Limite singulière d'une équation d'Allen-Cahn stochastique avec un terme de diffusion non linéaire

Perla El Kettani[1], Danielle Hilhorst[2], Yong-Jung Kim[3], Hyunjoon Park[3]

[1] CNRS et Centre de Physique Théorique, Université de Toulon, Université Aix-Marseille, Marseille, France.
[2] CNRS et Laboratoire de Mathématiques, Université Paris-Saclay, 91405 Orsay cedex, France.
[3] Département de Scicences Mathématiques, KAIST, 291 Daehak-ro, Yuseong-gu, Daejeon 34141, Corée.
perla.el-kettani@univ-tln.fr

On considère tout d'abord une équation d'Allen-Cahn déterministe avec un terme de diffusion non linéaire. Cette équation a été étudiée dans plusieurs articles notamment Wagner [3] où le terme de diffusion dépend de la concentration d'alliages métalliques ; Fife et Lacey [2] ont également généralisé l'équation d'Allen-Cahn avec un terme de diffusion dépendant des paramètres. On étudie sa limite singulière et on démontre la génération et la propagation de l'interface limite. Cette interface évolue selon sa courbure moyenne avec une constante multiplicative qui provient de la non linéarité présente dans l'équation. Plus précisément nous étudions le problème

$$(P^\varepsilon) \quad \begin{cases} u_t = \Delta\varphi(u) + \dfrac{1}{\varepsilon^2} f(u) & \text{in } D \times \mathbb{R}^+ \\ \dfrac{\partial\varphi(u)}{\partial\nu} = 0 & \text{in } \partial D \times \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{for } x \in D \end{cases}$$

où u est une fonction de phase, D est un domaine régulier et borné de $\mathbb{R}^N, N \geq 2$, ν est le vecteur normal unitaire sortant à la frontière du domaine ∂D et $\varepsilon > 0$ est un petit paramètre. La fonction φ est une fonction non linéaire strictement croissante et f est un terme de réaction bistable. Ce travail est également en collaboration avec T. Funaki et S. Sethuraman.

Nous étudions ensuite la limite singulière de cette même équation d'Allen-Cahn que nous perturbons par un bruit régularisé. Le modèle qui nous intéresse est le suivant

$$(P^\epsilon) \quad \begin{cases} u_t(x,t) = \Delta\varphi(u(x,t)) + \dfrac{1}{\epsilon^2} f(u(x,t)) + \dfrac{1}{\epsilon}\xi^\epsilon(t) & , (x,t) \in D \times \mathbb{R}^+ \\ \dfrac{\partial\varphi(u)}{\partial\nu} = 0 & , (x,t) \in \partial D \times \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) = u_0(x) & , x \in D \end{cases}$$

Le terme ξ^ε [1,4] est une fonction aléatoire régularisée en temps qui a le même comportement qu'un bruit blanc quand $\varepsilon \downarrow 0$. L'interface évolue alors selon le mouvement par courbure moyenne stochastique.

Références

1. Matthieu Alfaro, Dimitra Antonopoulou, Georgia Karali, Hiroshi Matano, Generation of fine transition layers and their dynamics for the stochastic Allen–Cahn equation, *arXiv preprint arXiv :1812.03804*, (2018).
2. Paul Fife, Andrew Lacey, Motion by curvature in generalized Cahn-Allen models, *Journal of Statistical Physics*, **77**, 173-181 (1994).
3. Carl Wagner, On the solution of diffusion problems involving concentration-dependent diffusion coefficients, *JOM*, **4**, 91-96 (1952).
4. Hendrik Weber, On the short time asymptotic of the stochastic Allen-Cahn equation, *Annales de l'IHP Probabilités et statistiques*, **Vol. 46. No. 4.**, 965-975 (2010).