

Extraction des paramètres du modèle épidémique SIR à partir des données temporelles d'infection

François G. Schmitt¹

Univ. Lille, CNRS, ULCO, Laboratory of Oceanology and Geosciences, UMR LOG 8187, Wimereux, France
 francois.schmitt@log.cnrs.fr

Dans le contexte actuel du COVID-19, les modèles d'évolution épidémique sont devenus d'une grande importance sociétale. Parmi ceux-ci nous étudions ici le modèle SIR, qui est un des premiers modèles de diffusion épidémique publié. Ce modèle suppose trois compartiments recensant les populations formant une communauté : les susceptibles d'être infectés S , les infectés I et ceux qui ont guéri R (pour "recovered"). Ces trois compartiments sont reliés par des équations différentielles dépendant de deux paramètres, $\alpha > 0$ et $\beta > 0$: $S'(t) = -\beta S(t)I(t)/N$; $I'(t) = (\beta S(t)/N - \alpha)I(t)$; $R'(t) = \alpha I(t)$. Ici $N = R + S + I$ est la population totale, constante. Il est bien connu que dans ce modèle la croissance initiale de $I(t)$ est exponentielle avec un exposant $\gamma = \beta - \alpha$ ce qui fait que le nombre de reproduction $R_0 = \beta/\alpha$ doit être supérieur à 1 pour avoir la croissance exponentielle.

A partir de ce modèle nous montrons que la décroissance est également exponentielle avec un exposant différent de γ , qui s'écrit $\Gamma = -\beta S_e/N + \alpha$, où $S_e = \lim_{t \rightarrow \infty} S(t) > 0$. Puis nous mettons en place un algorithme permettant d'extraire, en utilisant la seule courbe $I(t)$, les exposants γ et Γ (voir figure 1), et à partir de ceux-ci, le coefficient R_0 d'où nous déduisons les coefficients α et β . De plus, la valeur expérimentale du maximum de $I(t)$, noté I_{\max} , nous permet également d'estimer le nombre N d'individus impliqués dans la dynamique épidémique.

L'algorithme proposé, qui est la principale contribution de ce travail, est testé à partir de simulations numériques : il permet de retrouver les paramètres R_0 et β avec une précision de l'ordre de 2 %. Ensuite cet algorithme est appliqué à un cas réel, l'épisode de COVID-19 en France lors de la première vague, entre mars et mai 2020. La dynamique montre bien une croissance et décroissance exponentielles, et les pentes permettent d'extraire les paramètres, dans le cadre d'une hypothèse de modèle SIR avec coefficients constants.

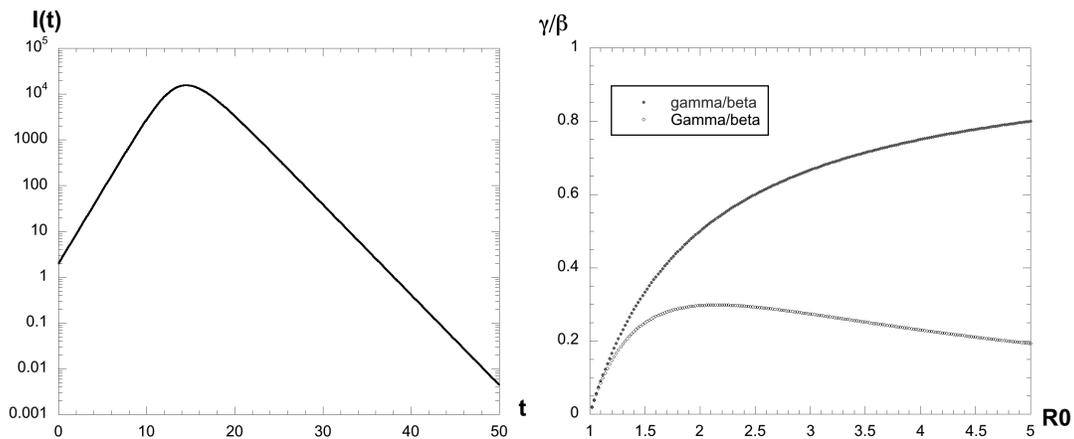


Figure 1. A gauche : évolution de la population infectée au cours du temps, en coordonnées log-linéaires : on constate une forte augmentation, un maximum puis une forte décroissance, avec des paramètres de croissance exponentielle γ et décroissance exponentielle $-\Gamma$ (paramètres utilisés : $I_0 = 2$, $N = 100,000$, $R_0 = 2.0$ et $\beta = 1.5$). A droite : les évolutions de γ/β et Γ/β en fonction de R_0 . On constate qu'on a toujours $\gamma > \Gamma$.