_3 = 113$ pour $d = 3$ et $n_4 = 263$ pour $d = 4$. À partir de ces derniers résultats numériques, on obtient une loi pour l'énergie magnétique d'un agrégat en minimisant la différence entre $u(d, n)$ et $u_{d,n} = 2(a_d - b_d n)/n$ pour chaque valeur de d , les coefficients (a_d, b_d) sont donnés dans la table 1. Il est pris en compte que les agrégats avec un nombre de particules $n_0 = d^2$ sont le plus petit ruban ou chaîne aligné parallèlement à la direction du champ magnétique puisque $d \leq s \ll n$, donc la minimisation est effectuée pour chaque ensemble de données (10) à partir de $n = n_0$ pour $d = 1, \dots, 4$. Les résultats numériques pour $n < d^2$ n'ont pas de signification physique puisqu'ils représentent des agrégats alignés perpendiculairement à la direction du champ magnétique. Les résultats numériques de (10) à $d = 1$ (cercles), $d = 2$ ((bleu) \square),

$d = 3$ ((rouge) #) et $d = 4$ (cercles gris) sont en bon accord avec $u_{d,n}$ à $d = 1$ (ligne grise), $d = 2$ (courbe en tirets), $d = 3$ (trait mixte) et $d = 4$ (ligne pointillée). Ce dernier ajustement est une approche *cross-grained*, il est équivalent à l'approximation symétrique dans le sens qu'il ne décrit pas les détails obtenus à partir des particules $n\%$ observées dans les résultats numériques (groupes locaux de données pour $d > 1$, voir Fig. 1). L'approximation symétrique $n = ds$ est utilisée dans le potentiel magnétique, alors $U_{d,s} = nU_0u_{d,n} = \epsilon_m(a_d - b_d ds)$.

| d | a_d | b_d | n_d |
|-----|----------|---------|-------|
| 1 | 1,30536 | 1,19968 | 1 |
| 2 | 3,76001 | 1,28793 | 30 |
| 3 | 6,69634 | 1,31679 | 113 |
| 4 | 10,02290 | 1,33089 | 263 |

TABLE 1. Liste des paramètres.

2.3 La constante d'équilibre

Dans une procédure similaire à celle pour l'obtention de (8), l'équation d'équilibre thermodynamique est $\mu_{d,s} = \mu_{1,1}$. Ici $\mu_{d,s}^0$, la partie standard du potentiel chimique (l'énergie libre moyenne par particule) n'est pas négligée, en utilisant l'approximation symétrique la fraction volumique $\phi_{d,s}$ donne

$$\phi_{d,s} = dsx^{ds} \frac{\phi_{1,1}}{x} r_{d,s} K_{d,s}, \quad (11)$$

où $x = \phi_{1,1}e^\Gamma$, $r_{d,s} = e^{\Gamma(1-a_d+(b_d-1)ds)}$ et $K_{d,s} = e^{-\beta ds(\mu_{d,s}^0 - \mu_{1,1}^0)}$ la constante d'équilibre. Depuis $\mu_{d,s}^0 = \mu_0 + \alpha/(\beta ds)$ et $\alpha = \log(V/AV_\odot) = \log(\bar{n}/\phi_0) > 0$, alors $K_{d,s} = (\bar{n}/\phi_0)^{ds-1}$. Plusieurs approximations pour \bar{n} dans $K_{d,s}$ peuvent être utilisées. Dans des travaux précédentes $K_{d,s} = 1$, ce qui équivaut à considérer $\bar{n} = \phi_0$. Ce dernier est une mauvaise approximation puisque $\bar{n} \gg \bar{s} > 1$ et $0 < \phi_0 < 1$.

En utilisant les équations (5), (6) et (11), le nombre moyen de particules et la longueur des agrégats sont $\bar{n} = x_0/a_0$ et $\bar{s} = s_0/a_0$, avec $a_0 = \sum_{d=1}^{d_{\max}} a_{0d}$, $s_0 = \sum_{d=1}^{d_{\max}} s_{0d}$ et $x_0 = \sum_{d=1}^{d_{\max}} x_{0d}$. Dans ce cas $a_{0d} = \sum_{s=d}^{\infty} x^{ds} r_{d,s} K_{d,s}$, $s_{0d} = \sum_{s=d}^{\infty} sx^{ds} r_{d,s} K_{d,s}$ et $x_{0d} = ds_{0d}$, ce qui donne

$$a_{0d} = \frac{\phi_0}{\bar{n}} \left(e^{\Gamma(1-a_d)} \frac{\zeta_d^2}{1 - \zeta_d^d} \right), \quad s_{0d} = a_{0d} \left(d + \frac{\zeta_d^d}{1 - \zeta_d^d} \right), \quad (12)$$

avec $\zeta_d = (\bar{n}/\phi_0)xe^{\Gamma(b_d-1)}$. Dans cette section est considérée l'approximation $\bar{n} \simeq 50d$ dans $K_{d,s}$, donc $\zeta_d \simeq de^{\Gamma\Delta b_d}\zeta_1$. L'intervalle numérique $\Delta B = 1$ G, les valeurs expérimentales $\phi_0 = 0,003$ et $C_1 = 0,2 \times 10^{-2} \text{ G}^{-2}$ sont utilisés (voir Fig. 2). La hauteur du vaisseau est d'environ 50 μm , environ 25 à 100 diamètres de particules. Cependant, les particules se trouvent principalement dans une couche d'environ 2 μm près du fond du récipient en raison de sédimentation. La fraction volumique effective est estimée entre 0,002 et 0,085 en raison des fluctuations thermiques de l'épaisseur de la couche de sédimentation et d'une large distribution des rayons de particules, en accord avec la valeur utilisée de ϕ_0 . En utilisant les valeurs moyennes de χ et R , on obtient une valeur $C_1 = 0,12 \times 10^{-2} \text{ G}^{-2}$. La valeur utilisée de $C_1 = 0,2 \times 10^{-2} \text{ G}^{-2}$ correspond aux mesures expérimentales de χ et R . La valeur absolue des solutions sélectionnées \bar{s}_4 à \bar{s}_{12} (cercles) et les solutions réelles positives \bar{s}_4 à \bar{s}_{18} ((vert) #) sont comparés à des mesures expérimentales ((bleu) []). La multiplicité des solutions est 32. La multistabilité des résultats expérimentaux est fournie par la multiplicité de solutions numériques réelles positives et la valeur absolue des solutions complexes, qui augmente avec la grandeur du champ magnétique. Le manque de précision des données numériques pour de faibles valeurs de B est amélioré en calculant la valeur absolue des solutions sélectionnées, ce qui donne des résultats plus précis pour $B < 10$ G.

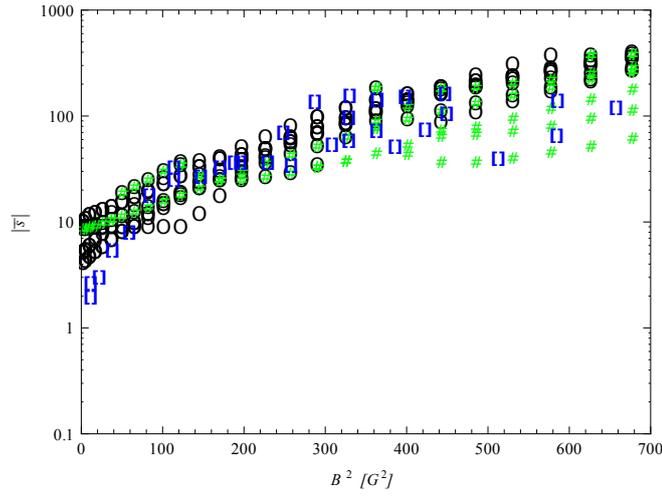


FIGURE 2. Longueur moyenne des chaînes saturées et des rubans à l'équilibre thermodynamique. Données expérimentales obtenues à partir de [12] ((bleu) \square). Valeur absolue des solutions sélectionnées \bar{s}_4 à \bar{s}_{12} (cercles) et solutions numériques complètement réelles \bar{s}_4 à \bar{s}_{18} ((vert) $\#$) en utilisant (12) jusqu'à $d_{\max} = 4$ pour $\phi_0 = 0,003$ et $C_1 = 0,2 \times 10^{-2} \text{ G}^{-2}$.

3 Conclusion

Ce travail montre les premiers résultats pour des rubans superparamagnétiques à l'équilibre thermodynamique, en utilisant le potentiel d'interaction magnétique complet et une approximation *cross-grained* pour $d_{\max} = 4$, en considérant certains agrégats asymétriques. Dans la section 2.3, l'énergie moyenne d'interaction moyenne par particule $\mu_{d,s}^0$ est prise en compte en utilisant l'approximation $K_{d,s} = (50d/\phi_0)^{ds-1}$ en accord avec les mesures expérimentales (voir Fig. 2), la multistabilité des données expérimentales est décrite par la multiplicité des résultats numériques, qui augmentent avec l'intensité du champ magnétique. L'équation $\bar{n} = x_0/a_0$ peut être ajoutée à l'ensemble $\bar{s} = s_0/a_0$, $x_0 = \sum_{d=1}^4 x_{0d}$. Ces équations seront résolues numériquement pour $(\zeta_1, \bar{s}, \bar{n})$ dans un futur travail.

Références

1. A. DARRAS, J. FISCINA, M. PAKPOUR, N. VANDEWALLE & G. LUMAY, *Eur. Phys. J. E*, **39**, 47–52 (2016).
2. A. DARRAS, *Auto-organisation sous champ constant de colloïdes superparamagnétiques*, MSc Thesis, Université de Liège (2016).
3. J. S. ANDREU, J. CAMACHO & J. FARAUDO, *Soft Matter*, **7**, 2336–2339 (2011).
4. J. FARAUDO, J. S. ANDREU & J. CAMACHO, *Soft Matter*, **9**, 6654–6664 (2013).
5. F. MARTÍNEZ-PEDRERO, M. TIRADO-MIRANDA, A. SCHMITT & J. CALLEJAS-FERNÁNDEZ, *Phys. Rev. E*, **76**, 011405 (2007).
6. F. MARTÍNEZ-PEDRERO, A. EL-HARRAK, J. C. FERNÁNDEZ-TOLEDANO, M. TIRADO-MIRANDA, J. BAUDRY, A. SCHMITT, J. BIBETTE & J. CALLEJAS-FERNÁNDEZ, *Phys. Rev. E*, **78**, 011403 (2008).
7. G. ODRIOZOLA, A. SCHMITT, J. CALLEJAS-FERNÁNDEZ, R. MARTÍNEZ-GARCÍA & R. HIDALGO-ÁLVAREZ, *J. Chem. Phys.*, **111**, 7657–7667 (1999).
8. P. DOMÍNGUEZ-GARCÍA, S. MELLE, J. M. PASTOR & M. A. RUBIO, *Phys. Rev. E*, **76**, 051403 (2007).
9. V. SCHALLER, U. KRÄLING, C. RUSU, K. PETERSSON, J. WIPENMYR, A. KROZER, G. WAHNSTRÖM, A. SANZ-VELASCO, P. ENOKSSON & C. JOHANSSON, *J. Appl. Phys.*, **104**, 093918 (2008).
10. J. H. E. PROMISLOW, A. P. GAST & M. FERMIGIER, *J. Chem. Phys.*, **102**, 5492–5498 (1995).
11. J. N. ISRAELACHVILI, *Intermolecular and Surface Forces*, 2^e édition, Academic Press, New York, pp. 341–350 (1992).
12. N. ROJAS, A. DARRAS & G. LUMAY, *Phys. Rev. E*, **96**, 012608 (2017).

Spectral simulations of tidal flows in weakly deformed spheres

Jérémie Vidal & David Cébron

Université Grenoble Alpes, CNRS, ISTerre, Grenoble, France

jeremie.vidal@univ-grenoble-alpes.fr

Résumé. Dus à la présence de compagnons orbitaux, les planètes et étoiles sont généralement soumises à des forçages orbitaux harmoniques, comme les marées ou la précession. Ces forçages déforment les enveloppes fluides en ellipsoïdes et peuvent générer des instabilités, comme l'instabilité elliptique. Dans le régime non linéaire, ces instabilités peuvent entretenir une turbulence d'ondes et générer des champs magnétiques dynamos. Cependant, elles ont été étudiées (numériquement et expérimentalement) uniquement pour des paramètres physiques très éloignés des valeurs géophysiques et astrophysiques. Nous proposons une nouvelle approche numérique, valide dans la limite des faibles déformations et des faibles diffusions. Nous avons implémenté cette méthode dans deux codes numériques spectraux, linéaires et non linéaires. Nous reportons les premiers résultats obtenus pour le forçage de marée, que nous comparons aux résultats de la littérature. Cette approche permet d'envisager l'avenir de faire des simulations numériques directes plus réalistes des écoulements générés par les forçages orbitaux en géométrie faiblement déformée.

Abstract. Celestial fluid bodies (e.g. planets, stars), orbited by gravitational companions, undergo harmonic orbital forcings, such as tides or precession. These orbital forcings deform fluid bodies into ellipsoids and generate fluid instabilities, e.g. the elliptical instability. The nonlinear outcome of these instabilities can sustain a wave turbulence regime and drive self-sustained, dynamo magnetic fields. However, orbitally driven instabilities have only been studied in the achievable range of parameters (i.e. large deformations and overestimated diffusive effects) that is far from the expected regime in geo and astrophysics. We advocate the use of an alternative numerical method to simulate fluid instabilities (i) in weakly deformed non-axisymmetric domains and (ii) in the weak diffusive regime. We have implemented this method within two spectral codes, devoted to linear and nonlinear computations. We report preliminary results benchmarked against the tidal forcing. This method paves the way for more realistic numerical simulations of orbitally driven flows in weakly deformed fluid containers.

