Stabilité d'un ferrofluide en apesanteur confine entre deux cylindres en rotation différentielle

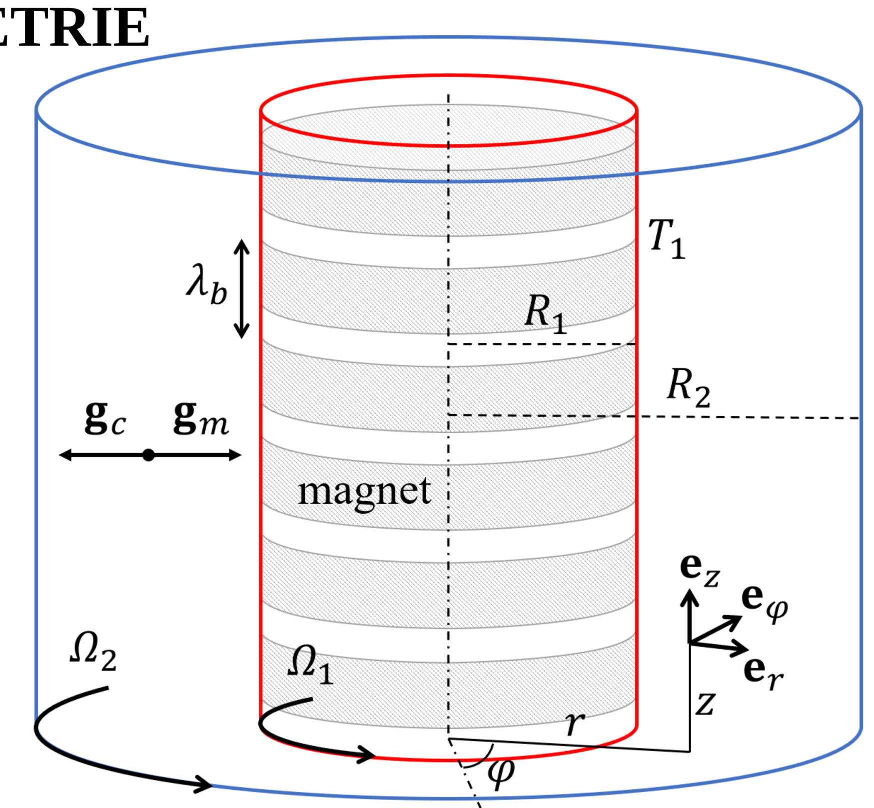
Antoine Meyer, Innocent Mutabazi, Anupam Hiremath

Normandie Université, UNIHAVRE, CNRS UMR 6294, Laboratoire Ondes et Milieux Complexes, Le Havre, 76058, France

INTRODUCTION

On étudie la stabilité d'un ferrofluide confiné entre deux cylindres tournant à des vitesses différentes et maintenus à des températures différentes. Le ferrofluide est soumis à un champ magnétique produit par un empilement d'aimant situé à l'intérieur du cylindre intérieur. Deux poussées thermiques rentrent alors en jeu: la poussée thermomagnétique et la poussée centrifuge. On évalue l'influence de la viscosité du ferrofluide, qui peut grandement changer d'un fluide à l'autre.

GEOMETRIE



CHAMPS MAGNETIQUE

En considérant que $H \gg M$ le potentiel magnétique ϕ est introduit :

$$\begin{cases} \boldsymbol{B} = \nabla\phi \\ \nabla^2\phi = 0 \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\phi = C_0 K_0(k_b r) sin(k_b z)}$$

où K_0 est la fonction de Bessel modifiée du deuxième type et ou $k_b = 2\pi/\lambda_b$.

$$|\boldsymbol{B}| = B_0 K_0(k_b r)\underbrace{\sqrt{1 + \left[\left(\frac{K_1(k_b r)}{K_0(k_b r)}\right)^2 - 1\right]\sin^2(k_b z)}}_{< 1.1 \text{ pour } \eta \geq 0.75 \text{ (avec } \lambda_b/d = 3.54)}$$

POUSSEE THERMOMAGNETIQUE

La force de Kelvin : $\boldsymbol{F}_K = M\nabla B = -M B_0 k_b K_1(k_b r)\boldsymbol{e}_r$

