

**Ondes de Rossby thermiques dans un noyau tournant :
comparaison entre modèles 2 et 3D - bifurcation sous-critique**

Équipe 2D : Y. LEBRANCHU, E. PLAUT (LEMTA, Nancy)

Équipe 3D : R. SIMITEV (DMS, Liverpool) & F. BUSSE (IPT, Bayreuth)

1. Introduction

2. Modèle *quasi géostrophique* pour le linéaire

3. Modèle *quasi géostrophique* pour le non linéaire

4. Conclusions et perspectives

1. Introduction

La *convection dans les noyaux planétaires*, un *sujet chaud* :

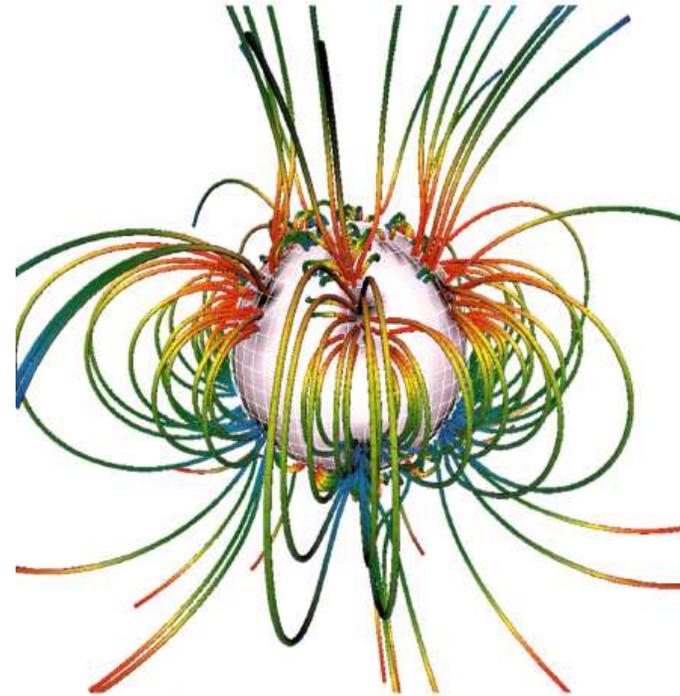
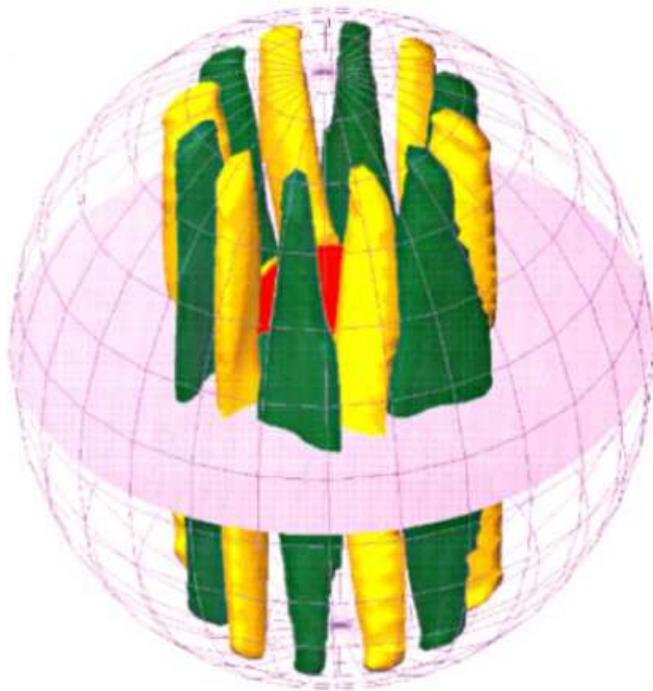
- Bilans thermodynamiques ?...
- En présence d'effets MHD, on peut avoir *dynamo* !
- Même sans effets MHD, on a affaire à de la *turbulence en rotation*...



1. Introduction

Des modèles très simplifiés (convection thermique seulement, approximations Boussinesq, usage de diffusivités turbulentes, etc...) existent, qui donnent des résultats intéressants. Mais ils ne sont utilisés que « près du seuil de convection ».

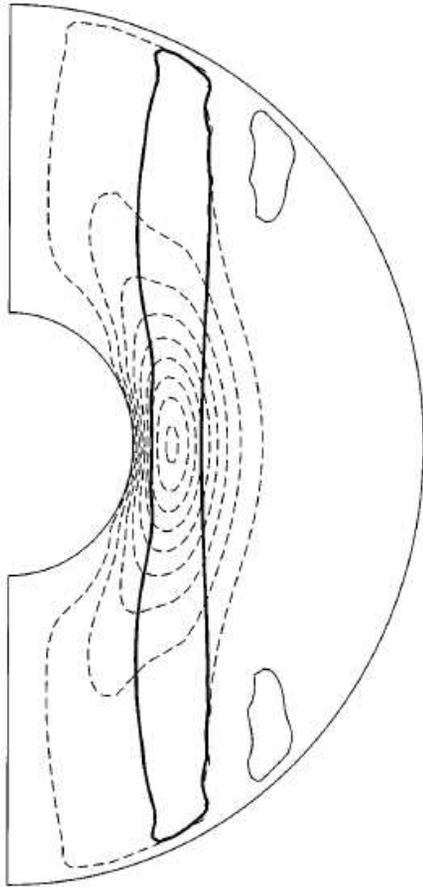
On observe alors des *ondes de Rossby thermiques, colonnaires*, qui en présence d'effets MHD constituent des *dynamos* :



[KAGEYAMA & SATO 1997 *Phys. Rev. E*]

1. Introduction

Ces *dynamos* seraient du type $\alpha - \omega$, une *rotation différentielle* étant introduite par *effets hydrodynamiques non linéaires*