1 Introduction

Celestial fluid bodies often undergo orbital (i.e. tidal) harmonic forcings (e.g. tides, precession, libration), due to the presence of orbital companions. These forcings deform fluid bodies into ellipsoids at first order. The ellipsoidal deformation generates a pressure torque at the fluid boundary, which overcomes the viscous coupling in the limit of vanishing viscosity in geo and astrophysics. This strongly affects the dynamics of fluid layers. Orbital forcing could also sustain dynamo magnetic fields, as confirmed by proof-of-concept numerical simulations [3, 17, 24]. However, numerical simulations of flows in deformed fluid containers are difficult to carry out. Indeed, spherical containers are much easier to handle numerically than non-spherical ones. Thus, numerical codes based on local methods, that can handle deformed geometries, have been used. Finite-volume codes have been developed [4, 21], as well as finite-element codes in spheroidal geometry [25, 26]. However, the latter authors considered only stress-free boundary conditions, which can lead to difficulties with angular momentum conservation and to spurious behaviors in axisymmetric geometries [9]. Simulations have also been carried out by using the Nek5000 code [6], based on the spectral element method. Pseudo-spectral codes, relying on spectral Galerkin expansions in certain directions, may be of interest. Indeed, local codes are generally less efficient than spectral codes, that benefit from (i) the spectral convergence and (ii) a fast spectral transform to (generally) perform simulations with values of dimensionless numbers closer to the astrophysical values. A self-consistent spectral

method should be based on ellipsoidal harmonics. Considering the effectiveness of spectral decompositions based on spherical harmonics [18], we may naively expect to obtain a generalization in ellipsoidal domains. Unfortunately, a straightforward extension is impossible [15]. Other spectral methods have been proposed [11, 14, 20], but none of them deal with non-axisymmetric deformed containers.

We aim at presenting an innovative method, that can be implemented in any spherical spectral code, to study the dynamics of orbitally driven flows in weakly deformed, non-axisymmetric rigid containers. The paper is divided as follows. In Section 2, we introduce the physical model we are interested in and then we present the foundations of our method than can be implemented in spherical geometry. Then in Section 3, we benchmark our method on a test case (the elliptical instability). Finally, Section 4 ends the paper with a conclusion and draws some research perspectives.

2 Formulation of the problem

2.1 Mathematical modeling

We describe an idealized model of orbitally driven flows, suitable for fluid mechanics studies, that mimics the astrophysical problem. We consider a Newtonian, incompressible fluid of homogeneous density ρ_* and uniform kinematic viscosity ν . The fluid is enclosed within a triaxial ellipsoidal container, rotating with the angular velocity $\boldsymbol{\Omega}(t)$ in the inertial frame. Ellipsoidal semi-axes (a, b, c) are steady in the frame rotating with $\boldsymbol{\Omega}(t)$, defined in the following as the body frame. In this frame, the ellipsoidal boundary is given by $(x/a)^2 + (y/b)^2 + (z/c)^2 = 1$. We denote $\beta_0 = |a^2 - b^2|/(a^2 + b^2) \geq 0$ the equatorial ellipticity and Ω_s the typical fluid angular velocity. We choose a typical length R_* as length scale, Ω_s^{-1} as time scale and $R_*\Omega_s$ as velocity scale. For the sake of concision, the dimensionless variables are noted as their dimensional counterparts. The dimensionless, incompressible, governing equations for the velocity field \mathbf{v} are in the body frame

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + 2 \boldsymbol{\Omega}(t) \times \mathbf{v} = -\nabla P + \text{Ek} \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{r} \times \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt}, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (1)$$

where \mathbf{n} is the unit outward vector normal to the ellipsoidal boundary, P a dimensionless reduced pressure term and $\text{Ek} = \nu/(\Omega_s R_*^2)$ the Ekman number (based on the fluid angular velocity). Equations (1) contain the idealized physics to model the hydrodynamics of orbitally driven flows. They can be completed to take into account buoyancy effects and magnetic fields if necessary [24].

2.2 The new method

We propose an innovative method, inspired by astrophysical studies [5], to solve equations (1) in weakly deformed spherical containers. We assume that the fluid domain is subjected to a tidal potential, expressed in the inertial frame by the gravitational potential Ψ_t . The latter potential is proportional to solid spherical harmonics $r^l Y_l^m(\theta, \varphi)$, in which (r, θ, φ) are the spherical coordinates centred on the centre-of-mass of the fluid body and $Y_l^m(\theta, \varphi)$ is the spherical harmonic of degree l and azimuthal order $-l \leq m \leq l$. Note that the fluid boundary is exactly ellipsoidal if the tidal potential is any linear combination of tidal components of degree $l = 2$. Then, we assume that the fluid is enclosed within a spherical domain that mimics a stellar or planetary envelope. Thus, the tidal potential drives a radial flow at the boundary, i.e. $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = F(\Psi_t)$ where F is a known function [16]. This radial flow is an inhomogeneous boundary condition, that is asymptotically valid in the limit of small deformations (e.g. $\beta_0 \ll 1$) and vanishing viscosities ($\text{Ek} \rightarrow 0$).

Full equations (1) can be solved by converting the influx from the radial flow into a body force, see Ref. [8, p. 76]. We determine a particular potential “non-wavelike” solution \mathbf{v}_p , having the properties

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_p = 0, \quad \nabla \times \mathbf{v}_p = \mathbf{0} \quad \text{and} \quad \mathbf{v}_p \cdot \mathbf{n} = F(\Psi_t). \quad (2)$$

Then, by setting $\mathbf{v} = \mathbf{v}_p + \tilde{\mathbf{v}}$, the “wavelike” flow $\tilde{\mathbf{v}}$ is solution of equations (1) by adding a body force in the right-hand side. This decomposition is known as the non-wavelike/wavelike decomposition in

astrophysics [16]. This method has been validated to compute (linear and nonlinear) tidally forced waves of small wavelength [5, 16]. The method is *a priori* not directly suited to seek the leading order, forced response of the fluid cavity to the orbital forcing. Indeed, this forced flow is a physically large-scale flow \mathbf{U} , which is sensitive to the boundary shape. However, in the particular case of the tidal component $\Psi_t \propto r^2 Y_2^0$, associated with an orbital companion moving around the host fluid body on a circular orbit, the particular (dimensionless) flow \mathbf{v}_p reduces to

$$\mathbf{U}(\mathbf{r}) = (1 - \Omega_0) [-(1 + \beta_0) y \hat{\mathbf{x}} + (1 - \beta_0) x \hat{\mathbf{y}}], \quad (3)$$

with $\mathbf{r} = (x, y, z)^T$ the position vector in the body frame and $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}})$ the unit Cartesian vectors. It turns out that this is the exact ellipsoidal basic flow in ellipsoids, solution of equations (1) with the orbital angular velocity $\boldsymbol{\Omega} = (0, 0, \Omega_0)^T$.

The above discussion suggests that we can split the total velocity field \mathbf{v} as a basic flow \mathbf{U} , that is an exact solution of equations (1) in a deformed (e.g. ellipsoidal) fluid domain, and a perturbation \mathbf{u} , solution of the nonlinear equations in a spherical domain

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + 2 \boldsymbol{\Omega}(t) \times \mathbf{u} = -\nabla p + \text{Ek} \nabla^2 \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{U} - (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (4)$$

where p is the reduced pressure. This assumption should be valid in the limit of (i) small deformations (e.g. $\beta_0 \ll 1$), such that the deformed fluid domain tends to a sphere, and (ii) vanishing viscosities ($\text{Ek} \rightarrow 0$), such that perturbations of high spatial complexity (i.e. of small wavelength, that are barely sensitive to the fluid boundary) are triggered. Then, equations (1) are supplemented by viscous stress-free conditions at spherical boundaries

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{n} \times [\mathbf{n} \cdot (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T)] = \mathbf{0}, \quad (5)$$

that are often assumed to be valid for the velocity field in astrophysics. We further impose a zero angular momentum condition for \mathbf{u} . Coupled with conditions (5), this is equivalent to fix a non-zero constant angular momentum and stress-free conditions on the total velocity field $\mathbf{U} + \mathbf{u}$. Thus, we assume that the angular momentum of the fluid is only carried on by the basic flow \mathbf{U} . In ellipsoids, only large-scale flows, that are linear in Cartesian space coordinates, have a non-zero angular momentum [10]. These flows are filtered out within our framework. However, this assumption is *a priori* justified because they are generally not the preferred unstable modes for geo and astrophysical parameters [1, 22].

3 Test case: The elliptical instability

3.1 Linear, inviscid stability analysis

We investigate the linear, inviscid hydrodynamic stability of the tidal basic flow (3). This flow is prone to the elliptical instability [12], i.e. a nonlinear parametric instability coupling two inertial waves of the fluid with the basic “elliptical” wave flow. The elliptical instability can be studied with a local stability analysis [22]. The largest inviscid growth rate σ can be obtained analytically in the limit $\beta_0 \ll 1$. It reads

$$\frac{\sigma}{|1 - \Omega_0|} = \max_{\theta_0} \frac{1}{4} \sqrt{(1 + \cos \theta_0)^4 \beta_0^2 - 4 \left[2 - 4 (1 + \tilde{\Omega}_0) \cos \theta_0 \right]^2}, \quad (6)$$

with $\tilde{\Omega}_0 = \Omega_0 / (1 - \Omega_0)$ and $0 \leq \theta_0 \leq \pi$ an adjustable parameter chosen to maximize σ . In the asymptotic limit $\beta_0 \rightarrow 0$, the elliptical instability only exists in the allowable range $-1 \leq \Omega_0 \leq 3$. However, formula (6) shows that the elliptical instability is actually excited on a wider allowable range for finite values of β_0 , as a result of geometric detuning effects (hidden in the optimisation over θ_0). The elliptical instability actually exists in the orbital range $(\beta_0 + 1) / (\beta_0 - 1) \leq \Omega_0 \leq 3$.

The emphasis is here to compare formula (6) with theoretical stability results obtained by assuming spherical perturbations. We have extended the SIREN code [22], to handle arbitrary spherical perturbations superimposed on the elliptical flow (3). We outline here the method [22, 23]. The only (minor)

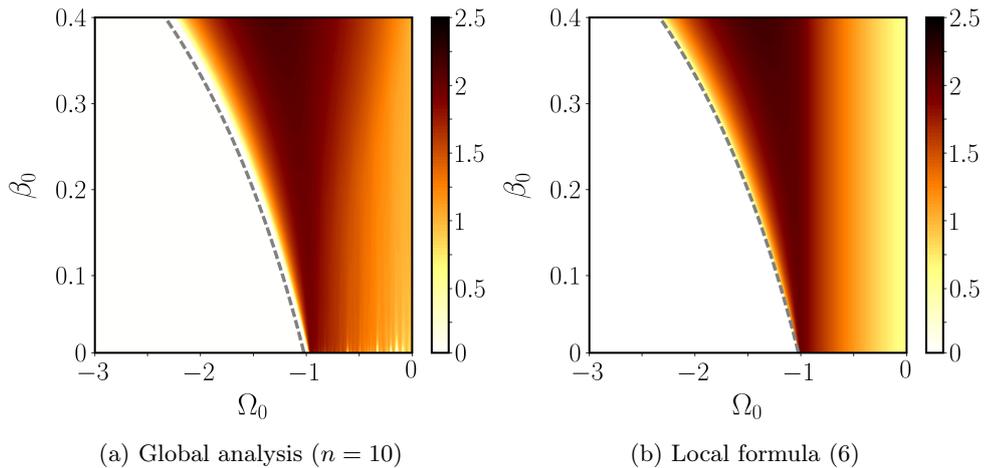


Figure 1. Areas of instability of the tidal flow (3) in the (β_0, Ω_0) plane. Resolution in the parameter space is 200^2 . Colour map shows σ/β_0 . Ellipsoidal semi-axes $a = \sqrt{1 + \beta_0}$, $b = \sqrt{1 - \beta_0}$ in formula (3) and spherical perturbations ($a = b = c = 1$). Grey dashed line $\Omega_0 = (1 + \beta_0)/(1 - \beta_0)$ is the lower bound of the unstable zone. White areas are (marginally) stable areas.

modification is that we handle flow perturbations bounded within a container with a different ellipticity than the ellipticity of the “basic” container, in which basic flow (3) is an exact solution of equations (1). We project the velocity perturbation onto an exact polynomial Galerkin basis, expressed in Cartesian coordinates $\{x, y, z\}$, of maximum degree n . This basis is made of polynomial elements $\{\mathbf{p}_i(\mathbf{r})\}$, which are divergenceless ($\nabla \cdot \mathbf{p}_i = 0$) and satisfy the impermeability boundary condition ($\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{n} = 0$) at the outer spherical boundary. For a given maximum degree n , the number of basis elements is $n(n+1)(2n+7)/6$ [22]. Then, we seek flow perturbations upon the tidally driven flow (3) as a linear combination of polynomial elements, i.e. $\mathbf{u} = \sum_i \alpha_i \mathbf{p}_i$ with $\{\alpha_i\}$ modal coefficients. This expansion leads to a generalized eigenvalue problem, that is solved by using standard numerical methods. We obtain the largest growth rate σ of the instability, that is a monotonic increasing function of n . Therefore, this method gives only sufficient conditions for instability for a given degree n , and the growth rate converges to its maximum value when $n \rightarrow \infty$.

We compare, in Figure 2, formula (6) and our results computed with the modified SIREN code for the degree $n = 10$. We find that the two stability maps are globally in good agreement. First, instabilities in (a) exist only in areas in which they are expected from formula (6). Second, the largest growth rate of spherical perturbations in (a) is identical to the one obtained in (b), that is an upper bound for the inviscid growth rate of the elliptical instability in ellipsoids [22]. Then, one point is worthy of comment. We have shown only the orbital range $-3 \leq \Omega_0 \leq 0$, which is representative of the worst possible range for the validity of the method. Indeed, large-scale vigorous modes (e.g. spin-over modes $n = 1$) can be strongly excited in the range $-0.5 \leq \Omega_0 \leq 0$, even when $\beta_0 \ll 1$ [1, 22]. This is no longer true outside of this range, in particular when $0 \leq \Omega_0 \leq 3$ [1, 22]. We find that the growth rates are slightly increased (at most by a factor two) when $-0.5 \leq \Omega_0 \leq 0$, due to the presence of these large-scale (spherical) modes that are not modeled by the local analysis. However, outside of this range, the growth rates σ obtained by considering spherical perturbations are quantitatively in excellent agreement with local formula (6). Therefore, this comparison validates our method on the linear regime of the instability, at least in the physically relevant range of parameters.

