Classification des symétries de l'Elasticité par les covariants

Marc Olive[1], Boris Kolev[1], Rodrigue Desmorat[1] & Boris Desmorat[2]

[1] Université Paris-Saclay, ENS Paris-Saclay, CNRS, LMT - Laboratoire de Mécanique et Technologie, 94235, Cachan, France
[2] Institut d'Alembert, Sorbonne Université, CNRS UMR 7190, F-75252 Paris Cedex 05, France
marc.olive@math.cnrs.fr

En hyperélasticité linéaire, la loi de Hooke généralisée est une relation linéaire $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}\boldsymbol{\varepsilon}$ entre le tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ et le tenseur des petites déformations $\boldsymbol{\varepsilon}$, tous deux symétriques d'ordre 2. Un tenseur d'élasticité $\mathbf{E}$ est un tenseur d'ordre 4, caractérisé par les symétries indicielles

$$E_{ijkl} = E_{jikl} = E_{ijlk} = E_{klij}$$

et ces tenseurs définissent un espace vectoriel réel $\mathbb{E}\mathrm{la}$ de dimension 21.

Les caractéristiques élastiques d'un matériau ne dépendent pas de son orientation dans l'espace, et de tels matériaux sont donc représentés par une *orbite* d'un tenseur sous l'action du groupe SO(3) des rotations de l'espace. Il est ainsi important de comprendre l'espace des orbites $\mathbb{E}\mathrm{la}/\mathrm{SO}(3)$, qui est une *variété semi-algébrique* [2]. La stratification de cet espace fait intervenir des *classes de symétries* (classes de conjuguaisons de sous-groupes d'isotropie), ces classes ayant été établies en 1996 par Forte–Vianello [1] (voir figure 1).

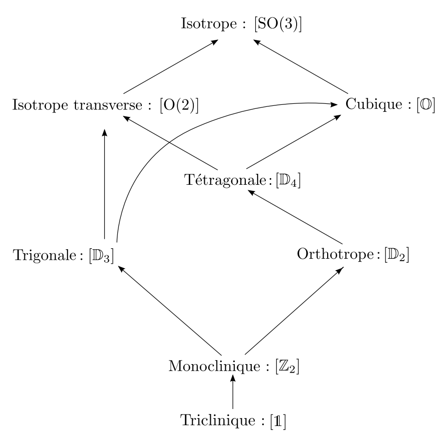

Figure 1. Les 8 classes de symétries de l'espace $\mathbb{E}\mathrm{la}$

Il faut maintenant être capable de déterminer effectivement la classe de symétrie d'un tenseur donné. Pour cela, nous avons dans un premier temps défini une algèbre de covariants (constitués de tenseurs totalement symétriques), qui est de type fini. Par complexification, on fait alors intervenir le groupe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ (revêtement universel du groupe $\mathrm{SO}(3,\mathbb{C})$), ce qui permet d'utiliser des résultats de *théorie classique des invariants* sur les formes binaires [3]. Fort d'une famille génératrice fini de l'algèbre des covariants, nous avons finalement obtenu des équations algébriques explicites pour chaque classe de symétrie de l'espace $\mathbb{E}\mathrm{la}$.

Références

1. S. Forte & M. Vianello, Symmetry classes for Elasticity Tensors, *Journal of Elasticity*, **43**, 81–108 (1996).
2. C. Procesi & G. Schwarz, Inequalities defining orbit spaces, *Invent. mathematicae*, **81**, 539–554 (1985).
3. P. Olver, Classical Invariant Theory, *Cambridge University Press*, (1999).