L'aimentation M et la densité ρ dépendent de la température : $M = M_2(1-\alpha_m\theta)$ et $\rho = \rho_2(1-\alpha\theta)$, $\theta = T - T_2$

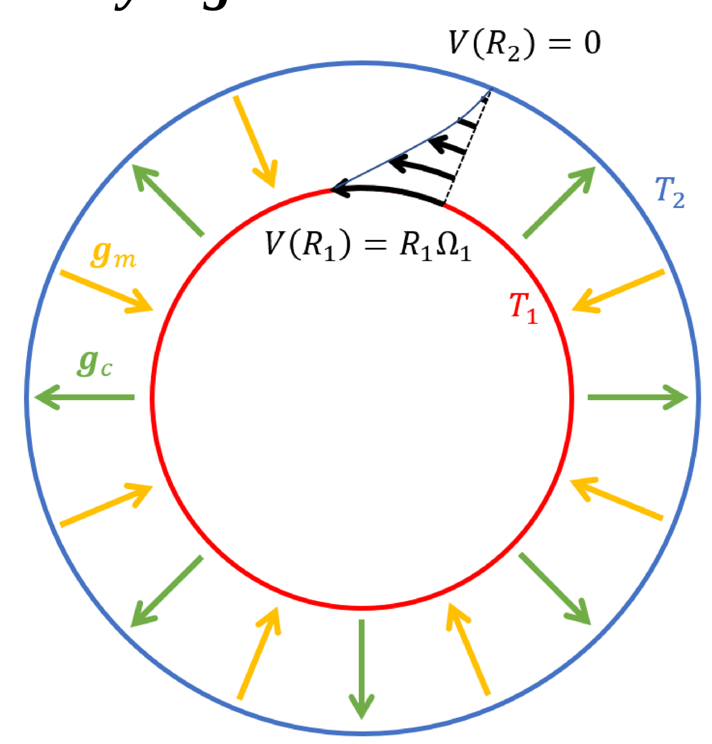
$$\boxed{\boldsymbol{F}_K = \underbrace{\alpha_m M_{ref} B_0 k_b K_1(k_b r)\theta \boldsymbol{e}_r}_{-\alpha\theta\rho_{ref}\boldsymbol{g}_m} + \nabla\left[M_{ref} B_0 K_0(k_b r)\right]}$$

La gravité magnétique : $\boldsymbol{g}_m = -\frac{\alpha_m M_{ref} B_0 k_b K_1(k_b r)}{\alpha\rho_{ref}}\boldsymbol{e}_r$