3.2 Numerical simulations

We now benchmark the nonlinear regime of the elliptical instability, by using direct numerical simulations. Governing equations (4) are solved with the open source, parallel code XSHELLS [19, 24]. It

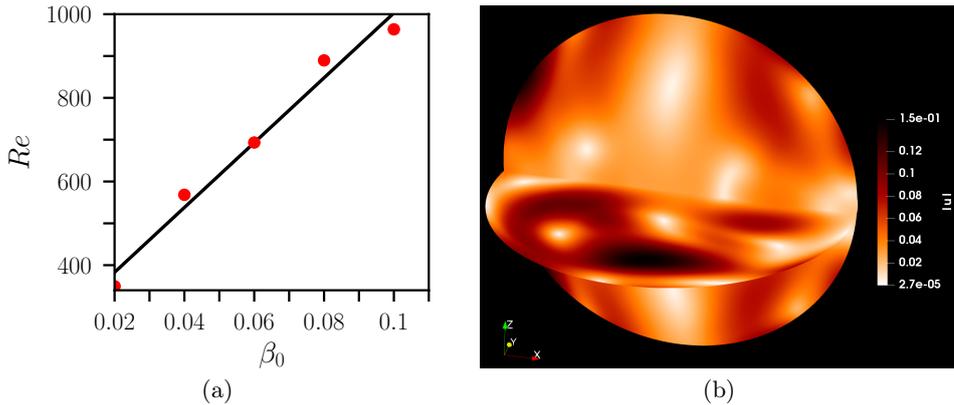


Figure 2. Nonlinear simulations performed with the XSHELLS code. (a) Reynolds number Re as a function of the equatorial ellipticity β_0 . Solid line is the scaling $Re \propto \beta_0$. (b) Three-dimensional snapshot of the velocity magnitude $|\mathbf{u}|$ in the fluid domain. $\beta_0 = 0.08$. The fluid rotation axis is along the Z -axis.

uses second order finite differences in radius and a spectral spherical harmonic expansion [18]. The time-stepping scheme is of second order in time, and treats the diffusive terms implicitly, while the nonlinear and Coriolis terms are handled explicitly. We have extended the XSHELLS code to handle arbitrary steady basic flows $\mathbf{U}(\mathbf{r})$. All simulations were performed at $\Omega_0 = 0$ and $Ek = 10^{-4}$, for several values of the equatorial ellipticity $\beta_0 \ll 1$. The spatial discretisation uses $N_r = 224$ radial points, $l_{\max} = 128$ spherical harmonic degrees and $m_{\max} = 64$ azimuthal wave numbers. We made sure that our simulations are numerically converged by varying the spatial resolution.

To quantify the nonlinear outcome of the instability, we compute the kinetic energies

$$E(\mathbf{u}) = \int_V \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} dV \quad \text{and} \quad E(\mathbf{U}) = \int_V \frac{|\mathbf{U}|^2}{2} dV, \quad (7)$$

with $V = 4\pi/3$ the dimensionless volume of the sphere. Then, we compute the Reynolds number of the nonlinear flow \mathbf{u} as $Re = Ro/Ek$, with $Ro = \sqrt{E(\mathbf{u})/E(\mathbf{U})}$ the Rossby number. In Figure 2(a) we show that the evolution of Re as β_0 varies. The nonlinear regime of the instability is well captured in our simulations. Indeed, Re scales as β_0 [7] and the saturated energy level is in good agreement with published global simulations [24], yielding $Re/\beta_0 \sim 10^4$. Saturated flows, that are symmetric with respect to the equatorial plane, can be predominantly columnar (i.e. aligned with and almost invariant along the axis of rotation) [2] or three-dimensional, possibly due to nonlinearly interacting waves [13]. The latter nonlinear regime is illustrated in Figure 2(b).

4 Conclusion and perspectives

We have proposed a new method to perform spectral simulations of orbitally (i.e. tidally) driven flows in weakly deformed spherical containers, that are idealized models of celestial fluid bodies subjected to harmonic orbital forcings. We have implemented this method within two available codes, namely the (linear) stability code SIREN [22] and the (nonlinear) spherical code XSHELLS [19, 24]. To benchmark our approach, we have considered tidal flows and obtained a quite good agreement with previously published results. These preliminary results pave the way for more realistic future numerical simulations, as outlined in Figure 3. On the one hand, DNS in true ellipsoids are limited to moderate values $Ek \geq 10^{-5}$ and $\beta_0 \geq 10^{-2}$ [6, 7, 17]. On the other hand, DNS performed with the XSHELLS code can use Ekman numbers as small as $Ek = 10^{-7}$ [19], that are closer to the expected values of celestial fluid bodies. Therefore, smaller values of Ek (and so of β_0) than the ones we have used in this paper ($\beta_0 \geq 2 \times 10^{-2}$, $Ek = 10^{-4}$) are within reach. We will carry out new simulations in a more physically relevant range of parameters in a near future.

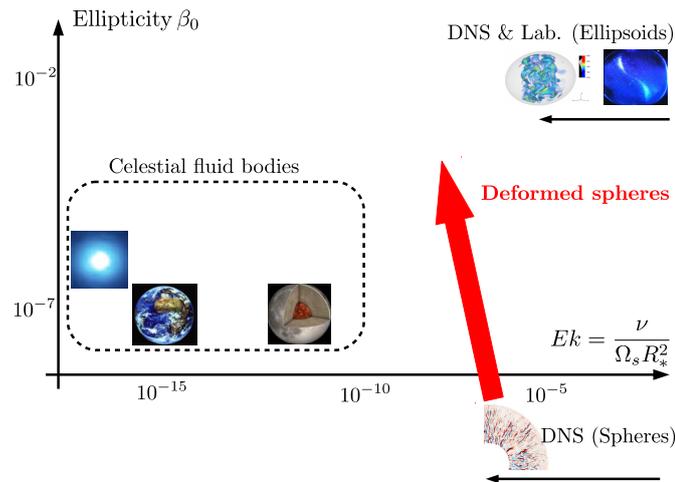


Figure 3. Typical values of the Ekman number Ek and of the equatorial ellipticity $\beta_0 = |a^2 - b^2|/|a^2 + b^2|$ of direct numerical simulations (DNS), laboratory experiments and celestial fluid bodies. Laboratory experiments and DNS using local methods in ellipsoids are limited to moderate values of Ek , typically $Ek \geq 10^{-5}$. Because of this overestimated diffusion, the fluid boundary must be over-deformed to have a pressure torque that overcomes the viscous torque. DNS using spherical codes but mimicking weakly deformed containers can alleviate this problem to reach smaller values of Ek and β_0 (red arrow).

References

1. A. J. BARKER, H. J. BRAVINER & G. I. OGILVIE, *Mon. Notices Royal Astron. Soc.*, **459**, 924–938 (2016).
2. A. J. BARKER & Y. LITHWICK, *Mon. Notices Royal Astron. Soc.*, **435**, 3614–3626 (2013).
3. D. CÉBRON & R. HOLLERBACH, *Astrophys. J.*, **789**, L25 (2014).
4. J. ERNST-HULLERMANN, H. HARDER & U. HANSEN, *Geophys. J. Int.*, **195**, 1395–1405 (2013).
5. B. FAVIER, A. J. BARKER, C. BARUTEAU & G. I. OGILVIE, *Mon. Notices Royal Astron. Soc.*, **439**, 845–860 (2014).
6. B. FAVIER, A. M. GRANNAN, M. LE BARS & J. M. AURNOU, *Phys. Fluids*, **27**, 066601 (2015).
7. A. M. GRANNAN, B. FAVIER, M. LE BARS & J. M. AURNOU, *Geophys. J. Int.*, **208**, 1690–1703 (2017).
8. H. P. GREENSPAN, *The Theory of Rotating Fluids* (1968).
9. J.-L. GUERMOND, J. LÉORAT, F. LUDDENS & C. NORE, *Eur. J. Mech. B Fluid*, **39**, 1–10 (2013).
10. D. J. IVERS, *Geophys. Astro. Fluid*, **111**, 333–354 (2017).
11. D. J. IVERS, *Proc. R. Soc. A*, **473**, 20170432 (2017).
12. R. R. KERSWELL, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **34**, 83–113 (2002).
13. T. LE REUN, B. FAVIER, A. J. BARKER & M. LE BARS, *Phys. Rev. Lett.*, **119**, 034502 (2017).
14. S. LORENZANI & A. TILGNER, *J. Fluid Mech.*, **447**, 111–128 (2001).
15. P. M. MORSE & H. FESHBACH, *Methods of Theoretical Physics* (1953).
16. G. I. OGILVIE, *Annu. Rev. Astron. Astrophys.*, **52**, 171–210 (2014).
17. K. S. REDDY, B. FAVIER & M. LE BARS, *Geophys. Res. Lett.*, in press (2018).
18. N. SCHAEFFER, *Geochim. Geophys. Geosy.*, **14**, 751–758 (2013).
19. N. SCHAEFFER, D. JAULT, H.-C. NATAF & A. FOURNIER, *Geophys. J. Int.*, **211**, 1–29 (2017).
20. D. SCHMITT, & D. JAULT, *J. Comp. Phys.*, **197**, 671–685 (2004).
21. S. VANTIEGHEM, A. SHEYKO & A. JACKSON, *Geophys. J. Int.*, **204**, 1376–1395 (2016).
22. J. VIDAL, & D. CÉBRON, *J. Fluid Mech.*, **833**, 469–511 (2017).
23. J. VIDAL, D. CÉBRON & N. SCHAEFFER, *Comptes-Rendus de la 19^e Rencontre du Non-Linéaire*, 121–126 (2016).
24. J. VIDAL, D. CÉBRON, N. SCHAEFFER & R. HOLLERBACH, *Mon. Notices Royal Astron. Soc.*, in press (2018).
25. C.-C. WU & P. H. ROBERTS, *Geophys. Astro. Fluid*, **103**, 467–501 (2009).
26. C.-C. WU & P. H. ROBERTS, *Geophys. Astro. Fluid*, **107**, 20–44 (2013).

Remontée de bulles dans une suspension dense

Valérie Vidal, Clément Picard & Sylvain Joubaud

Laboratoire de Physique, École Normale Supérieure de Lyon, CNRS, Université de Lyon, 46 Allée d'Italie, F-69342 Lyon, France
 valerie.vidal@ens-lyon.fr

Résumé. L'injection de gaz à la base d'un lit granulaire immergé formé de particules légèrement plus lourdes que le liquide environnant conduit à la formation, en régime stationnaire, d'une suspension dense résultant d'une compétition entre l'entraînement des particules par les bulles et leur sédimentation. L'étude statistique des propriétés des bulles dans ce régime montre qu'au-delà d'un débit critique d'injection de gaz, la population de bulles se scinde en deux avec l'apparition de petites bulles dans la suspension. L'orientation de l'axe principal des bulles montre deux bifurcations, avec une zone de coexistence. De manière non intuitive, l'extension horizontale de la région explorée par les bulles ne dépend pas du débit mais uniquement de la gravité effective.

Abstract. Gas injection at the bottom of an immersed granular layer made of particles slightly heavier than the surrounding fluid leads, in the stationary regime, to the formation of a dense suspension resulting from the competition between particle entrainment by bubbles and sedimentation. The statistical study of bubbles characteristics shows that above a critical gas flow-rate, the bubble population splits in two, with small bubbles appearing in the suspension. The bubble main orientation axis displays two bifurcations, with a coexistence zone. Contrary to the intuition, the horizontal extent of the region explored by bubbles depends not on the flow-rate, but only on the effective gravity.

1 Introduction

Une suspension dense désigne des particules immergées dans un liquide environnant, dont la fraction volumique est typiquement supérieure à 10–20 %. Au-delà de ces fractions volumiques, en effet, pour des particules rigides non browniennes, des effets collectifs apparaissent et la viscosité de la suspension ne peut plus être décrite de manière simple par les équations d'Einstein et Batchelor [1–3]. Plusieurs lois empiriques ont été proposées pour décrire les suspensions denses [4, 5], et des études récentes soulignent leur rhéologie complexe [6, 7]. La remontée de bulles dans un tel milieu se rencontre dans de nombreux phénomènes naturels ou industriels, tels que l'émission de gaz (CO_2 ou méthane) au fond des océans [8], les réacteurs catalytiques [9] ou les échangeurs thermiques [10]. La présence simultanée des phases solide, liquide et gaz rend ces écoulements multiphasiques complexes. Cependant, à notre connaissance, seuls deux régimes extrêmes ont été étudiés : le cas fondamental d'une bulle unique remontant dans une suspension de particules isodenses [11], ou le passage d'un gaz à travers un lit granulaire composé de particules lourdes, entraînant une fluidisation partielle ou complète du milieu [10, 12].

Nous nous intéressons ici au cas intermédiaire de particules sédimentant lentement dans le liquide environnant, dans une configuration quasi-bidimensionnelle (cellule de Hele-Shaw), qui permet une visualisation directe des écoulements. La remontée de gaz met en suspension les grains et, en régime stationnaire, on observe des bulles remontant dans une suspension dense. Ce travail a pour but de quantifier l'influence du débit de gaz injecté et de la gravité effective sur les propriétés statistiques de ces bulles : taille, orientation, position et fluctuations.