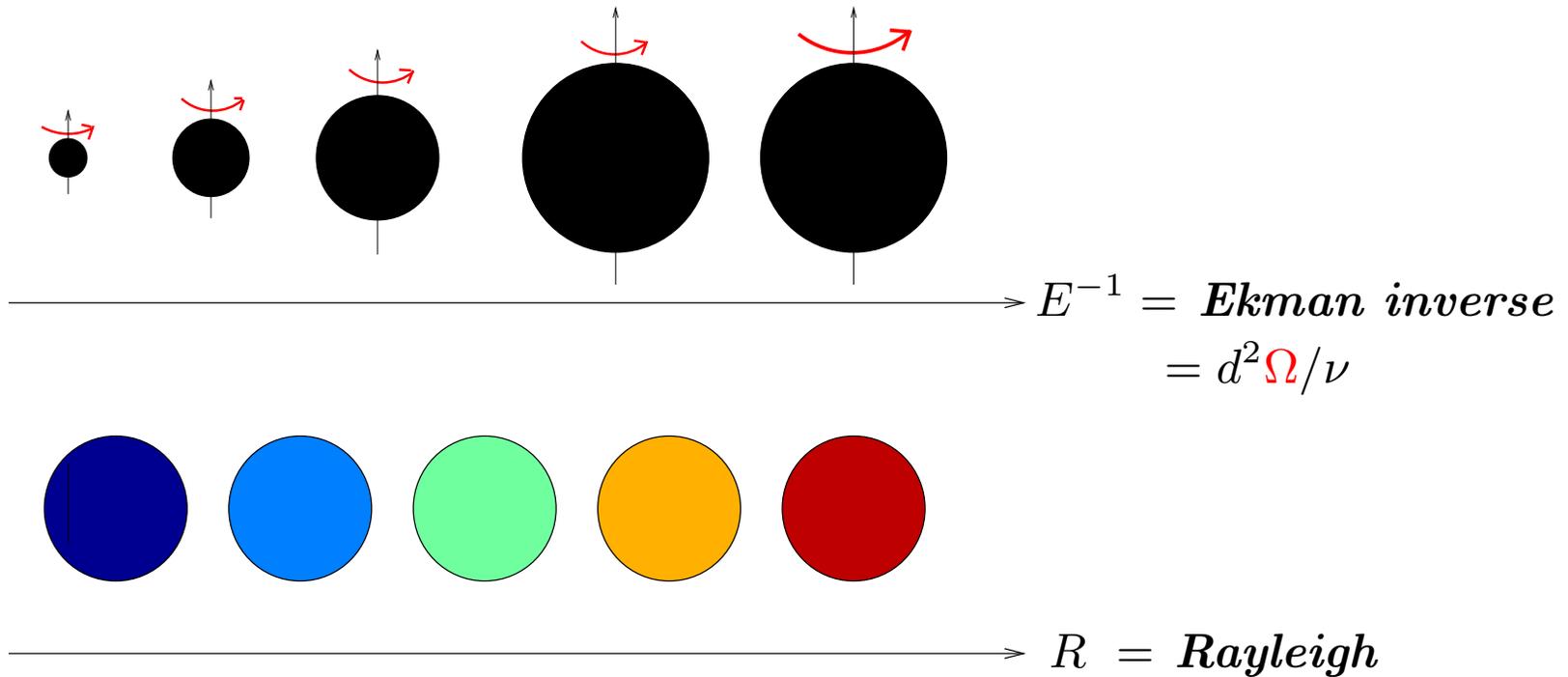


[KAGEYAMA & SATO 1997 *Phys. Rev. E*]

↪ *peut-on comprendre ces effets ?*

1. Introduction

Un autre inconvénient des modèles 3D est leur *lourdeur*, qui *rend difficile l'exploration de l'espace des paramètres* :

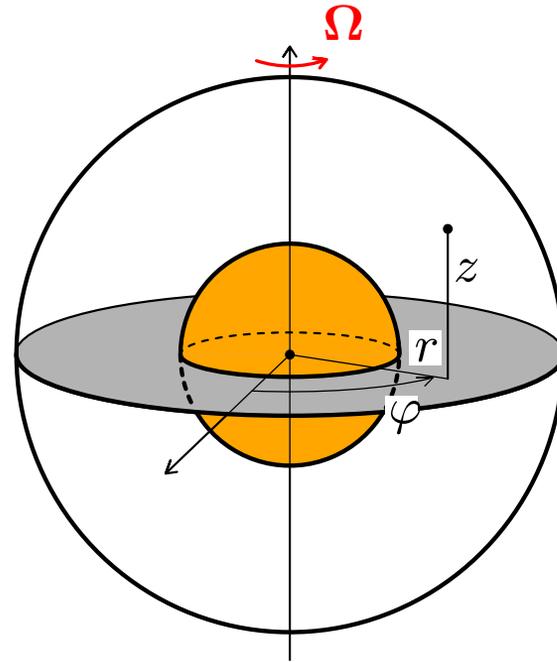
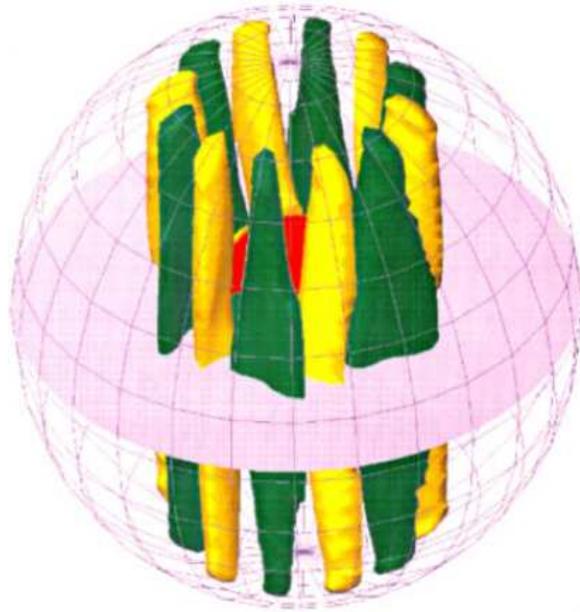


$$P = \text{Prandtl thermique} = 1$$

↪ peut-on développer des modèles 2D ?