RESULTATS $\mu = 0$

Rotation du cylindre intérieur

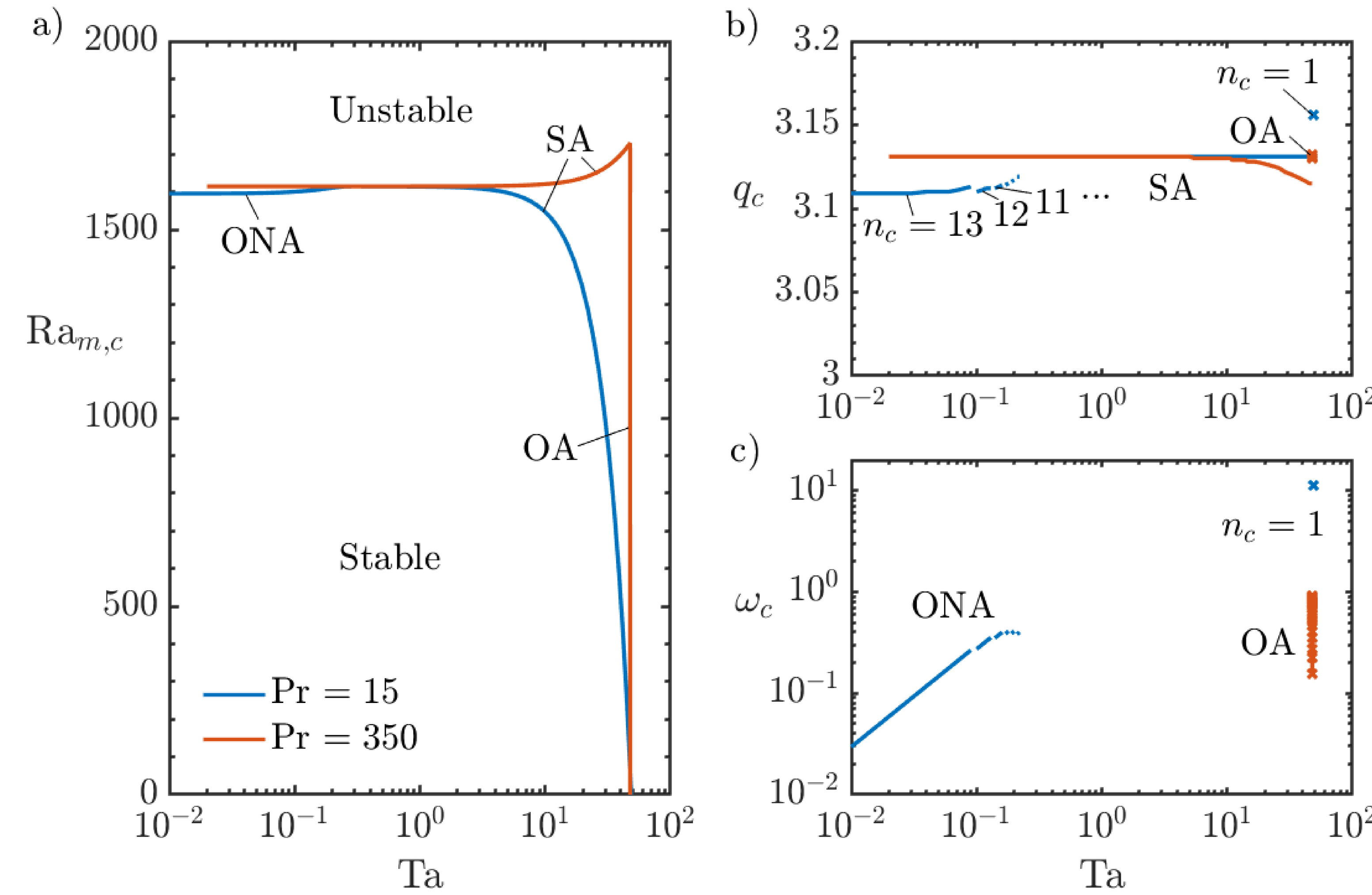
Régime ***Rayleigh instable***.



Force centrifuge déstabilisante

Poussée centrifuge stabilisante

Poussée thermomagnétique déstabilisante

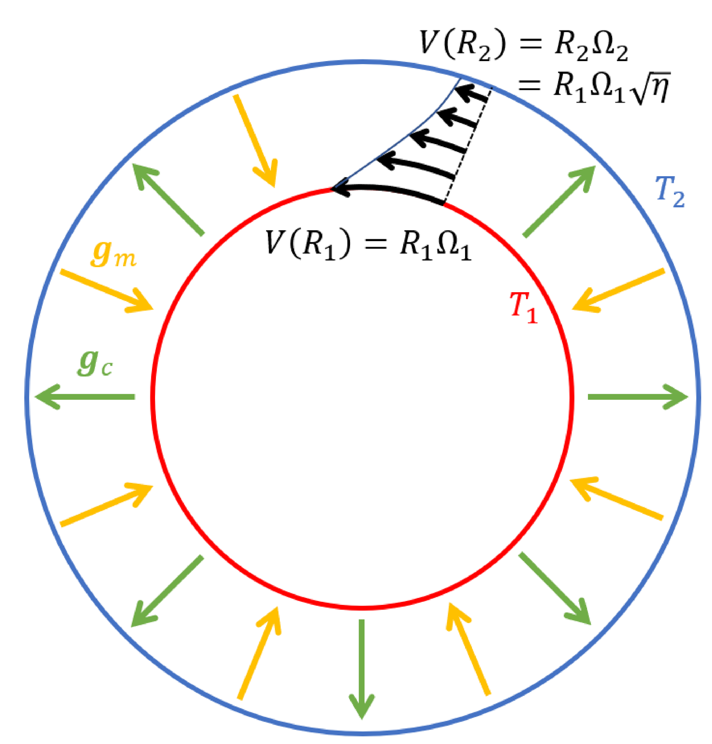


Paramètres critiques en fonction de Ta pour $\mu = 0$, $\eta = 0.8$, $\gamma_a = 0{,}01$ et pour deux ferrofluides différents.