2 Dispositif expérimental

Le dispositif expérimental est constitué d'une cellule de Hele-Shaw (plaques de verre séparées par un espacement faible, $e = 2$ mm) de largeur $L_c = 13.6$ cm et de hauteur 30 cm (Fig. 1(a), gauche). La cellule est initialement remplie de grains (hauteur $h_g = 9$ cm) immergés dans un liquide (hauteur

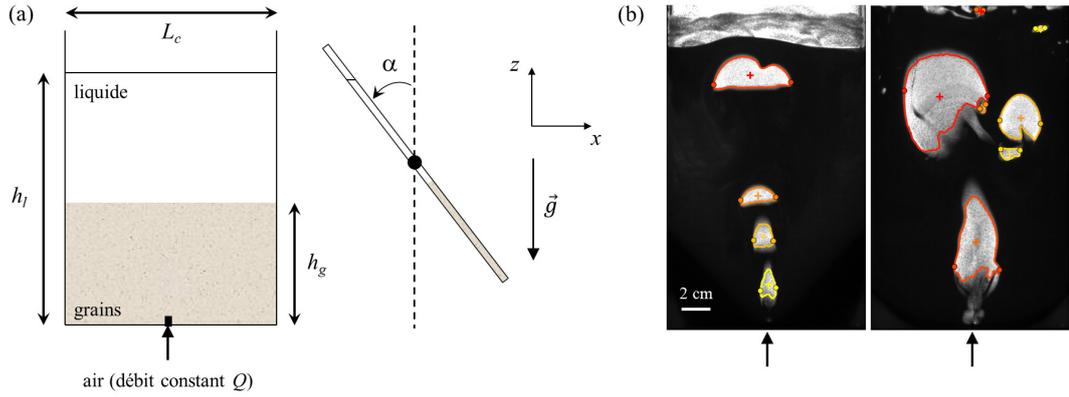


FIGURE 1. (a) Dispositif expérimental vu de face (gauche) et de côté (droite). α indique l'angle d'inclinaison de la cellule par rapport à la verticale. (b) Remontée de bulles en régime stationnaire pour $Q = 0,2$ L/min (gauche) et $Q = 1,5$ L/min (droite) [$\alpha = 10^\circ$]. Le contour des bulles est indiqué, ainsi que leur centre de masse (X_c, Z_c) (croix) et leur extension horizontale (cercles pleins).

totale $h_l = 18$ cm). Les grains sont des particules de PVC (densité $\rho_g = 1380$ kg/m³) polydisperses, non sphériques, de taille typique 230 μ m (Goodfellow LS395895 MKS). Le liquide est de l'éthanol (Merck Millipore, densité $\rho_l = 790$ kg/m³), permettant d'éviter la formation d'agrégats. À l'instant $t = 0$ s, de l'air est injecté à débit constant Q en bas de la cellule (contrôleur de débit Bronkhorst, Mass Stream, series D6311) par un injecteur de diamètre interne 1 mm. L'ensemble de l'expérience est monté sur un cadre permettant une inclinaison d'un angle α par rapport à la verticale (Fig. 1 (a), droite). La cellule est rétroéclairée par un panneau LED (dalle EuroshopLed), permettant une visualisation directe des bulles et des particules en suspension par ombroscopie (Fig. 1 (b)). Les images de l'expérience sont enregistrées via une caméra (PixeLINK, PL-B741U) à une fréquence de 1 Hz. Quelques gouttes de colorant alimentaire (bleu E133, *MeilleurdumChef.com*) ont été rajoutées dans le liquide afin d'augmenter le contraste et de repérer correctement les bulles par simple binarisation d'images.

Au cours des expériences, nous avons varié le débit entre 0,1 et 1,5 L/min, et l'angle d'inclinaison entre 0 et 40°. En régime stationnaire, on observe qu'une grande partie des grains est mise en suspension (Fig. 1 (b)), et que les bulles ont des propriétés très différentes selon les paramètres (α, Q) imposés. Afin de quantifier ces propriétés, un programme Matlab (*MathWorks*®) a été élaboré, permettant d'extraire pour chaque image la taille, l'orientation principale, la position du centre de masse et l'extension horizontale des bulles (Fig. 1 (b)).

3 Taille et orientation des bulles

3.1 Diamètre équivalent

Dans le cas d'une géométrie confinée, des travaux précédents [13, 14] ont montré que l'épaisseur e_f des films de lubrification entre une bulle et la paroi est donnée par la relation : $e_f/e \sim Ca^{2/3}/(1 + Ca^{2/3})$, où $Ca = \mu U/\sigma$ est le nombre capillaire avec $\mu = 1,15$ mPa·s la viscosité dynamique du fluide, $U \sim 10$ cm/s la vitesse des bulles et $\sigma \sim 20$ mN/m la tension de surface air/éthanol. Dans l'ensemble de nos expériences, $e_f/e \ll 1$ et l'on peut donc considérer le volume des bulles comme égal à leur surface apparente S , multipliée par l'épaisseur e de la cellule. Leur diamètre équivalent est alors calculé comme $d_{eq} = \sqrt{4S/\pi}$. La figure 2 (a) montre deux exemples de distributions de taille de bulles pour des débits différents, les autres paramètres étant inchangés. Pour des débits faibles ($Q = 0,2$ L/min), la distribution est large mais montre un maximum unique, permettant de définir un diamètre équivalent moyen pour l'ensemble des bulles. Pour des débits plus importants cependant, on observe un dédoublement de la population de

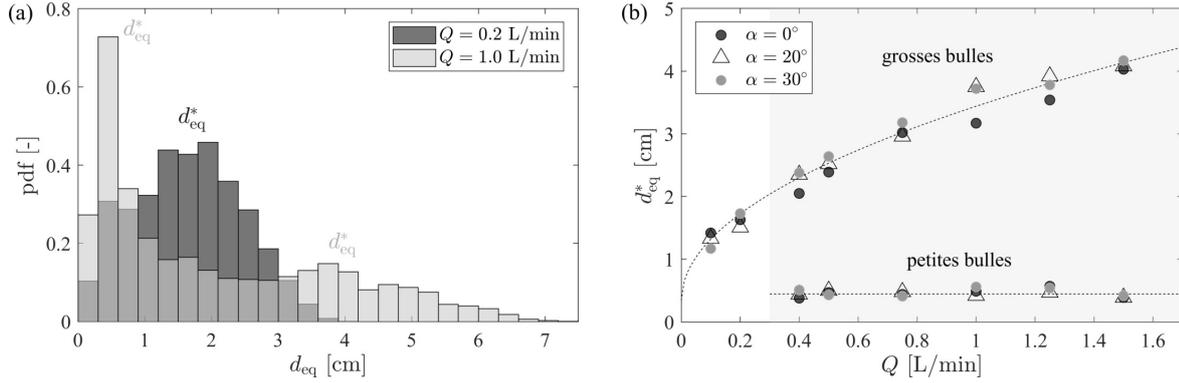


FIGURE 2. (a) Densité de probabilité pour le diamètre équivalent des bulles d_{eq} [$\alpha = 30^\circ$]. d_{eq}^* indique le diamètre typique (densité de probabilité maximale) de la ou des population(s) de bulles (deux populations à haut débit). Le gris non indiqué en légende correspond au recouvrement des histogrammes. (b) Diamètre équivalent des bulles d_{eq}^* en fonction du débit Q pour différents angles α . Pour $Q > 0,3$ L/min, on observe deux populations de bulles (deux pics sur l'histogramme en (a)) : une population dont la taille suit une loi en \sqrt{Q} (fit en pointillés $0,34 + 3,1\sqrt{Q}$) et une population de petites bulles de taille constante $d_{\text{eq}}^* = 0,45$ cm (fit en pointillés).

bulles, avec l'apparition de petites bulles (Fig. 2 (b)). Ce phénomène est dû à une déstabilisation et une fragmentation beaucoup plus importante des bulles à des débits plus élevés. La figure 2 (b) peut être vue comme un diagramme de bifurcation, avec un débit critique $Q^* \simeq 0,3$ L/min.

Les petites bulles apparaissant pour $Q > Q^*$ ont un diamètre constant $d_{\text{eq}} \simeq 4,5$ mm, indépendant du débit et de l'angle d'inclinaison α . Il est intéressant de noter que la population de grosses bulles suit une loi en \sqrt{Q} , qui n'est pas affectée par l'apparition des petites bulles pour $Q = Q^*$ (ligne pointillée du haut, Fig. 2 (b)). L'ajustement en \sqrt{Q} sur l'ensemble des angles explorés apporte deux informations importantes : (1) le volume des bulles, qui varie au premier ordre comme d_{eq}^2 , est directement proportionnel au débit d'air injecté ; (2) il existe une taille minimale de bulles dans le liquide, donnée par l'ordonnée à l'origine de l'ajustement, $d_{\text{eq}}^{\text{min}} \simeq 3,4$ mm. Cette taille minimale est du même ordre de grandeur que la taille typique de la population de petites bulles.

3.2 Orientation

L'orientation principale d'une bulle est ici définie comme l'angle θ entre la verticale et le grand axe de l'ellipse qui ajuste au mieux la bulle. Cette dernière est calculée par la fonction *regionprops* de Matlab, qui permet de quantifier les propriétés d'objets connectés dans une image binaire, obtenue dans notre cas par seuillage des images brutes issues de l'expérience. La figure 3 présente les histogrammes (densité de probabilité) en coordonnées polaires pour les orientations des bulles en régime stationnaire, pour différents débits Q et angles α . Une probabilité importante autour de 0° est la signature de bulles étirées verticalement, tandis qu'une probabilité importante vers 90 ou 270° indiquent des bulles allongées horizontalement. Ce dernier cas est similaire à la morphologie de bulles remontant dans un liquide simple lorsque leur volume est suffisamment grand pour que les forces capillaires ne soient plus capables de maintenir une forme circulaire (entre les deux plaques de la cellule de Hele-Shaw). Pour de faibles débits ($Q = 0,1$ L/min), la majorité des bulles sont orientées horizontalement ; lorsqu'on augmente le débit, quel que soit l'angle α , on observe une distribution d'angles bimodale, avec une partie des bulles désormais orientée verticalement ; enfin, pour de forts débits ($Q = 1,5$ L/min), les bulles sont en majorité allongées verticalement — sauf pour la cellule verticale ($\alpha = 0^\circ$) pour laquelle on garde une distribution bimodale.

Ces résultats sont résumés sur la figure 4. Lorsque l'on trace θ en fonction de Q , on observe les trois comportements décrits ci-dessus, illustrés par des photos de bulles tirées des expériences (Fig. 4 (a)). La zone grisée dans la figure indique la gamme de débits pour laquelle les deux orientations de bulles (horizontale et verticale) sont observées. La figure 4 (b) reporte dans le diagramme (α, Q) les limites

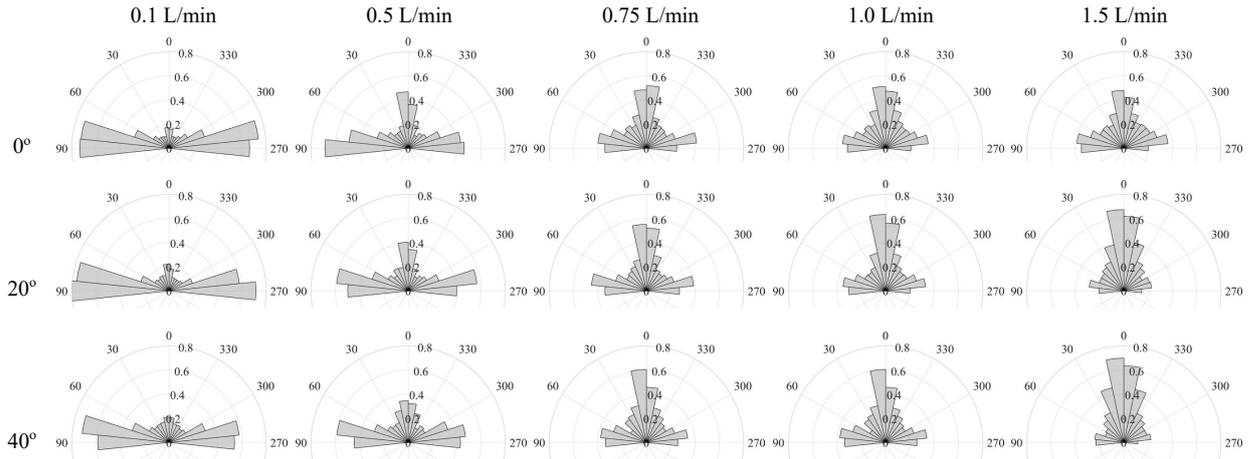


FIGURE 3. Histogramme (densité de probabilité) en coordonnées polaires représentant l'orientation principale θ des bulles remontant dans la suspension dense pour différents débits Q et angles d'inclinaison α .

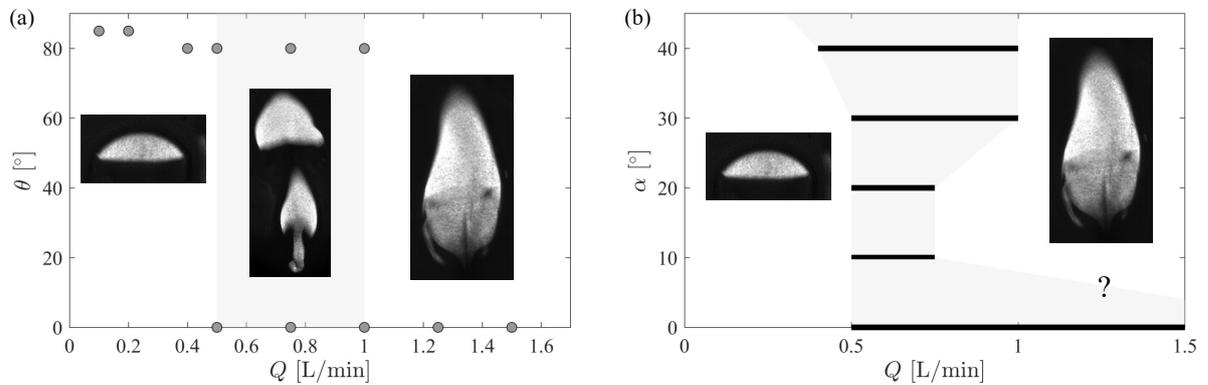


FIGURE 4. (a) Angle principal θ d'orientation des bulles en fonction de Q [$\alpha = 30^\circ$]. La région grisée représente la gamme de débits pour lesquels on observe deux orientations principales. Les photos illustrent des exemples typiques de bulles pour $Q = 0,2, 0,75$ et $1,25$ L/min (de gauche à droite). (b) Diagramme des régimes (α, Q). Les lignes noires (et par extrapolation la région grisée) indiquent la zone de coexistence de deux orientations principales des bulles.

d'existence de cette zone de coexistence pour les angles et les débits explorés (lignes noires). La région en grisée indique, par extrapolation, la zone dans laquelle on peut observer cette coexistence dans ce diagramme des régimes. Seule la limite basse reste incertaine, car nous n'avons pu atteindre pour $\alpha = 0^\circ$ de débit suffisamment élevé pour quitter cette zone de coexistence. Le point d'interrogation indique une extrapolation possible.