2. Modèles *quasi géostrophiques*

Reposant sur une *intégration par rapport à la coordonnée axiale z* ,



ils ont été très étudiés :

- BUSSE 1970 *J. Fluid Mech.*
- AUBERT, GILLET & CARDIN 2003 $G^3 \rightarrow$ *validation/3D en linéaire*
- MORIN & DORMY 2004 *J. Fluid Mech...*

Quid du non linéaire ?

2. Modèle quasi géostrophique

Vitesse dérive d'une *fonction courant* $\psi(r, \varphi)$:

$$\mathbf{v} = r^{-1}(\partial_\varphi \psi) \mathbf{e}_r - (\partial_r \psi) \mathbf{e}_\varphi + v_z(\psi, r, z) \mathbf{e}_z .$$

Écart de température / profil conductif :

$$\theta = \theta(r, \varphi) .$$

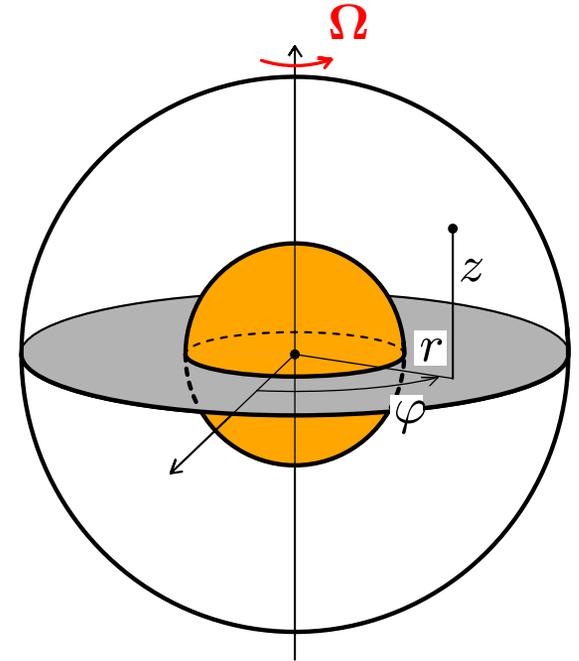
Équation de la vorticité axiale ζ :

$$\partial_t \zeta + \mathbf{v} \cdot \nabla \zeta + 2E^{-1} L^{-2} r v_r = \Delta \zeta - \partial_\varphi \theta .$$

avec $L = \sqrt{r_e^2 - r^2}$ = demi-hauteur d'une colonne fluide.

Équation de la chaleur :

$$\partial_t \theta + \mathbf{v} \cdot \nabla \theta = \Delta \theta + \frac{2}{3} R r v_r .$$



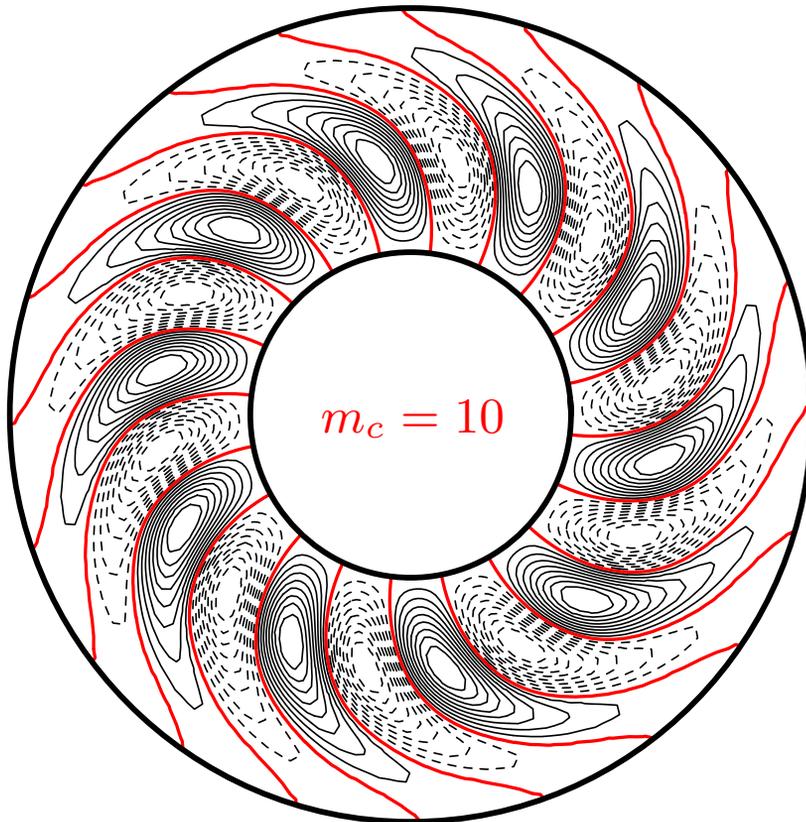
2. Modèle quasi géostrophique pour le linéaire

