

Noether, Maddocks, et Kirchhoff

Sébastien Neukirch¹ et Florence Bertails-Descoubes²

¹ Sorbonne Université, CNRS, Institut Jean Le Rond d'Alembert, F-75005 Paris, France

² Univ. Grenoble Alpes, Inria, CNRS, Grenoble INP, LJK, France

L'analogie statique-dynamique établie par G. Kirchhoff montre que la statique d'une tige élastique déformée en 3D est équivalente à la dynamique d'une toupie. Dans cette analogie, par exemple le temps et la vitesse de rotation (dynamique) correspondent respectivement à l'abscisse curviligne et au vecteur des courbures-torsion. Cette équivalence statique-dynamique permet d'utiliser le théorème de Noether [1] pour mettre à jour une quantité invariante le long de la tige lorsqu'elle est à l'équilibre : de la même façon que si la toupie a un Lagrangien qui ne dépend pas explicitement du temps (chargement constant par exemple) alors son énergie mécanique reste constante, si la tige à des propriétés élastiques uniformes (rigidité uniforme, section de taille constante) alors la somme de son énergie de courbure et de la composante tangentielle de la force interne (tension) prend une valeur constante le long de la tige.

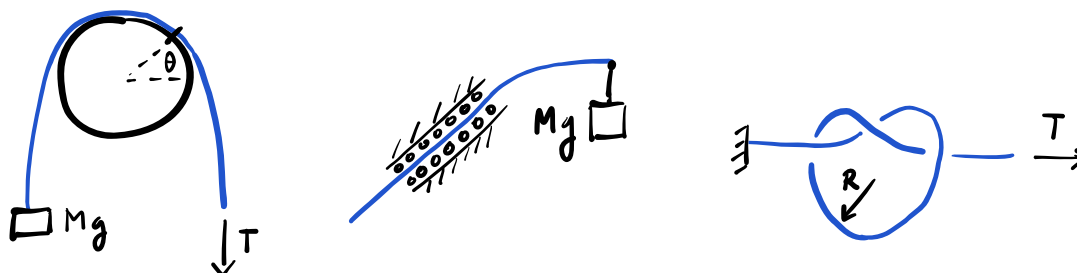


Figure 1. Trois exemples d'utilisation de l'invariant de Noether pour les tiges élastiques.

Cette propriété d'invariance était connue pour des cas simples [2] (elastica 2D ou modèle de Kirchhoff inextensible 3D) mais l'approche par le théorème de Noether permet d'étendre cette propriété à des cas plus généraux : modèle de Kirchhoff extensible, modèle de Reissner (incluant du cisaillement), modèles de Sadowsky, Wunderlich, et Ribext (avec lois de comportement élastiques non linéaires), cas de formes naturelles non droites, tige pesante, présence d'une force électro-statique ou de contacts sans frottement.

Nous montrerons comment on calcule explicitement cet invariant puis nous montrerons quelques exemples d'utilisation de cette propriété d'invariance, voir figure 1. Un premier exemple est le cabestan où une tige est enroulée autour d'un obstacle circulaire. Dans ce cas l'invariant permet de facilement calculer l'angle θ en fonction de la rigidité de la tige et de la valeur du poids. Un deuxième exemple est l'Elastica Arm Scale où l'utilisation de l'invariant permet de montrer que la tige doit nécessairement avoir une tangente horizontale au point d'accroche du poids. Un troisième exemple est le noeud de trèfle pour lequel l'invariant permet de simplement trouver la relation entre la force de tension T et le rayon caractéristique R de la boucle du noeud.

Références

1. E. NOETHER, Invariante variationsprobleme, *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, 235–257 (1918).
2. S. KEHRBAUM & J. H. MADDOKCS, Elastic rods, rigid bodies, quaternions and the last quadrature, *Phil. Trans. Roy. Soc. A*, **355**, 2117-2136 (1997).