4 Localisation et fluctuations

Dans cette section, nous nous intéressons à la zone explorée par les bulles lors de leur remontée dans la suspension dense. La figure 5 (a) montre trois exemples de cartographie de la position du centre de masse des bulles (X_c, Z_c) en régime stationnaire, sur l'ensemble de l'expérience (typiquement 1 000 s). Le nombre de bulles varie selon les débits, allant d'environ 4 200 pour $Q = 0,1$ L/min (Fig. 5 (a), gauche) à 15 400 pour $Q = 1,5$ L/min (Fig. 5 (a), droite) dans l'exemple présenté ($\alpha = 0^\circ$). Lorsque le débit augmente, les bulles semblent explorer une région latérale de plus en plus grande et sont limitées lorsqu'elles remontent

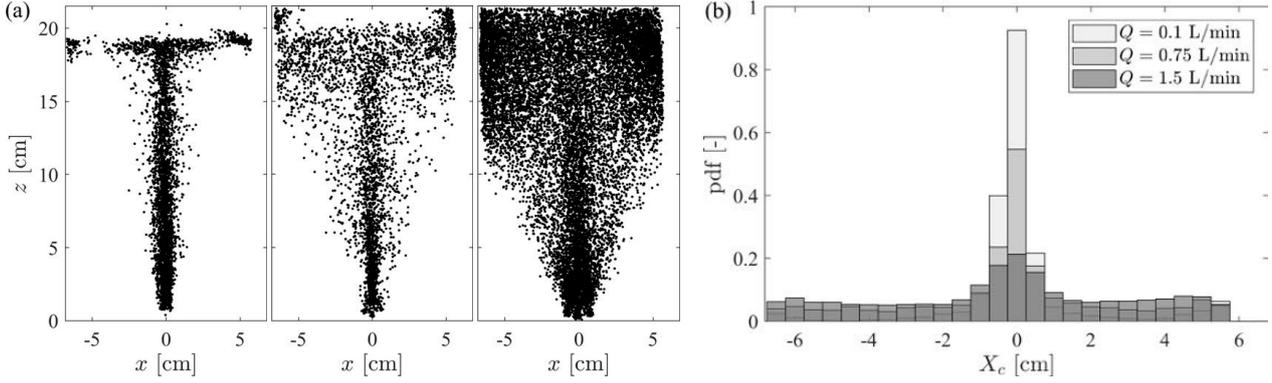


FIGURE 5. (a) Cartographie des positions (X_c, Z_c) du centre de masse des bulles remontant dans la suspension pour $Q = 0,1$ (gauche), $0,75$ (centre) et $1,5$ L/min [$\alpha = 0^\circ$]. (b) Histogramme (densité de probabilité) des positions horizontales des bulles, X_c , pour les trois cas présentés en (a).

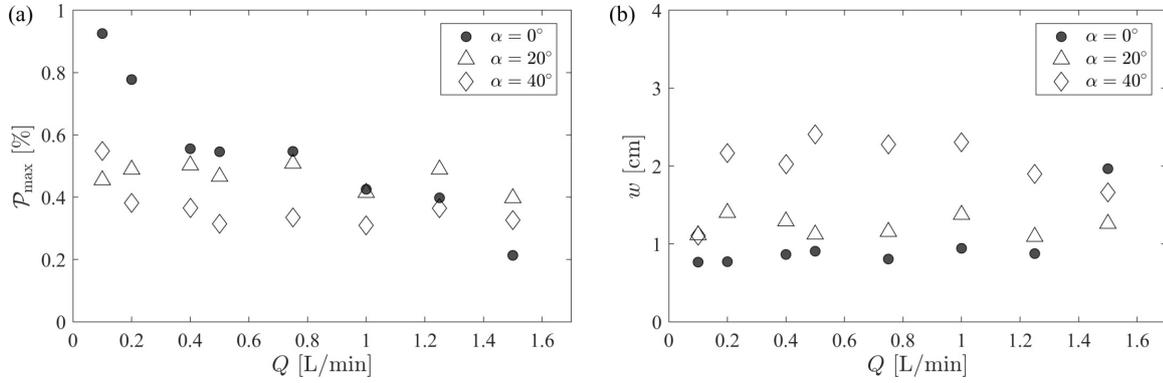


FIGURE 6. (a) Maximum \mathcal{P}_{\max} et (b) largeur à mi-hauteur w de la fonction densité de probabilité des positions horizontales des bulles (voir histogramme de la figure 5 (b)).

par les bords de la cellule. Afin de quantifier l'extension horizontale de cette zone d'exploration, on a représenté sur la figure 5 (b) les densités de probabilité pour la position horizontale des bulles, pour différents débits ($X_c = 0$ cm correspondant ici à des bulles dont le centre de masse est à la verticale du point d'injection). Lorsque le débit augmente, on voit que la probabilité qu'une bulle soit localisée au centre de la cellule diminue. Le plateau pour $|X_c| > 3-4$ cm est la signature des bulles s'étalant sous la surface libre du fluide (voir Fig. 5 (a), gauche) et n'est pas analysé ici.

La figure 6 (a) représente la valeur maximale \mathcal{P}_{\max} de la densité de probabilité de X_c (valeur maximale des histogrammes de la figure 5 (b)) en fonction du débit, pour différentes inclinaisons α de la cellule. Pour la cellule verticale ($\alpha = 0^\circ$), la décroissance de \mathcal{P}_{\max} est claire, même si un plateau est observé entre $Q = 0,4$ et $0,8$ L/min. Lorsque α augmente, en revanche, la décroissance est beaucoup moins nette, et quel que soit le débit, la probabilité pour qu'une bulle soit à la verticale du point d'injection est comprise entre 30 et 50 % environ. Dès que l'on incline la cellule, en effet, il est plus facile pour les bulles d'aller explorer latéralement la suspension dense, même à bas débit, contrairement au cas de la cellule verticale. Pour $Q > 0,3$ L/min, comme montré en section 3.1, de nombreuses petites bulles sont formées suite à une instabilité et fragmentation des grosses bulles. Leur centre de masse n'a qu'une faible probabilité de se trouver à la verticale de l'injecteur, et on observe au contraire qu'elles explorent une région latérale importante (voir Fig. 1 (b), droite). Ce processus explique les points dispersés, mais du même ordre de grandeur environ, pour $Q > 0,3$ L/min sur la figure 6 (a).

La figure 6(b) montre la largeur à mi-hauteur w de la densité de probabilité de X_c (histogrammes Fig. 5(b)) en fonction du débit, pour différentes inclinaisons α de la cellule. Si l'on excepte le point à $Q = 1,5$ L/min pour $\alpha = 0^\circ$, w reste environ constant quel que soit le débit, et augmente lorsque α augmente. Statistiquement, l'extension horizontale typique de la région explorée par les bulles ne dépend donc pas du débit, mais uniquement de la gravité effective dans le système.

5 Conclusion

L'étude expérimentale de la remontée de bulles dans une suspension dense, en cellule de Hele-Shaw, montre l'apparition, au-delà d'une valeur de débit critique $Q_c \simeq 0,3$ L/min, d'une population de petites bulles de diamètre constant et environ égal à 4,5 mm. La population de bulles de taille plus importante voit son diamètre augmenter selon une loi en \sqrt{Q} , prévisible en géométrie quasi-bidimensionnelle, sans présenter de discontinuité pour $Q \geq Q_c$. L'étude statistique de l'orientation principale des bulles montre l'existence de deux bifurcations lorsque l'on augmente le débit : à faible débit, les bulles sont allongées horizontalement ; à fort débit, elles sont allongées verticalement ; pour des débits intermédiaires, on observe une zone de coexistence entre les deux orientations, dont l'extension varie selon la gravité effective.

Les résultats sur la position des bulles et leurs fluctuations montrent que les bulles explorent une région plus étendue horizontalement lorsque l'on incline la cellule (diminution de la gravité effective). De manière contre-intuitive cependant, la région typique explorée est indépendante du débit, malgré l'apparition de petites bulles dans la suspension dense pour $Q \geq Q_c$. Ce résultat peut avoir une importance dans le cas d'applications industrielles car il permet de caractériser la zone explorée par les bulles, ce qui est intéressant si l'on veut optimiser le nombre et la position de multiples injecteurs de gaz.

Références

1. A. EINSTEIN, Zur Theorie der Brownschen Bewegung, *Ann. Phys.*, **324**, 371–381 (1906).
2. G. K. BATCHELOR, Effect of Brownian motion on bulk stress in a suspension of spherical particles, *J. Fluid Mech.*, **83**, 97–117 (1977).
3. E. GUAZZELLI & S. MORRIS, *A physical introduction to suspension dynamics*, Cambridge University Press (2011).
4. I. M. KRIEGER & T. J. DOUGHERTY, A mechanism for non-Newtonian flow in suspensions of rigid spheres, *Trans. Soc. Rheol.*, **3**, 137–152 (1959).
5. I. E. ZARRAGA, D. A. HILL & D. T. LEIGHTON, The characterization of the total stress of concentrated suspensions of noncolloidal spheres in Newtonian fluids, *J. Rheol.*, **44**, 185–220 (2000).
6. F. BOYER, E. GUAZZELLI & O. POULIQUEN, Unifying suspension and granular rheology, *Phys. Rev. Lett.*, **107**, 188301 (2011).
7. E. LERNER, G. DÜRING & M. WYART, A unified framework for non-Brownian suspension flows and soft amorphous solids, *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.*, **109**, 4798–4803 (2012).
8. H. SVENSEN *et al.*, Release of methane from a volcanic basin as a mechanism for initial Eocene global warming, *Nature*, **429**, 542–545 (2004).
9. H. SVENSEN *et al.*, Liquid-solid mass transfer for microchannel suspension satalysis in gas-liquid and liquid-liquid segmented flow, *Ind. Eng. Chem. Res.*, **54**, 4699–4708 (2015).
10. B. BOISSIERE *et al.*, Experimental hydrodynamic study of gas-particle dense suspension upward flow for application as new heat transfer and storage fluid, *Can. J. Chem. Eng.*, **93**, 317–330 (2015).
11. N. HOOSHYAR *et al.*, Dynamics of single rising bubbles in neutrally buoyant liquid–solid suspensions, *Phys. Rev. Lett.*, **110**, 244501 (2013).
12. R. PORYLES, V. VIDAL & G. VARAS, Bubbles trapped in a fluidized bed: Trajectories and contact area, *Phys. Rev. E*, **93**, 032904 (2016).
13. P. AUSSILLOUS & D. QUÉRÉ, Quick deposition of a fluid on the wall of a tube, *Phys. Fluids*, **12**, 2367–2371 (2000).
14. M. ROUDET, *Hydrodynamique et transfert de masse autour d'une bulle confinée entre deux plaques*, Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse (2008).

Formes d'équilibre de chaînes fermées d'aimants sphériques

Gérard Vinsard & Stéphane Dufour

Université de Lorraine, CNRS, LEMTA, F-54000 Nancy, France

gerard.vinsard@univ-lorraine.fr

Résumé. Des formes d'équilibre de chaînes d'aimants sphériques fermées sur elles-mêmes sont calculées en utilisant une approximation qui réduit le nombre de degrés de liberté. Les formes de chaînes étudiées sont celles qui présentent des points anguleux. Ces formes sont étudiées expérimentalement et numériquement. Elles sont stables et leurs énergies sont calculées.

Abstract. Some equilibrium shapes of closed magnets' strings is computed by using an approximation which reduces the number of required degrees of freedom. The studied shapes are those that contain corner points. The shapes are studied both experimentally and numerically. They are stable and their energies are calculated.

1 Introduction

Des travaux récents [1–3] traitent de l'interaction d'ensembles d'aimants sphériques. Brièvement, un même nombre d'aimants peut être assemblé en de nombreuses structures qui sont relativement stables. Ce comportement rend ces structures utilisables dans des processus industriels, en particulier aux échelles micro et nanoscopiques. Les applications potentielles sont listées dans les papiers cités.

Ce travail est très connexe à celui que mène Messina [3] qui calcule l'énergie d'interaction entre aimants sphériques assemblés en forme de cercles et de tubes mais il s'occupe plutôt de formes quasi-polygonales présentant des points anguleux (cf. Fig. 3) dans les chaînes d'aimants. De plus la méthode de calcul est différente : les degrés de liberté géométriques sont réduits en imposant aux chaînes de passer par une courbe.

La raison de cette restriction est qu'on envisage à court terme, de façon connexe aux travaux de Schönke [1], d'étudier la dynamique de telles chaînes d'aimants et notamment la transition entre une chaîne quasi-polygonale et une autre. Pour cela, il est nécessaire de disposer d'une paramétrisation comportant un nombre de degrés de liberté réduit. Et c'est une telle paramétrisation qui est testée en se restreignant à la partie potentielle du problème qu'est l'énergie d'interaction magnétique.

En dépit de sa forme *a priori* assez simple, cette énergie d'interaction magnétique se révèle extrêmement complexe, comme le montre Schönke dans un autre article [2]. Aussi a-t-on procédé à une double démarche expérimentale et numérique pour obtenir quelques résultats fiables.

2 Modèle de calcul

2.1 Interaction de aimants sphériques uniformément aimantés

L'énergie d'interaction entre deux aimants sphériques identiques uniformément aimantés n et n' (de rayon R et de densité d'aimantation $m \approx 10^6$ A/m), dont les centres sont \mathbf{X}_n et $\mathbf{X}_{n'}$, est exactement celle de deux dipôles parfaits

$$V_{nn'} = \frac{V_0 R^3}{|\mathbf{X}_{nn'}|^3} \left(\frac{\mathbf{d}_n \cdot \mathbf{d}_{n'}}{3} - \frac{\mathbf{d}_n \cdot \mathbf{X}_{nn'}}{|\mathbf{X}_{nn'}|} \frac{\mathbf{d}_{n'} \cdot \mathbf{X}_{nn'}}{|\mathbf{X}_{nn'}|} \right) \quad (1)$$

où $\mathbf{X}_{nn'} = \mathbf{X}_n - \mathbf{X}_{n'}$, \mathbf{d}_n et $\mathbf{d}_{n'}$ sont les directions d'aimantation, et

$$V_0 = \frac{4\pi}{3} \mu_0 m^2 R^3 \approx 5 \times 10^6 R^3 \quad (\text{en joule si } R \text{ est en mètre}). \quad (2)$$

Le minimum de cette énergie d'interaction sous la contrainte $|\mathbf{X}_{nn'}| > 2R$ que les aimants ne s'interpénètrent pas est obtenu pour $\mathbf{d}_{n'} = \mathbf{d}_n$ et $\mathbf{X}_{nn} = \pm \mathbf{d}_n$: les axes polaires des aimants coïncident et le pôle nord de l'un est en contact avec le pôle sud de l'autre. Si les rayons des aimants sont millimétriques, ici $R \approx 2,5$ mm, cette énergie est 82 mJ ; c'est l'ordre de grandeur de l'énergie de deux objets collés par une colle forte sur une surface de l'ordre de la surface apparente πR^2 .