Analyse de stabilité de la solution $\mathbf{v} = \theta = 0$

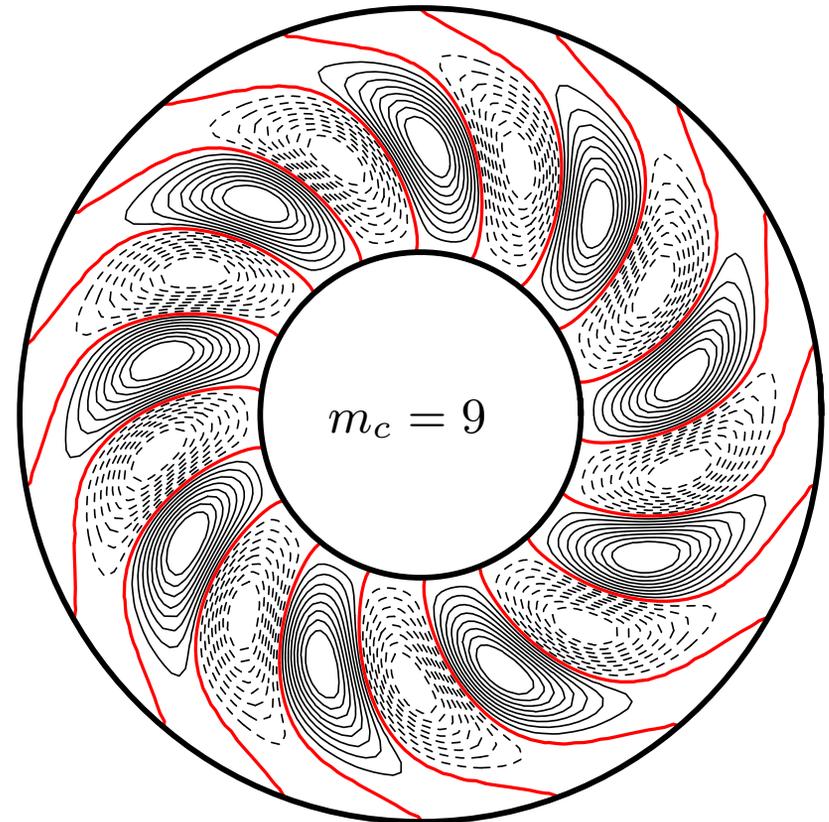
→ quand $R > R_c$, *ondes de Rossby thermiques* en $\exp[i(m_c \varphi - \omega_c t)]$:

lignes de courant dans le plan équatorial pour $E^{-1} = 5000$:

2D :

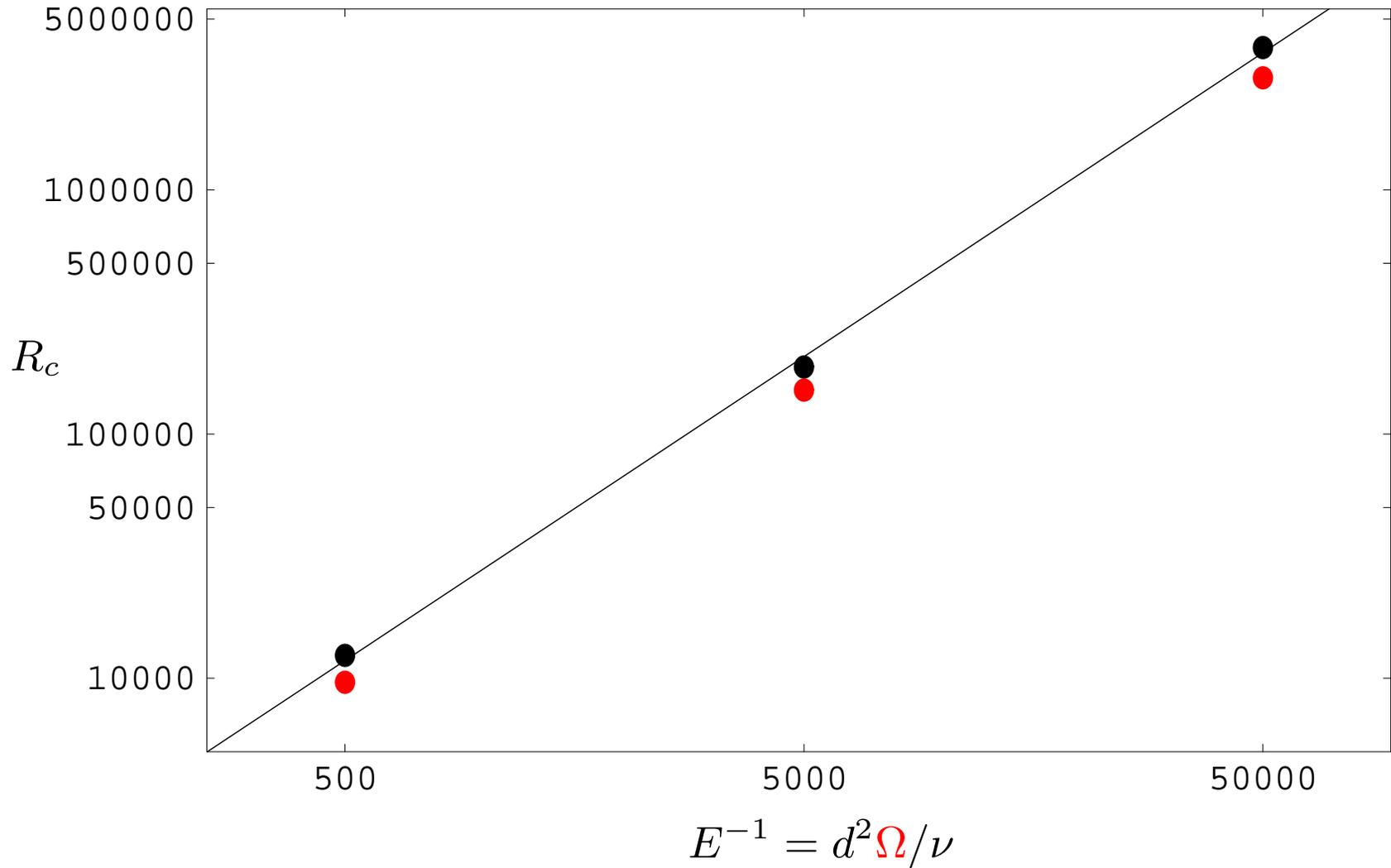


3D :