RESULTATS $\mu = \eta^{3/2}$

Régime Képlérien

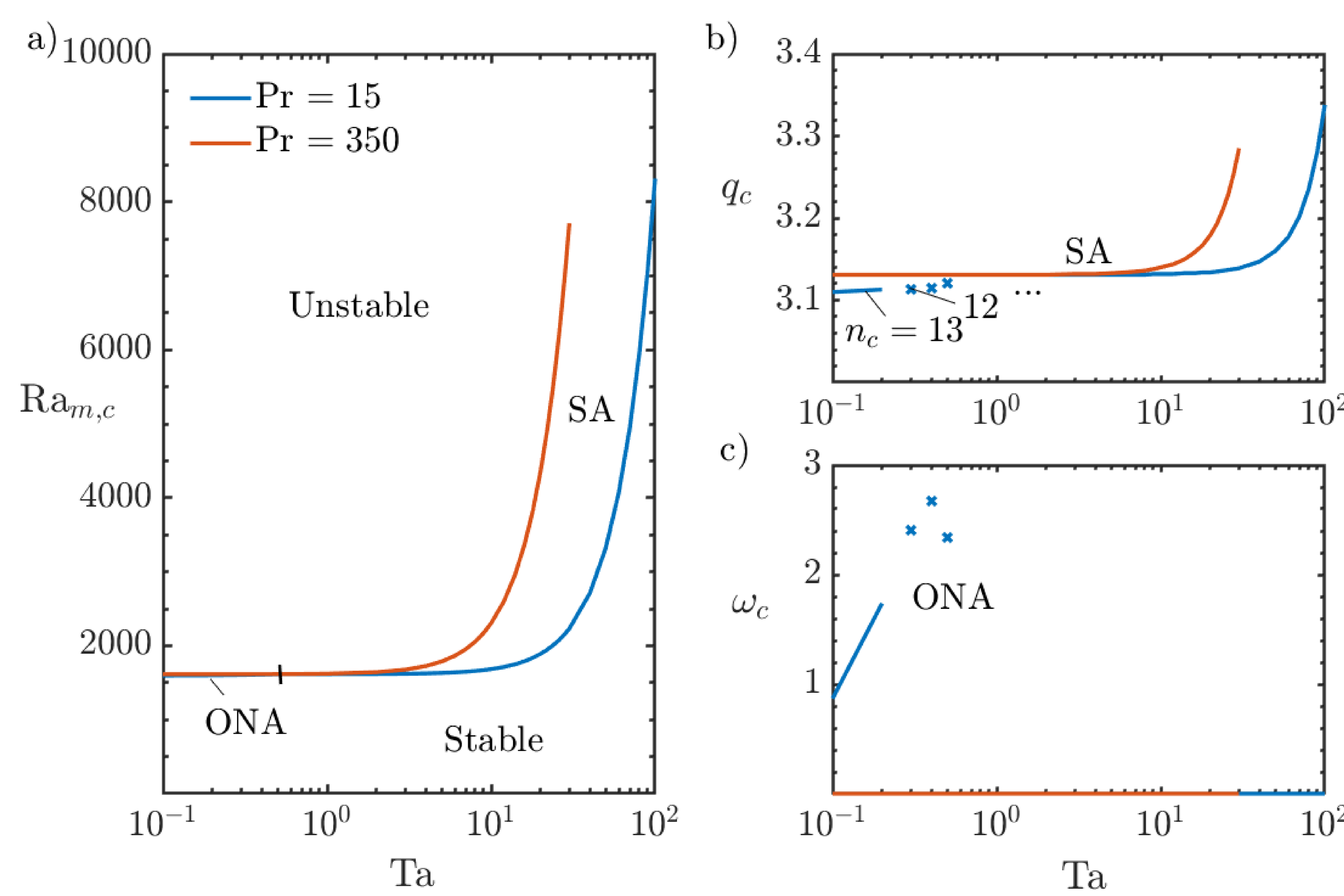
Régime ***Rayleigh stable***.



Force centrifuge stabilisante

Poussée centrifuge stabilisante

Poussée thermomagnétique déstabilisante



Paramètres critiques en fonction Ta pour $\mu = \eta^{3/2}$, $\eta = 0.8$, $\gamma_a = 0.01$ et pour deux ferrofluides différents.