L'interaction dipolaire n'est pas toujours attractive : pour des aimants de même direction d'aimantation elle ne l'est que si l'un des aimants est situé dans un cône passant par le centre de l'autre et de demi-angle par rapport à l'axe commun d'aimantation de $54^\circ 44' 8''$; sinon les aimants se repoussent. Une description de tels « angles magiques » a été donnée par Messina [3].

2.2 Chaîne d'aimants fermée sur elle-même

L'énergie d'interaction d'un ensemble de N aimants est

$$V = \sum_{n=1}^N \sum_{n'=n+1}^N V_{nn'}. \quad (3)$$

Si l'on impose à ces aimants d'avoir une forme de chaîne fermée sur elle-même sans points doubles, les contraintes d'équidistance portant sur les coordonnées des centres sont

$$\text{Pour } n = 1, \dots, N-1 : |\mathbf{X}_{n+1} - \mathbf{X}_n| = 2R \quad \text{et} \quad |\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_N| = 2R. \quad (4)$$

Et donc, compte tenu qu'elle ne varie pas dans un mouvement de solide rigide en translation ou en rotation, V est fonction de $(3N - N + 2N - 6) = (4N - 6)$ degrés de liberté (ddls) ($\{3N$ coordonnées des $\mathbf{X}_n\} - \{N$ contraintes données par (4) $\} + \{2N$ coordonnées des $\mathbf{d}_n\} - \{6$ coordonnées décrivant le mouvement d'ensemble $\}$). Pour $N = 20$, on obtient 76 ddls, ce qui est beaucoup pour décrire des formes assez régulières.

Pour réduire ce nombre de degrés de liberté on impose aux centres des aimants d'être situés en s_1, \dots, s_N sur une courbe $\boldsymbol{\xi} : s \in [0, 1] \mapsto \boldsymbol{\xi}(s)$ telle que $\boldsymbol{\xi}(0) = \boldsymbol{\xi}(1)$. Ainsi si $s_N = 1$, il reste à chercher s_1, \dots, s_{N-1} tels que

$$\forall n = 1, \dots, N-1 : |\boldsymbol{\xi}(s_{n+1}) - \boldsymbol{\xi}(s_n)| = 2r. \quad (5)$$

C'est a priori toujours possible puisque r , qui est une variable du problème, s'ajuste pour cela. Les centres des aimants seront alors tels que

$$\forall n = 1, \dots, N : \mathbf{X}_n = \frac{R}{r} \boldsymbol{\xi}(s_n). \quad (6)$$

La courbe $\boldsymbol{\xi}$ dépend elle-même de paramètres dont le nombre formera les degrés de liberté associés au placement des aimants. On utilise des splines cubiques pour paramétrer $\boldsymbol{\xi}$ et ces degrés de liberté seront alors les $P < N$ points de contrôle $\boldsymbol{\xi}_p$ de ces splines.

2.3 Algorithme de calcul et post-traitement

L'énergie d'interaction V donnée par (3) dépend des P points de contrôle $\boldsymbol{\xi}_p$ de la paramétrisation de la courbe $\boldsymbol{\xi}$ et des N directions d'aimantation \mathbf{d}_n . À partir de valeurs initiales de ces arguments, on cherche d'abord pour les $\boldsymbol{\xi}_p$ fixés les directions d'aimantation qui minimisent V avec la méthode de Newton. Un minimum étant obtenu, pour les \mathbf{d}_n fixés on cherche les $\boldsymbol{\xi}_p$ qui minimisent V par une méthode de plus grande descente et ce, en réactualisant à chaque pas les s_n qui sont obtenus par une méthode de

Newton modifiée (par incorporation d'un contrôle de la longueur de pas dans la direction de descente). Ces deux étapes sont répétées jusqu'à obtention d'une valeur stable du minimum de V . La mise en œuvre de l'algorithme est assez complexe, les détails de calcul peuvent être trouvés dans la référence [4].

Comme il n'est pas très intéressant de connaître les forces généralisées associées aux degrés de liberté des points de contrôle ξ_p , les forces \mathbf{F}_n associées aux déplacements des \mathbf{X}_n sont calculées à l'issue du processus de minimisation de V par les formules usuelles de dérivation de (3) par rapport aux \mathbf{X}_n . Les couples associés aux rotations des \mathbf{d}_n sont également calculés et on les trouve nuls comme il doivent l'être.

Les forces \mathbf{F}_n ne sont elles pas nulles mais elles doivent être compensées par les forces de réaction $\mathbf{R}_{n \rightarrow n+1}$ de l'aimant n sur l'aimant $n+1$. On calcule donc ces forces de réaction par l'équation d'équilibre de chaque aimant

$$\forall n = 2, \dots, N : \mathbf{F}_n + \mathbf{R}_{(n-1) \rightarrow n} - \mathbf{R}_{n \rightarrow (n+1)} = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad \mathbf{F}_1 + \mathbf{R}_{N \rightarrow 1} - \mathbf{R}_{1 \rightarrow 2} = \mathbf{0} \quad (7)$$

et l'on trouve que les $\mathbf{R}_{n \rightarrow n+1}$ sont colinéaires aux $\mathbf{X}_{n+1} - \mathbf{X}_n$ (et de même sens) comme elles doivent l'être.

L'algorithme de calcul peut facilement être dégradé de 3D à 2D en enlevant une coordonnée aux points de contrôle. Dans ce cas, il est appelée algorithme 2D.

3 Étallonages

Les résultats du modèle de calcul sont comparés avec l'expérimentation sur le cas de la larme. La larme expérimentale est formée à partir de 19 aimants qui forment un cercle posé sur un plan horizontal. Le 20^e aimant est placé à proximité de ce cercle, il vient l'impacter (Fig. 1 à droite) et la chaîne prend la forme de la photographie au milieu de la figure 1. Cette forme est stable. Pour le vérifier elle est posée sur une table vibrante réglée pour une amplitude de 1 cm et une fréquence de 20 Hz, ce qui correspond à une accélération de 4 g .



FIGURE 1. La larme, de gauche à droite : superposition des cercles expérimentaux et calculés, photographie de la larme expérimentale (d'où sont issus les cercles expérimentaux) ; configuration expérimentale initiale menant à une larme ; configuration numérique initiale (avec les points de contrôle des splines indiqués par des étoiles *).

La larme numérique, en utilisant l'algorithme 2D, est également obtenue en partant d'un cercle de 19 aimants. Le 20^e est placé à la jonction entre deux aimants successifs de manière que le triangle défini par le centre des trois aimants soit équilatéral ; ce triangle est situé dans le plan formé par le plan qui passe par le point milieu des centres des deux aimants du cercle est dirigé suivant les tangentes à la courbe ξ prises sur les centres de ces deux aimants. Cette disposition est la configuration initiale. Après une centaine d'itérations de l'algorithme décrit dans la section précédente, une valeur stable de V est obtenue.

La forme obtenue pour cette valeur est la larme dessinée sur la figure 1 à gauche. Sur ce même dessin sont superposés les cercles extraits (manuellement) de la photographie du milieu de la figure et l'on peut observer qu'il y a une bonne concordance entre les formes issues du calcul et de l'expérience. Quantitativement il y a moins de 7% d'écart en distance relative entre les centres des cercles.

Pour finir, la valeur de de la force qui s'exerce sur l'aimant ajouté pour former la larme est calculée à 3,2 N. Un essai (relativement imprécis) d'extraction de cet aimant sur la configuration expérimentale sans déformer la chaîne que forment les autres aimants a conduit à une mesure de cette force à 3 N, donc du même ordre de grandeur.

4 Formes d'équilibre planes

De la même façon que pour la larme à 20 aimants qui possède $q = 1$ points anguleux, et toujours en utilisant l'algorithme 2D, des chaînes toujours à 20 aimants mais possédant q points anguleux (en équirépartissant au mieux la distance entre eux) peuvent être fabriquées. Ces chaînes sont l'œil ($q = 2$), le triangle ($q = 3$), le carré ($q = 4$), le pentagone ($q = 5$) ; la figure 2 montre ces chaînes. Elles sont toutes stables par passage à la table vibrante ; mais au-delà de $q = 5$ elles sont détruites.



FIGURE 2. Formes d'équilibre planes : cercle, larme, œil, triangle, carré et pentagone. Ces formes ne sont pas détruites par un passage sur table vibrante.

L'algorithme précédent permet de retrouver ces formes de chaînes. La figure 3 montre pour chacune les directions d'aimantation \mathbf{d}_n , les forces \mathbf{F}_n et les forces de réaction $\mathbf{R}_{n \rightarrow n+1}$. Le point support des \mathbf{d}_n est $\mathbf{X}_n - \mathbf{d}_n/2$ pour indiquer l'équirépartition du moment magnétique dans les aimants. Il est en \mathbf{X}_n pour les \mathbf{F}_n et en $(\mathbf{X}_n + \mathbf{X}_{n+1})/2$ pour les $\mathbf{R}_{n \rightarrow n+1}$, c'est-à-dire là où ces forces s'exercent.

On observe que les directions d'aimantation sont celles des tangentes sur les portions régulières situées entre les points anguleux ; sur ceux-ci elles sont les moyennes des tangentes à droite et à gauche. Les forces \mathbf{F}_n sont dirigées vers l'intérieur du domaine que limite les chaînes, créant ainsi une tension analogue à une pression ; l'intensité de ces forces sont plus grandes sur les points anguleux qu'ailleurs. Les forces de réaction sont bien dirigées normalement à la surface des aimants et dans le sens où elles empêchent les aimants de s'interpénétrer.

Les valeurs de V pour chacune des chaînes sont portées sur la figure 4. On observe qu'il y a une croissance à peu près linéaire de l'énergie d'interaction avec le nombre de points anguleux. La valeur du coefficient de pente est de l'ordre de 60% de $\Delta V = V_0/8(1/3 - 1)$ qui est la valeur minimale de l'énergie d'interaction de deux aimants seuls.

5 Formes d'équilibre gauches

Si les mêmes calculs sont menés avec l'algorithme 3D, les formes de cercle, de larme et de triangle restent planes. Par contre les formes de carré et le pentagone se gauchissent.

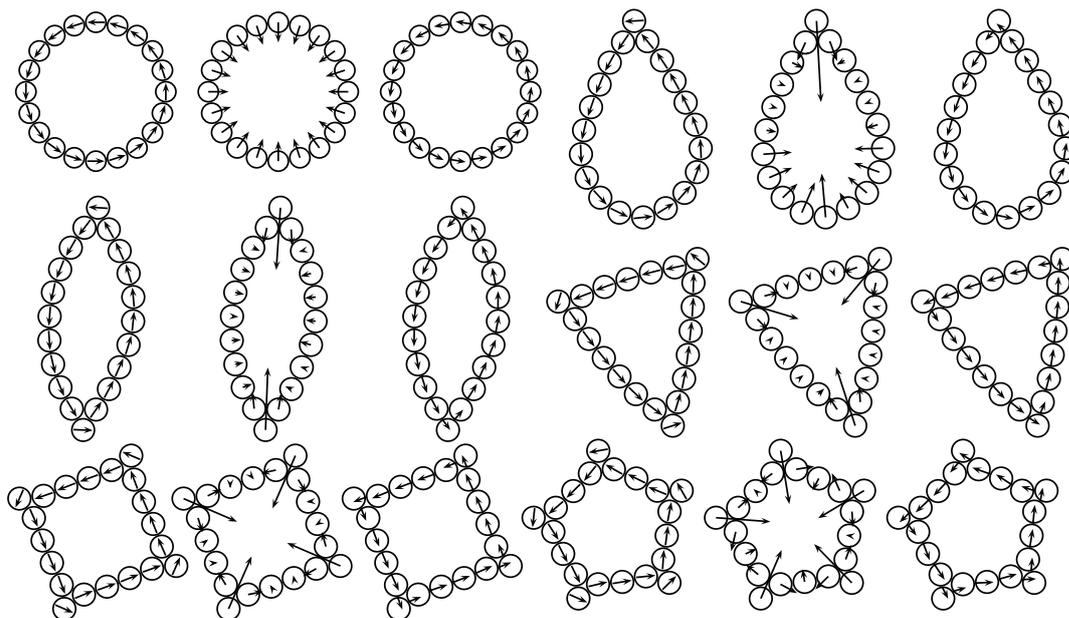


FIGURE 3. Pour chacune des formes de la figure 2 : trois tracés. Le premier montre les directions d'aimantation \mathbf{d}_n ; le deuxième, les forces \mathbf{F}_n ; le troisième, les forces de réaction $\mathbf{R}_{n \rightarrow n+1}$.

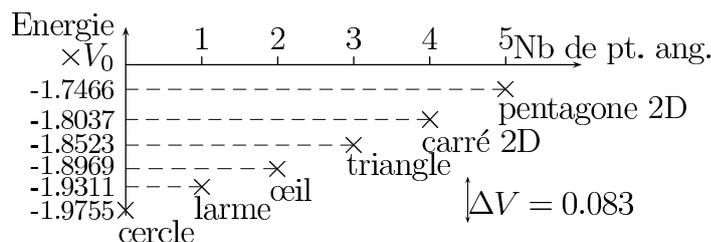


FIGURE 4. Énergies correspondant aux chaînes stables dans la configuration plane.

Expérimentalement, lorsqu'on suspend le carré par un fil comme sur la figure 5 (à gauche) et qu'on soumet cette suspension à la table vibrante, on obtient également un carré gauche. Ce carré reste cependant symétrique, il se présente comme l'assemblage de deux triangles qui forment entre eux un angle $\pi - 2\Theta$.

Le fait que le carré plan soit obtenu quand il est posé sur un plan horizontal alors que c'est un carré gauche quand il est suspendu s'explique par l'effet de la gravitation. L'énergie potentielle est en effet en $\sin \Theta$ pour le cas suspendu alors qu'elle est en $\cos \Theta$ pour le cas plan ; et l'angle Θ est assez faible (24° sur la figure 5, milieu).