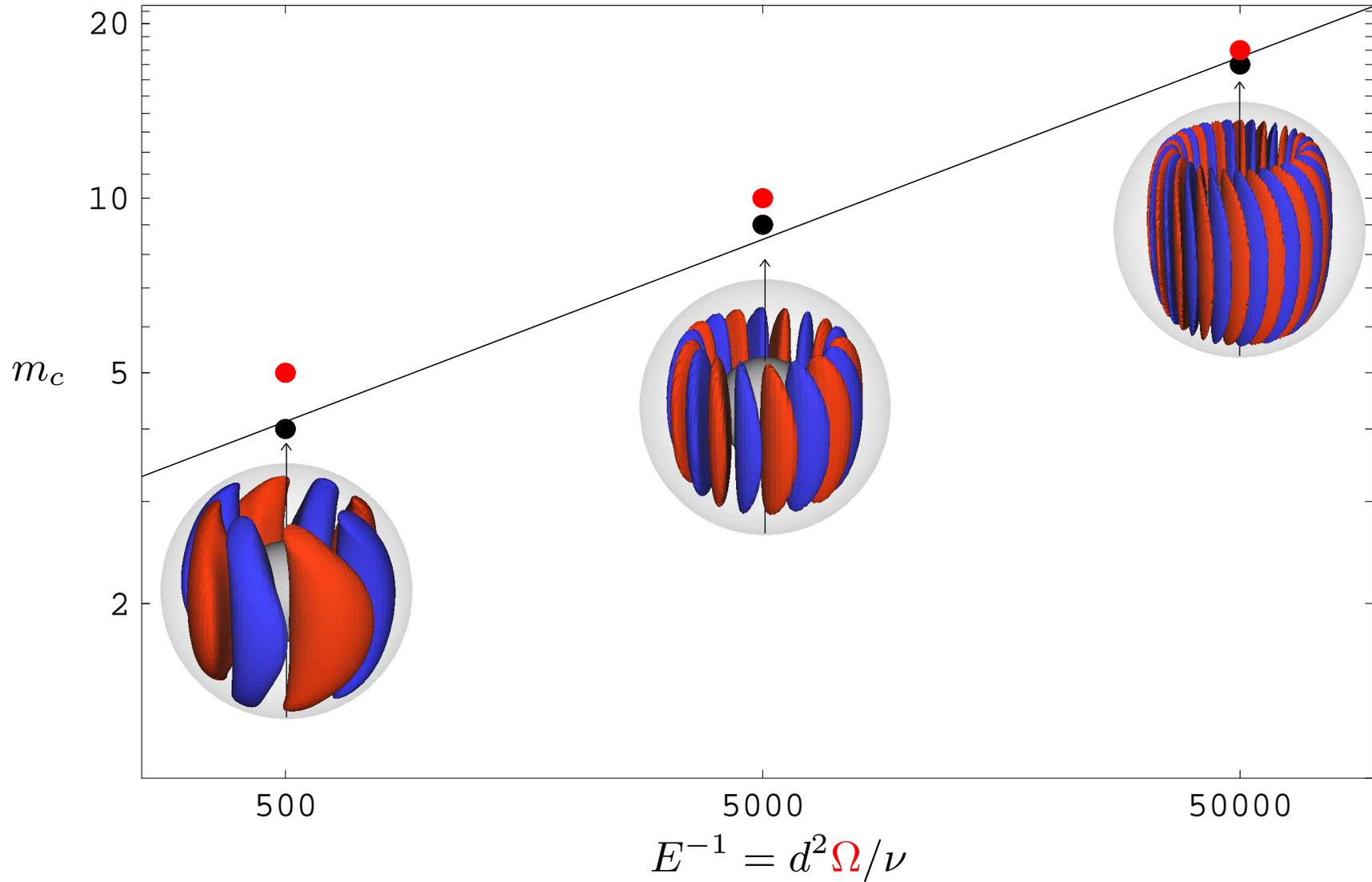
2. Modèle *quasi géostrophique* pour le linéaire

Bon accord **2D/3D** concernant le *nombre de Rayleigh critique* R_c :



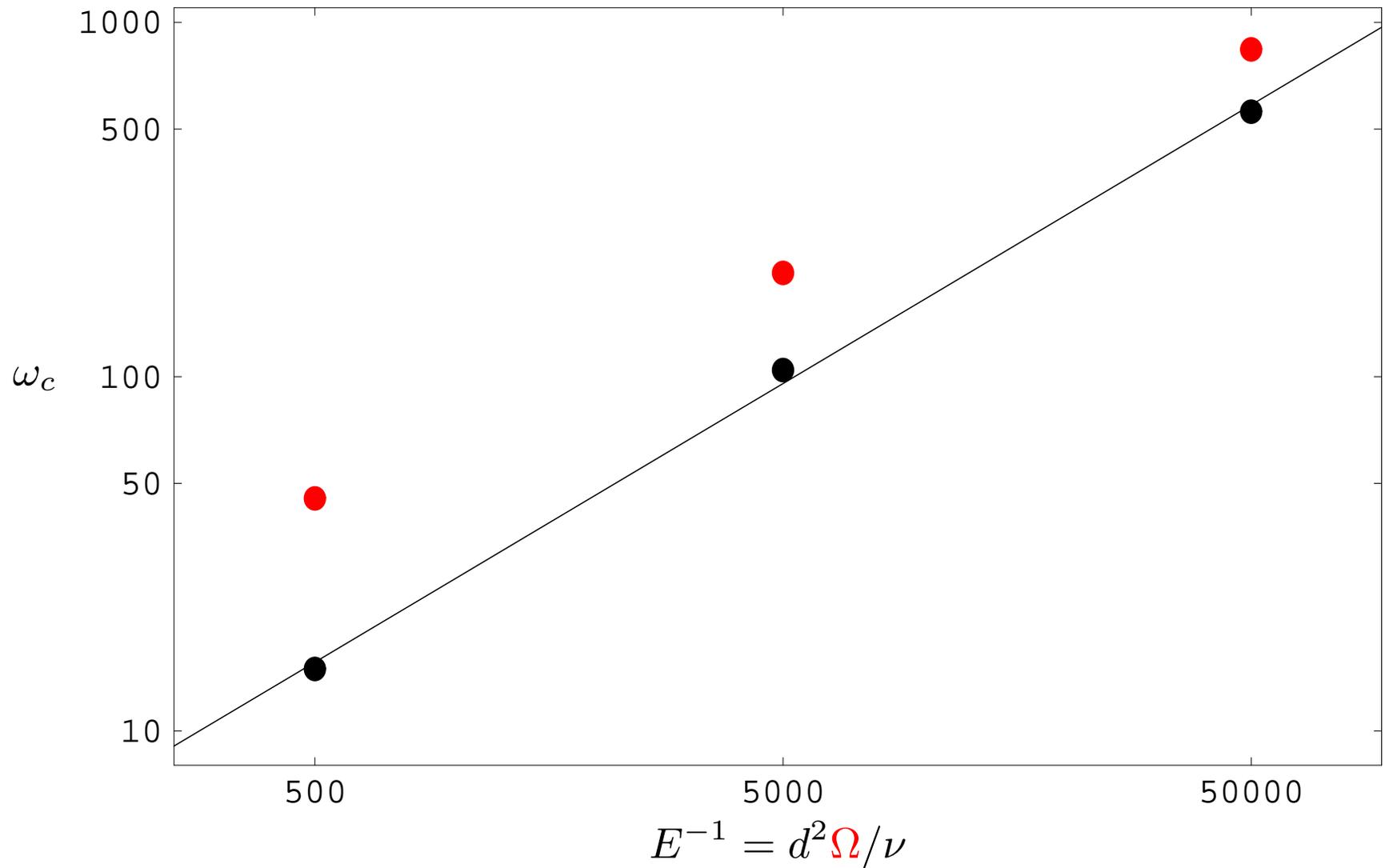
2. Modèle *quasi géostrophique* pour le linéaire