EQUATIONS FONDAMENTALES

Continuité: $\nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0$

Quantité de Mouvement:

$$\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} = -\nabla\pi + \nabla^2\boldsymbol{u} - \left(\gamma_a\frac{v^2}{r} - \frac{Ra_m}{Pr}\frac{g_m(r)}{g_m(\bar{R})}\right)\theta\boldsymbol{e}_r$$

Energie $\frac{\partial\theta}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\theta = \frac{1}{Pr}\nabla^2\theta$ $\qquad \bar{R} = \frac{R_1+R_2}{2}$

Conditions aux limites:

$$\boldsymbol{u} = f_1(Ta,\eta)\boldsymbol{e}_\varphi \;;\quad \theta = 1 \quad \text{en} \quad r = \eta/(1-\eta)$$
$$\boldsymbol{u} = f_2(Ta,\eta)\boldsymbol{e}_\varphi \;;\quad \theta = 0 \quad \text{en} \quad r = 1/(1-\eta)$$

où f_1, f_2 et Ta dépendent du régime de rotation étudié.

NOMBRES SANS DIMENSION

Paramètres caractéristiques: longueur $d = R_2 - R_1$, temps $\tau_\nu = d^2/\nu$ et température $\Delta T = T_1 - T_2$.

<u>Géométrie et propriétés du ferrofluide :</u>

Rap. rayons : $\eta = \frac{R_1}{R_2}$; Nb de Prandtl : $\mathrm{Pr} = \frac{\nu}{\kappa}$

<u>Rotation:</u>

Rap. vit. ang.: $\mu = \frac{\Omega_2}{\Omega_1}$; Nb de Taylor : $\mathrm{Ta} = \frac{R\Omega d^2}{\nu}\sqrt{\frac{d}{R}}$

<u>Thermique et magnétisme:</u>

Par. exp. therm.: $\gamma_a = \alpha\Delta\mathrm{T}$;

Nb de Rayleigh magnétique : $\mathrm{Ra_m} = \frac{\alpha\Delta\mathrm{T} g_m d^3}{\nu\kappa}$

ANALYSE DE STABILITE LINEAIRE

Etat de base perturbé :

$$u = u' \;;\; v = V + v' \;;\; w = W + w' \;;\; \theta = \Theta + \theta'$$

Conditions aux limites homogènes: $\vec{u}' = \theta' = 0$.

Développement en modes normaux:

$$\xi' = \hat{\xi}\exp\left[st + i(n\varphi + kz)\right] \quad \text{où} \quad s = \sigma + i\omega$$

Méthode de résolution spectrale du problème aux valeurs propres.

$$\boldsymbol{A}(\eta, \mathrm{Pr}, \gamma_a, \mathrm{Ra_m}, n, k)\vec{\xi}' = s\boldsymbol{B}\vec{\xi}' \quad \text{avec} \quad \vec{\xi} = \left(\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}, \hat{\pi}, \hat{\theta}\right)^t$$

DISCUSSION & CONCLUSION

Deux régimes de rotation sont présentés: le régime de rotation du cylindre intérieur (Rayleigh instable) et le régime Képlérien (Rayleigh stable). La poussée thermomagnétique déstabilise l'écoulement et donne lieu à des modes hélicoïdaux (ONA). La force centrifuge, déstabilisante ou stabilisante selon le régime de rotation, induit des modes stationnaires axisymétrique (SA). Dans le cas où $\mu = 0$, l'écoulement peut devenir oscillant (OA) pour de grands Pr. Globalement, l'effet de la poussée centrifuge, négligeable pour des ferrofluides à base aqueuse, deviens important pour des ferrofluides à viscosité importante (base huileuse).

REFERENCES

R. Tagg et P.D. Weidman, Z. angew. Math. Phys., 58, 431-456 (2007).

A. Meyer, H. N. Yoshikawa et I. Mutabazi,, Phys. Rev. Fluid, (2021).

REMERCIEMENT

Cette étude a bénéficiée du support du CNES et de l'agence national de recherche à travers le programme "Investissements d'Avenir (ANR-10 LABX-09-01) LABEX EMC3 (projet INFEMA).