Pour le vérifier on contraint la paramétrisation géométrique du carré à former un angle Θ variable, comme sur la figure 5 et l'on calcule pour différentes valeurs de cet angle la valeur minimale de l'énergie d'interaction. Le résultat est porté sur le graphe de la figure 5 à droite. On remarque que le carré plan ($\Theta = 0$) correspond en fait un maximum et le carré gauche à un minimum dans cette direction de variation. Par contre par rapport à toutes les directions qui conservent la chaîne à 4 points anguleux plane, le carré plan correspond à un minimum. Ce carré plan correspond donc à un point selle.

La différence d'énergie entre les carrés plan et gauche est toutefois très petite, de l'ordre de 0,2% de ΔV . Les aimants ayant un poids de 0,42 g, la différence d'énergie potentielle entre les formes planes et gauche pour un angle de 24° est de 0,5% ΔV lorsque le carré est suspendu et de 0,06% ΔV lorsqu'il est posé sur un plan horizontal. Ce qui confirme les observations tant expérimentales que numériques.

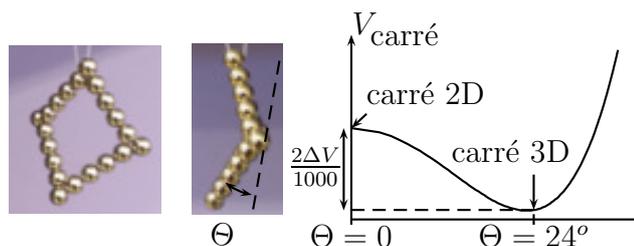


FIGURE 5. À gauche : le carré suspendu. Au milieu : vue de côté. À droite : l'énergie d'interaction en fonction de l'angle de déformation.

Ceci dit pour ces ordres de grandeur assez faibles d'énergies, le frottement sec des aimants pressés les uns contre les autres joue probablement un rôle et il faudrait sans doute le prendre en compte.

Cette dernière remarque est appuyée par le cas du pentagone : la figure 6 montre que le calcul fournit qualitativement la même forme que l'expérimentation ; la différence entre les énergies des formes 2D et 3D est de 1% ΔV . L'énergie potentielle devrait donc être vaincue même à plat alors que la forme 2D semble stable : comme cela n'arrive pas, c'est probablement parce qu'elle est bloquée par les forces de frottement de Coulomb.

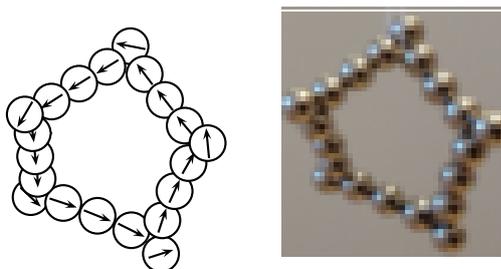


FIGURE 6. Pentagone. À gauche : calcul. À droite : expérience.

6 Conclusion

Le modèle présenté permet le calcul de la forme d'équilibre de chaînes d'aimants fermées sur elles-mêmes. Et les résultats de ce calcul sont globalement corroborés par l'expérimentation. On a pu observer des minima locaux de la fonction V dus à la présence de points anguleux dans la chaîne d'aimants ; ces formes sont assez stables et les valeurs d'énergies auxquelles elles correspondent permettent de quantifier cette stabilité.

Références

1. J. SCHÖNKE & E. FRIED, Stability of vertical magnetic chains, *Proc. R. Soc. A*, **473**, 20160703 (2017).
2. J. SCHÖNKE, T. M. SCHNEIDER & I. REHBERG, Infinite Geometric frustration in a cubic dipolar cluster, *Phys. Rev. B*, **91**, 020410 (2015).
3. R. MESSINA, L. A. KHADIL, & I. STANKIVIĆ, Self-assembly of magnetic balls: From chains to tubes, *Phys. Rev. E*, **89**, 011202 (2014).
4. G. VINSARD G. & S. DUFOUR, Computation of some equilibrium shapes of magnets' strings, soumis à *Eur. Phys. J. AP*.

Index des auteurs

Al-Sarraf Elias, 61
Almarcha Christophe, 61

Berhanu Michael, 1
Berman Simon Abraham, 19
Bodo Bertrand, 49
Boyer Frédéric , 31

Cébron David, 73
Castillo Gustavo, 1
Chandre Cristel, 19

Del Sarto Daniele, 7, 13
Denet Bruno, 61
Dubois Jonathan, 19
Dubourg Florine, 43
Dufour Stéphane, 85

Falcon Éric, 1

Gondran Alexandre, 25
Gondran Michel, 25

Herault Johann , 31

Ijspeert Auke Jan , 31

Joubaud Sylvain, 79

Kenoufi Abdel, 25
Kerr Yann, 55

Le Berre Martine, 37
Lehner Thierry, 37
Levy dit Vehel Victor, 43

Måløy Knut Jørgen, 43

Mangiarotti Sylvain, 55
Melo Kamilo , 31
Merlin Olivier, 55
Merminod Simon, 1
Molero Beatriz, 55
Morfu Saverio, 49
Mvogo Alain, 49

Neuhauser Mathis, 55

Ottaviani Maurizio , 13

Pegoraro Francesco, 7
Picard Clément, 79
Pomeau Yves, 37
Pucci Fulvia , 13

Quinard Joël, 61

Radisson Basile, 61
Ramos Osvanny, 43
Rojas Nicolás, 67

Tenerani Anna , 13
Thandiackal Robin , 31

Uzer Turgay, 19

Vanel Loïc , 43
Velli Marco , 13
Verrier Sébastien, 55
Vidal Jérémie, 73
Vidal Valérie, 79
Villiermaux Emmanuel, 61
Vinsard Gérard, 85

Annexes :

Programme du mini-colloque

Programme de la 21^e rencontre

« Non-linéarité et tremblements de terre »

Université Paris Diderot, **27 mars 2018**

Amphithéâtre Buffon, 15 rue Hélène Brion, Paris 13^e

Ce mini-colloque a pour but de réunir des chercheurs de différents horizons travaillant sur des problématiques liées aux tremblements de terre (friction, fracture, ondes élastiques etc.). L'objectif principal est d'identifier les aspects pour lesquels une approche de physique non-linéaire peut être utile. Le mini-colloque sera organisé en trois sessions : expériences de laboratoire, modélisation théorique et observations de terrain.

9h25 : Introduction

Introduction et expériences de laboratoire

9h30 : Alexandre Schubnel (Départ. de Géosciences, ENS)

[Earthquakes! In the laboratory...](#)

10h15 : Elsa Bayart (Départ. de Physique, ENS Lyon)

[Dynamique de rupture d'une faille de laboratoire](#)

10h45 – 11h15 : Pause Café

11h15 : Jean-Christophe Géminard (Départ. de Physique, ENS Lyon)

[Influence de vibrations mécaniques sur la friction](#)

11h45 : Xiaoping Jia (Institut Langevin, ESPCI)

[Acoustic probing and triggering of shear instability in granular media](#)

12h15 : Osvanny Ramos (Université Lyon 1, Lyon)

[Evolution of the distance between plates in an experimental granular fault. Implications for earthquake forecast](#)

12h35 – 14h00 : déjeuner

14h00 : Tristan Baumberger (INSP, Université Pierre et Marie Curie)

[Des hydrogels pour l'étude de la rupture sismique](#)

Modèles de tremblements de terre

14h30 : Takahiro Hatano (Earthquake Research Institute, Université de Tokyo, Japon)

[Friction and earthquakes: Bridging across scales](#)

15h00 : Alberto Rosso (LPTMS, Université d'Orsay)

[Viscoelastic effects in avalanche dynamics: A key to earthquake statistics](#)

15h30 : Harsha S. Bhat (Départ. de Géosciences, ENS)

[Dynamics of Fault and Fracture Networks](#)

16h00 – 16h30 : Pause Café

Données de terrain

16h30 : Michel Campillo (Isterre, Grenoble)

[Suivi temporel des vitesses sismiques dans la croûte et de la susceptibilité avec des enregistrements continus](#)

17h00 : Renaud Toussaint (IPGS, Strasbourg)

[Friction dans les milieux granulaires, gouges de failles et sols liquéfiés : rôle du fluide et des anisotropies sur la rhéologie](#)

17h30 : Anne Mangeney (IPGP, Paris)

[Clues on triggering and dynamics of rockfalls from seismic observation](#)

18h00 : Clôture

21^e Rencontre du Non-Linéaire

Université Paris Diderot, 27 – 29 mars 2018

Bienvenue à la 21^e Rencontre du Non-Linéaire 2018 qui aura lieu à l'Université Paris Diderot, amphithéâtre Buffon, 15 rue Hélène Brion, Paris 13^e.

Nous aurons 87 contributions se répartissant en 4 conférences invitées, 12 communications longues et 71 communications courtes.

Mercredi 28 mars 2018

09h10 : **Introduction**

09h15 - 10h00 : **Conférence invitée 1 (40 + 5 min.)**

10h00 - 10h30 : **Présentation des posters (2 + 0.5 min.) - 12 communications courtes**

10h30 - 11h15 : **Pause café Posters (45 min.)**

11h15 - 11h45 : **Présentation des posters (2 + 0.5 min.) - 12 communications courtes**

11h45 - 12h30 : **Exposés longs (20 + 2 min.) - 2 communications longues**

12h30 - 14h00 : Déjeuner

14h00 - 14h45 : **Exposés longs (20 + 2 min.) - 2 communications longues**

14h45 - 15h40 : **Présentation des posters (2 + 0.5 min.) - 21 communications courtes**

15h40 - 17h00 : **Pause café Posters (1h20)**

17h00 - 17h45 : **Exposés longs (20 + 2 min.) - 2 communications longues**

17h45 - 18h30 : **Conférence invitée 2 (40 + 5 min.)**

18h30 - 20h30 : Cocktail

Jeudi 29 mars 2018

09h15 - 10h00 : **Conférence invitée 3 (40 + 5 min.)**

10h00 - 10h35 : **Présentation des posters (2 + 0.5 min.) - 14 communications courtes**

10h35 - 11h45 : **Pause café Posters (1h10)**

11h45 - 12h30 : **Exposés longs (20 + 2 min.) - 2 communications longues**

12h30 - 14h00 : Déjeuner

14h00 - 14h45 : **Exposés longs (20 + 2 min.) - 2 communications longues**

14h45 - 15h15 : **Présentation des posters (2 + 0.5 min.) - 12 communications courtes**

15h15 - 16h15 : **Pause café Posters (1h)**

16h15 - 17h00 : **Exposés longs (20 + 2 min.) - 2 communications longues**

17h00 - 17h45 : **Conférence invitée 4 (40 + 5 min.)**

Nous remercions l'Université Paris Diderot de mettre à notre disposition les locaux de la Rencontre. Nous remercions également le CNRS (INSIS), l'Institut Universitaire de France, le Département de Physique de l'ENS, le Département MEP de l'Université Paris Saclay, les laboratoires INPHYNI, MSC, l'Institut Langevin, Lab. de Physique de ENS Lyon, de subvenir aux frais de la Rencontre, ce qui la rend entièrement gratuite pour tous les participants. Cette année, nous sommes 137 inscrits au 9 mars 2018.

Le Comité d'Organisation de la RNL 2018 :

E. Falcon, M. Lefranc, F. Pétrélis & C.T. Pham

Mercredi 28 mars 2018

09h15 - 10h00 : Conférence invitée par Keith MOFFATT (40 + 5 min.)
The Navier-Stokes Singularity Problem

10h00 - 10h30 : Présentation des posters (2 + 0.5 min.) - 12 communications courtes

[Du grain à l'agrégat : croissance d'un milieu granulaire humide](#)

G. Saingier, A. Sauret, P. Jop, présenté par G. Saingier

[Pénétration d'un milieu granulaire dans un liquide](#)

G. Saingier, A. Sauret, P. Jop, présenté par P. Jop

[Précurseurs d'avalanche dans un modèle frictionnel](#)

A. Amon, B. Blanc, J.-C. Géminard, présenté par A. Amon

[Experimental realization & mean-field dynamics of a globally-coupled network of semiconductor lasers](#)

A. Dolcemascolo, F. Marino, R. Veltz, S. Barland, présenté par A. Dolcemascolo

[Propagation et collisions de solitons de phase dissipatifs dans un laser à semi-conducteur forcé](#)

P. Walczak, C. Riboldi, F. Gustave, L. Columbo, M. Brambilla, F. Prati, G. Tissoni, S. Barland, présenté par P. Walczak

[Study of the partially-coherent light dynamics in optical fibre using Heterodyne Temporal Microscopy](#)

A. Tikan, S. Bielawski, C. Sz waj, S. Randoux, P. Suret, présenté par A. Tikan

[Dynamique de films liquides de suspensions](#)

P. Raux, A. Troger, P. Jop et A. Sauret, présenté par P. Raux

[Effets capillaires dans des films de suspensions : entraînement et drainage](#)

A. Sauret, B. Colnet, M. Gomez, G. Saingier, H. A. Stone, M. Z. Bazant, E. Dressaire, présenté par A. Sauret

[Stabilisation de la cavitation d'une suspension de particules](#)

A. Bussonnière, Q. C. Liu, P. A. Tsai, présenté par A. Bussonnière

[Quasi-singularités dans l'écoulement turbulent d'une soufflerie](#)

M. Le Berre, T. Lehner, Y. Pomeau, présenté par M. Le Berre

[Effets de taille finie en turbulence de paroi transitionnelle](#)

J. Rolland, présenté par J. Rolland

[Une méthode pour mesurer efficacement les fluctuations rares de l'intensité de la turbulence](#)

T. Nemoto, A. Alexakis, présenté par T. Nemoto

10h30 - 11h15 : Pause café Posters (45 min.)