Bon accord **2D/3D** concernant le *nombre d'onde critique* m_c :



2. Modèle *quasi géostrophique* pour le linéaire

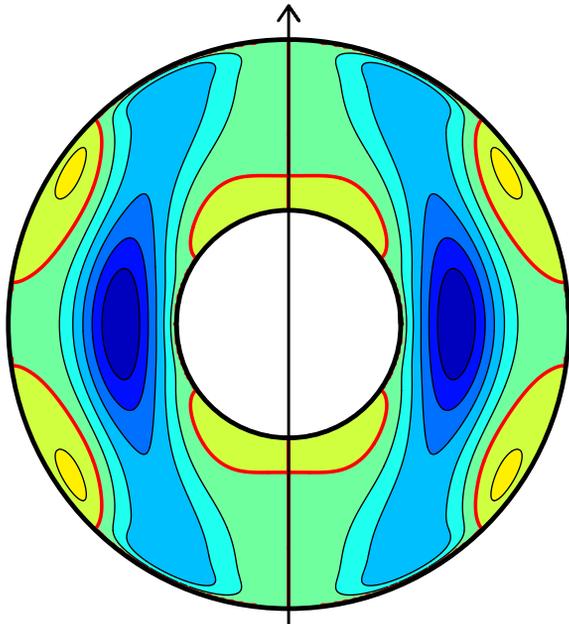
Accord **2D/3D** concernant la *pulsation critique* ω_c :



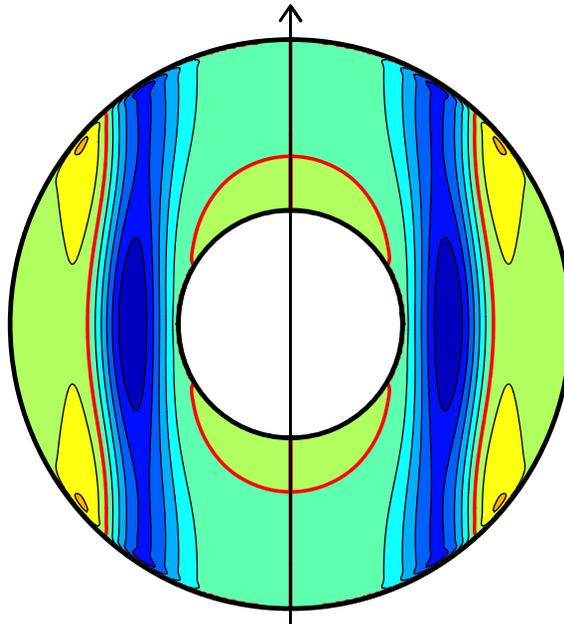
2. Modèle *quasi géostrophique* pour le non linéaire

On veut expliquer la forme et l'amplitude des *écoulements zonaux 3D* :

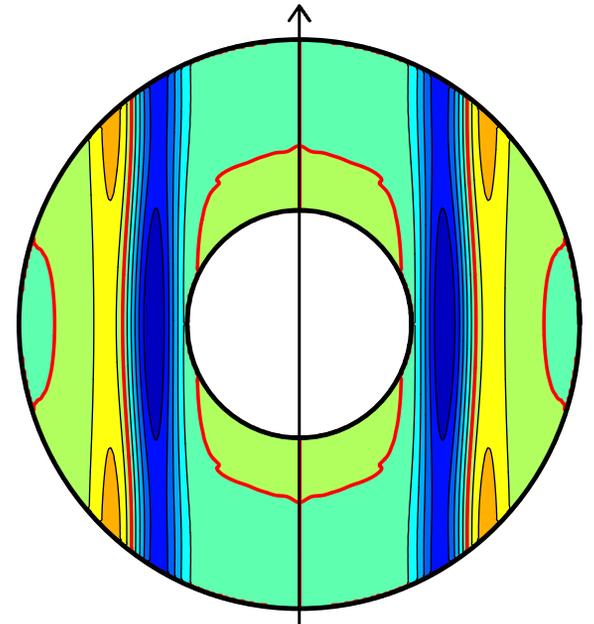
$E^{-1} = 500$:



$E^{-1} = 5000$:



$E^{-1} = 50000$:



2. Modèle *quasi géostrophique* pour le non linéaire

Calcul d'une *solution faiblement non linéaire*

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v} &= \{A \mathbf{v}_1[\Psi_1(r) W] + c.c.\} + |A|^2 \mathbf{V}_0(r) + \{A^2 \mathbf{v}_2[\Psi_2(r) W^2] + c.c.\} \\
 \theta &= \{A \Theta_1(r) W + c.c.\} + |A|^2 \Theta_0(r) + \{A^2 \Theta_2(r) W^2 + c.c.\} \\
 &\qquad \qquad \qquad \text{mode 1} \qquad \qquad \qquad \text{mode 0} \qquad \qquad \qquad \text{mode 2}
 \end{aligned}$$

avec $W = \exp[i(m\varphi - \omega t)]$.

Le **mode 0** de vitesse est l'*écoulement zonal*, qu'il faut calculer par résolution quasi statique de l'*équation de Navier-Stokes azimutale moyenne*

$$0 = \underbrace{\Delta V_0}_{\text{diffusion visqueuse}} - \underbrace{f_E V_0}_{\text{pompage d'Ekman}} + \underbrace{(\text{div} \overline{\overline{\boldsymbol{\tau}}})_\varphi}_{\text{contraintes de Reynolds}} \quad (\langle \text{NS}_\varphi \rangle_\varphi)$$

$$\text{div}(\overline{\overline{\boldsymbol{\tau}}})_\varphi = \partial_r(\tau_{r\varphi}) + 2r^{-1}\tau_{r\varphi}$$

avec

$$\tau_{r\varphi} = - \left\langle \{v_r[\Psi_1(r) W] + c.c.\} \{v_\varphi[\Psi_1(r) W] + c.c.\} \right\rangle_\varphi = ?$$

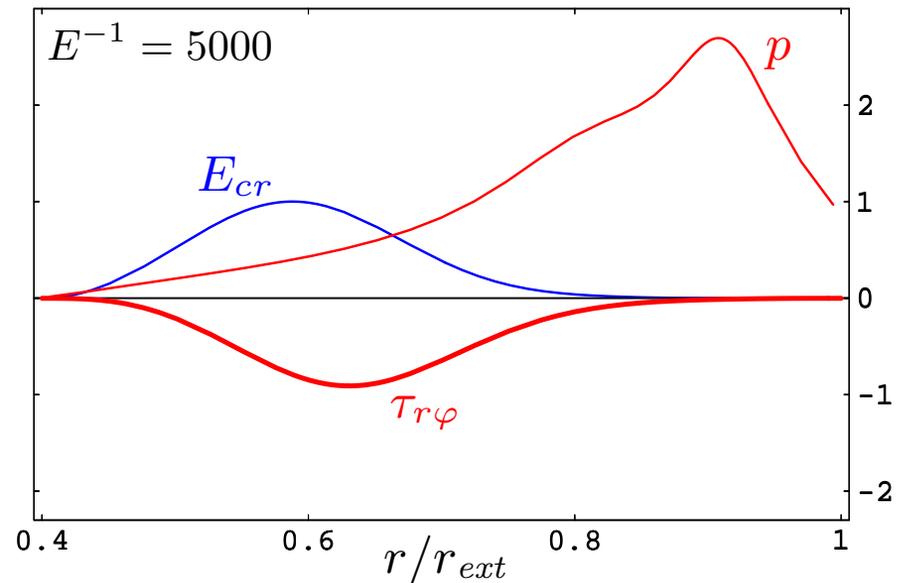
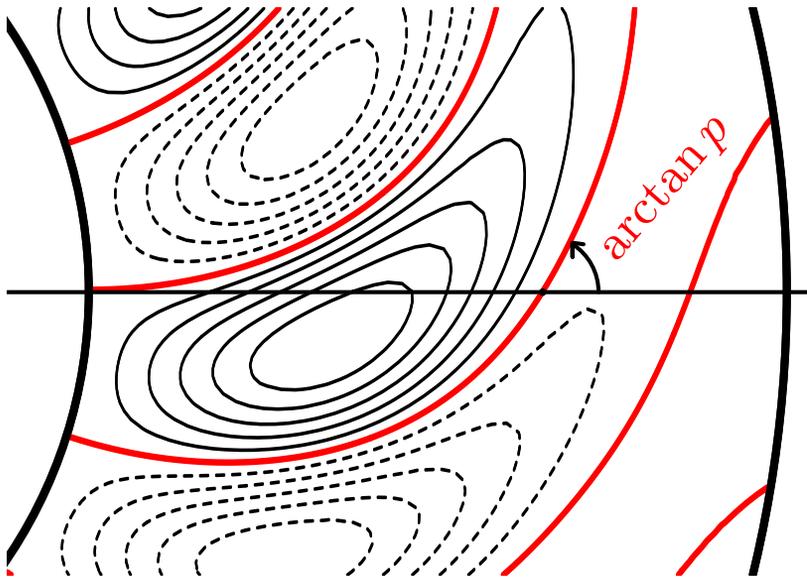
2. Modèle quasi géostrophique pour le non linéaire