11h15 - 11h45 : Présentation des posters (2 + 0.5 min.) - 12 communications courtes

[Ondes internes et écoulement moyen oscillant générés par de la convection pénétrante](#)

L.-A. Couston, D. Lecoanet, B. Favier, M. Le Bars, présenté par B. Favier

[Statistiques conditionnelles des structures cohérentes en convection turbulente de Rayleigh-Bénard](#)

A. Castillo-Castellanos, A. Sergent, B. Podvin, M. Rossi, présenté par A. Castillo-Castellanos

[Rayleigh-Bénard convection interacting with a melting boundary](#)

J. Purseed B. Favier, L. Duchemin, présenté par J. Purseed

[Numerical modelling of turbulent convection in an asymmetric rough Rayleigh-Bénard cell](#)

M. Belkadi, A. Sergent, B. Podvin, présenté par M. Belkadi

[Shell models applied to kinetic turbulence of trapped particles in magnetized plasmas](#)

S. Xu, P. Morel, Ö. D. Gür can, présenté par S. Xu

[Nonlinear wave-particle dynamics of energetic-particle driven instabilities in tokamak plasmas](#)

A. Biancalani, I. Chavdarovski, Z. Qiu, A. Bottino, D. Del Sarto, A. Ghizzo, Ö. Gür can, P. Morel, I. Novikau, présenté par A. Biancalani

[Phase space perspective on the coherent buildup of high harmonic radiation](#)

S. A. Berman, C. Chandre, M. Perin, T. Uzer, présenté par S. Berman

[Influence d'une paroi rugueuse sur l'écoulement d'un fluide complexe](#)

M. Marchand, E. Rio, F. Restagno, F. Boulogne, présenté par M. Marchand

[Motifs d'érosion créés par ruissellement sur substrat soluble](#)

A. Guérin, M. Berhanu, J. Derr, S. Courrech du Pont, présenté par A. Guerin

[Dualité onde corpuscule macroscopique à 2 corps : source du chaos](#)

L. Tadrict, N. Sampara, P. Schlagheck, T. Gilet, présenté par L. Tadrict

[Percolation et convexification de clusters](#)

D. Martin-Calle, O. Pierre-Louis, présenté par D. Martin-Calle

[Le modèle du muscle de Hill : une affaire de conditions aux limites](#)

Y. D'Angelo, V. Bels, H. Ouerdane, P. Lecoeur, C. Goupil, présenté par E. Herbert

11h45 - 12h30 : Exposés longs (20 + 2 min.) - 2 communications longues

[Modélisation stochastique de l'évolution à temps long du système solaire](#)

E. Woillez, F. Bouchet, présenté par E. Woillez

[A l'écoute du corps : émergence d'une nage cohérente induite par des réflexes sensoriels](#)

J. Herault, F. Boyer, R. Thandiackal, K. Melo, A. Ijspeert, présenté par J. Herault

12h30 - 14h00 : Déjeuner

14h00 - 14h45 : Exposés longs (20 + 2 min.) - 2 communications longues

[La forme des arbres décrite par une dynamique de front](#)

L. Duchemin, C. Eloy, E. Badel, B. Mouliat, présenté par L. Duchemin

[Entraînement magnétique des océans dans les lunes de Jupiter](#)

C. Gissinger, L. Petitdemange, présenté par C. Gissinger

14h45 - 15h40 : Présentation des posters (2 + 0.5 min.) – 21 communications courtes

[Effet du vent sur les propriétés statistiques des vagues océaniques : une étude numérique](#)

Y.-M. Ducimetière, D. Eeltink, A. Armaroli, M. Brunetti, J. Kasparian, présenté par A. Armaroli

[Génération de vagues de tsunami par effondrement granulaire](#)

M. Robbe-Saule, C. Morize, Y. Bertho, A. Sauret, P. Gondret, présenté par M. Robbe-Saule

[Transition entre turbulence d'ondes dans une plaque mince et turbulence d'ondes dans une membrane élastique](#)

R. Hassaini, N. Mordant, présenté par R. Hassaini

[Un résultat exact sur la turbulence forte d'ondes dans les plaques minces](#)

G. Düring, G. Krstulovic, présenté par G. Krstulovic

[Mécanique du pli simple](#)

T. Jules, F. Lechenault, M. Adda-Bedia, présenté par T. Jules

[Le tricot, un matériau amorphe ?](#)

S. Poincloux, M. Adda-Bedia, F. Lechenault, présenté par S. Poincloux

[Instabilités de déchirure](#)

B. Roman, I. Syvak, E. Hamm, présenté par B. Roman

[De la réinterprétation des actions en mécanique classique à celle de la fonction d'onde en mécanique quantique](#)

M. Gondran, A. Gondran, A. Kenoufi, présenté par M. Gondran

[Théorie spectrale pour des applications de Poincaré aléatoires](#)

M. Baudel, N. Berglund, présenté par M. Baudel

[Particule dans un puits de potentiel périodique en temps](#)

A. Lazarus, O. Devauchelle, F. James, présenté par A. Lazarus

[Confotronics of biofilaments](#)

H. Mohrbach, présenté par H. Mohrbach

[Synchronization of oscillatory activity and waves in neuronal networks with spatially structured connectivity](#)

A. Kulkarni, J. Ranft, V. Hakim, présenté par J. Ranft

[Chaos et irréversibilité dans des suspensions biologiques](#)

S. Chibbaro, A. Decoene, S. Martin, F. Vergnet, présenté par S. Chibbaro

[Slowdown of the surface diffusion during the early stages of bacterial colonization](#)

T. Vourc'h, J. Léopoldès, H. Peerhossaini, présenté par T. Vourc'h

[L'intermittence dans les modèles de dynamo turbulente, quel moment prédit le seuil de l'instabilité?](#)

K. Seshasayanan, F. Pétrélis, présenté par K. Seshasayanan

[Etude de la nature de la bifurcation dynamo obtenue à l'aide de simulations géodynamos](#)

L. Petitdemange, présenté par L. Petitdemange

[Precessing spherical shells: flows, dissipation, dynamo and the lunar core](#)

R. Laguerre, D. Cébron, J. Noir, N. Schaeffer, présenté par R. Laguerre

[Dynamique non linéaire de vortex hélicoïdaux](#)

I. Delbende, M. Rossi, C. Selçuk, présenté par I. Delbende

[Écoulement et entraînement d'air autour d'un cylindre vertical partiellement immergé](#)

V. Ageorges, J. Peixinho, G. Perret, présenté par V. Ageorges

[Influence de la condition limite sur les instabilités dans un écoulement tournant avec surface libre, à faible Reynolds](#)

A. Faugaret, L. Martin Witkowski, Y. Duguet, Y. Fraigneau, présenté par A. Faugaret

[Asymptotic simulations of orbitally driven flows in ellipsoïdes](#)

J. Vidal, D. Cébron, présenté par J. Vidal

15h40 - 17h00 : Pause café Posters (1h20)

17h00 - 17h45 : Exposés longs (20 + 2 min.) - 2 communications longues

[L'élasticité est-elle indispensable pour la turbulence élastique ?](#)

E. L. C. Vi M. Plan, S. Musacchio, D. Vincenzi, présenté par D. Vincenzi

[Contrôle d'une instabilité spatio-temporelle au centre de rayonnement Synchrotron SOLEIL](#)

C. Évain, C. Sz waj, E. Roussel, M. Le parquier, M.-A. Tordeux, M. Labat, F. Ribeiro, N. Hubert, J.-B. Brubach, P. Roy, S. Bielawski, présenté par C. Évain

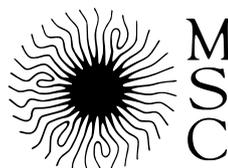
17h45 - 18h30 : Conférence invitée par Salima RAFAÏ (40 + 5 min.)

Du plancton comme modèle de particule active ?

18h30 – 20h30 : Cocktail (présentation du badge obligatoire)



Institut Langevin
ONDES ET IMAGES



Jeudi 29 mars 2018

09h15 - 10h00 : Conférence invitée par Agnese SEMINARA (40 + 5 min.)
Fungal Spore Discharge and Dispersal in the Atmosphere

10h00 - 10h35 : Présentation des posters (2 + 0.5 min.) – 14 communications courtes

Self-assembly of superparamagnetic colloids in a quasi-two-dimensional vessel

N. Rojas, présenté par N. Rojas

Dispersion relations of random waves in a vibrated 2D granular medium with magnetic dipolar interactions

M. Berhanu, S. Merminod, E. Falcon, G. Castillo, présenté par M. Berhanu

Formes d'équilibre de chaînes fermées d'aimants sphériques

G. Vinsard, S. Dufour, présenté par G. Vinsard

Impact des changements climatiques sur les structures spatiales de tourbières

C. Béguin, M. Brunetti, J. Kasparian, présenté par J. Kasparian

Propriétés statistiques multi-échelles de produits satellitaires SMOS d'humidité du sol désagrégés à la résolution kilométrique

M. Neuhauser, S. Verrier, S. Mangiarotti, O. Merlin, B. Molero, Y. Kerr, présenté par M. Neuhauser

Simulation d'un modèle à dérivée fractionnaire décrivant l'activité électrique des cellules bêta du pancréas

S. Morfu, B. Bodo, A. Mvogo, présenté par S. Morfu

Propagation of dipoles in non-linear elastic media

G. Saggiorato, M. Lenz, présenté par G. Saggiorato

Branched wrinkles in inhomogeneous film-on-substrate systems

B. Kaoui, R. Aichele, F. Ziebert, W. Zimmermann, présenté par B. Kaoui

Few atoms non-linear rheology of a molecular gold meniscus

J. Comtet, A. Laine, A. Nigues, L. Bocquet, A. Siria, présenté par J. Comtet

Matched asymptotic solution for crease nucleation in soft solids

P. Ciarletta, présenté par P. Ciarletta

Dynamique des vortex dans un modèle non local de superfluide

J. Reneuve, J. Salort, L. Chevillard, présenté par J. Reneuve

Tumbling dynamics of inertial chains in extensional flow

C. Henry, G. Krstulovic, J. Bec, présenté par C. Henry

Fragmentation d'agrégats de particules magnétiques en turbulence

H. De La Rosa Zambrano, G. Verhille, P. Le Gal, présenté par P. Le Gal

Critical transitions in geometrically constrained incompressible turbulence

A. van Kan, A. Alexakis, présenté par A. van Kan

10h35 - 11h45 : Pause café Posters (1h10)

11h45 - 12h30 : Exposés longs (20 + 2 min.) - 2 communications longues

Convection turbulente forcée radiativement : du régime de Rayleigh-Bénard au régime ultime

S. Lepot, S. Aumaître, B. Gallet, présenté par S. Lepot

Chaotic motion of a charged particle in a magnetic field and creation of transport barriers

X. Leoncini, S. Ogawa, G. Dif-Pradalier, M. Vittot, X. Garbet, B. Cambon, D. Del-Castillo Negrete, présenté par X. Leoncini

12h30 - 14h00 : Déjeuner

14h00 - 14h45 : Exposés longs (20 + 2 min.) - 2 communications longues

Sillage de bateaux et non-linéarités

C. Caplier, G. Rousseaux, D. Callaud, L. David, présenté par G. Rousseaux

Bifurcation dans la configuration électronique d'un atome soumis à un champ laser de forte intensité

J. Dubois, S. A. Berman, C. Chandre, T. Uzer, présenté par J. Dubois

14h45 - 15h15 : Présentation des posters (2 + 0.5 min.) – 12 communications courtes

Formation de motifs spiralés à la surface libre d'une couche mince de liquide

H. Yoshikawa, S. Satoh, C. Mathis, présenté par H. Yoshikawa

Localized Faraday patterns with inhomogeneous parametric excitation

H. I. Ramos Urra, S. Coulibaly, L. Gordillo, M. A. García-Ñustes, présenté par H. I. Ramos Urra

Vortex stretching in vibration induced streaming at high forcing

S. Amir Bahrani, N. Périnet, M. Costalonga, L. Royon, P. Brunet, présenté par S.-A. Bahrani

Wave propagation through contact-based elastically asymmetric materials

V. A. Yastrebov, présenté par V. A. Yastrebov

Vélocimétrie Doppler par ondes de surface dans un métal liquide et mesure des bifurcations de l'écoulement sous-jacent

T. Humbert, S. Aumaître et B. Gallet, présenté par T. Humbert

Violation de la fermeture gyrotropique dans les plasmas magnétisés, causée par un cisaillement de vitesse

D. Del Sarto, F. Pegoraro, présenté par D. Del Sarto

Spontaneous magnetic reconnection of thin current sheets

D. Del Sarto, M. Ottaviani, F. Pucci, A. Tenerani, M. Velli, présenté par A. Tenerani

Transport de particules dû aux modes acoustiques géodésiques énergétiques

D. Zarzoso, D. del Castillo Negrete, X. Garbet, Y. Sarazin, V. Grandgirard, S. Benkadda, M. Sasaki, présenté par D. Zarzoso

L'origine du « pop » d'une bulle de savon

A. Bussonnière, A. Antkowiak, F. Ollivier, M. Baudoin, R. Wunenburger, présenté par A. Bussonnière

Signature acoustique sub-surface de l'éclatement d'une bulle

M. Poujol, A. Antkowiak, F. Ollivier, R. Wunenburger, J. Pierre, présenté par M. Poujol

Remontée de bulles dans une suspension dense

V. Vidal, C. Picard, S. Joubaud, présenté par V. Vidal

Absorption d'une onde ultrasonore par un plan de bulles microfluidiques

T. Combriat, P. Marmottant, présenté par T. Combriat

15h15 - 16h15 : Pause café Posters (1h)

16h15 - 17h00 : Exposés longs (20 + 2 min.) - 2 communications longues

Dynamique non linéaire des flammes de prémélange : description en pôles

B. Radisson, C. Almarcha, E. Al Sarraf, J. Quinard E. Villermaux, B. Denet, présenté par B. Radisson

Nage par flambage

A. Djellouli, P. Marmottant, H. Djeridi, C. Quilliet, G. Coupier, présenté par C. Quilliet

17h00 - 17h45 : Conférence invitée par Christophe CLANET (40 + 5 min.)

Physics in Modern Olympic Games

21^e Rencontre du Non-Linéaire
Université Paris Diderot
Paris 2018

ISBN 978-2-9538596-7-6
EAN 9782953859676

Non-Linéaire Publications (NL Pub.)
Site universitaire du Madrillet — BP 12
78801 St-Étienne du Rouvray Cedex



**21^e Rencontre du Non Linéaire
Université Paris Diderot
Paris 2018**

ISBN 978-2-9538596-7-6
EAN 9782953859676

<http://nonlineaire.univ-lille1.fr/SNL/>