De manière générale on a

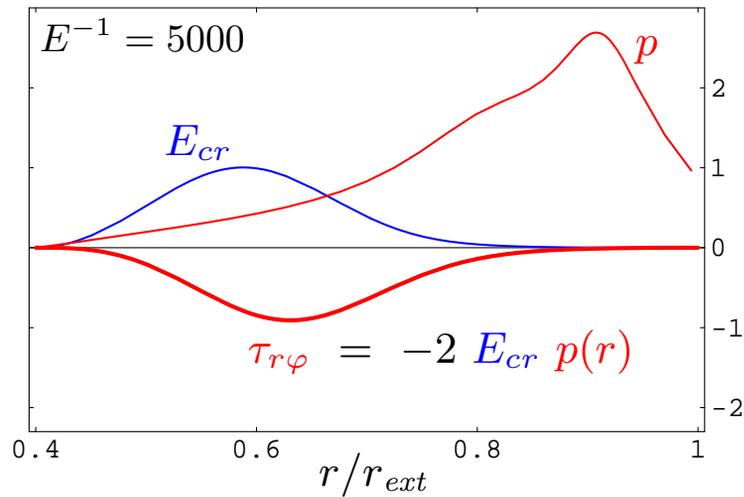
$$\tau_{r\varphi} = -2 E_{cr} p(r)$$

avec

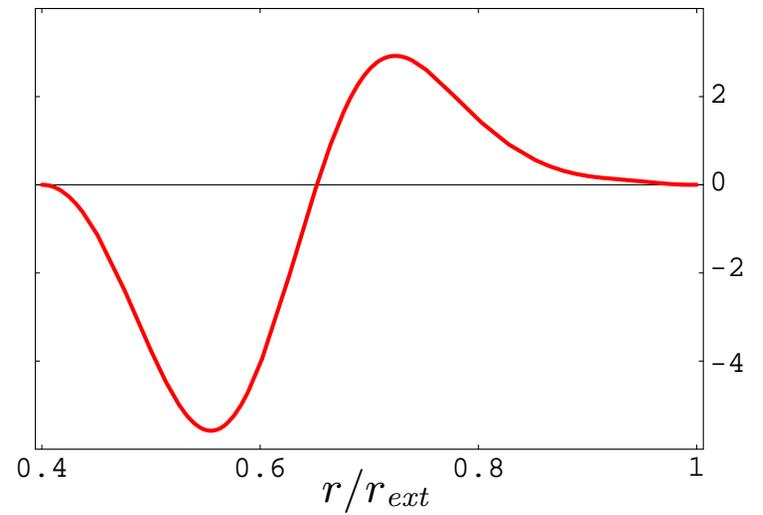
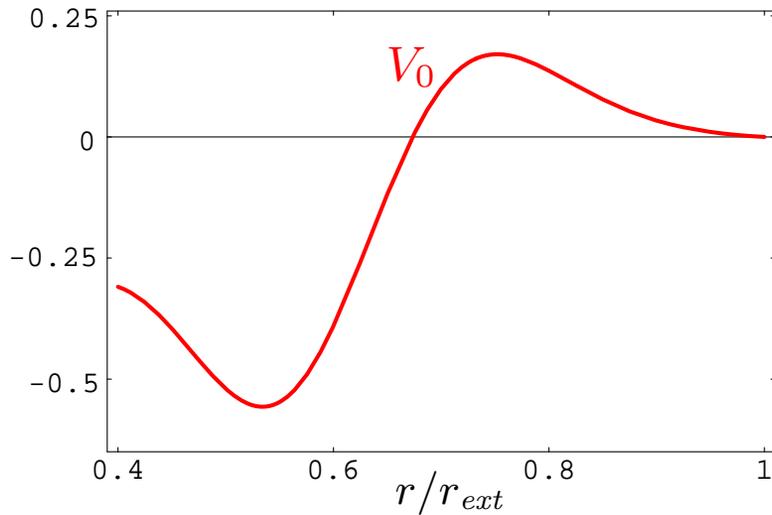
$$E_{cr} = \text{énergie cinétique transverse} = \frac{1}{2} \left\langle \{v_r[\Psi_1(r) W] + c.c.\}^2 \right\rangle_{\varphi}$$
$$p(r) = \text{pente des séparatrices} = r \frac{d\varphi_n(r)}{dr}$$



2. Modèle *quasi géostrophique* pour le non linéaire



$$\hookrightarrow \underbrace{f_E V_0}_{\text{pompage d'Ekman}} - \underbrace{\Delta V_0}_{\text{diffusion visqueuse}} = \underbrace{\partial_r(\tau_{r\varphi}) + 2r^{-1}\tau_{r\varphi}}_{\text{contrainte de Reynolds}}$$

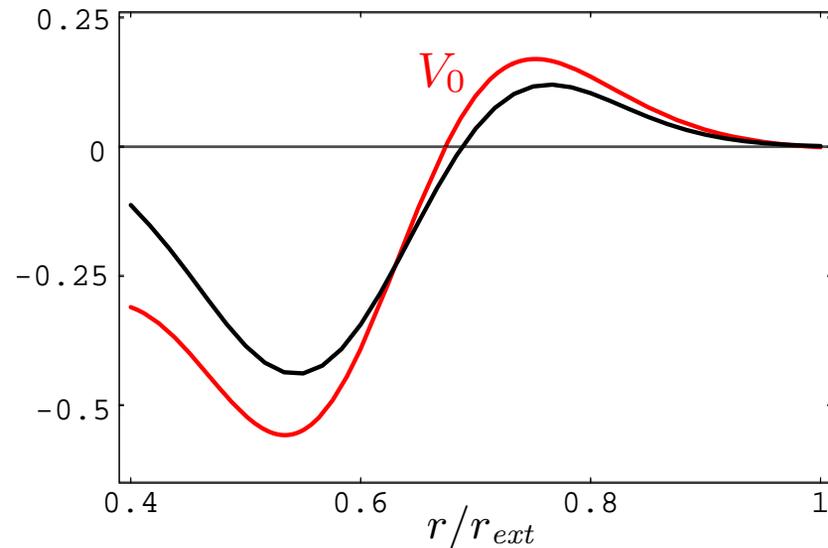
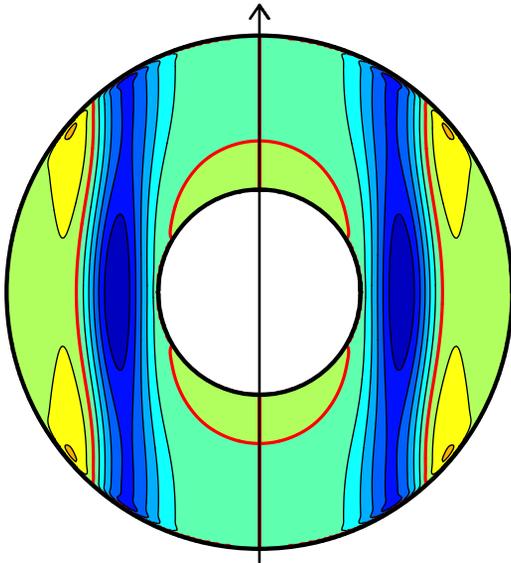


2. Modèle *quasi géostrophique* pour le non linéaire

L'amplitude de l'*écoulement zonal* a été obtenue à partir de l'*équation de Landau*, pour $\epsilon = R/R_c - 1 = 0.05$ (et toujours $E^{-1} = 5000$) :

$$\tau_0 dA/dt = (1 + is)\epsilon A - g(1 + ic)|A|^2 A$$

$$\downarrow V_0 * = |A|^2 = \epsilon/g$$



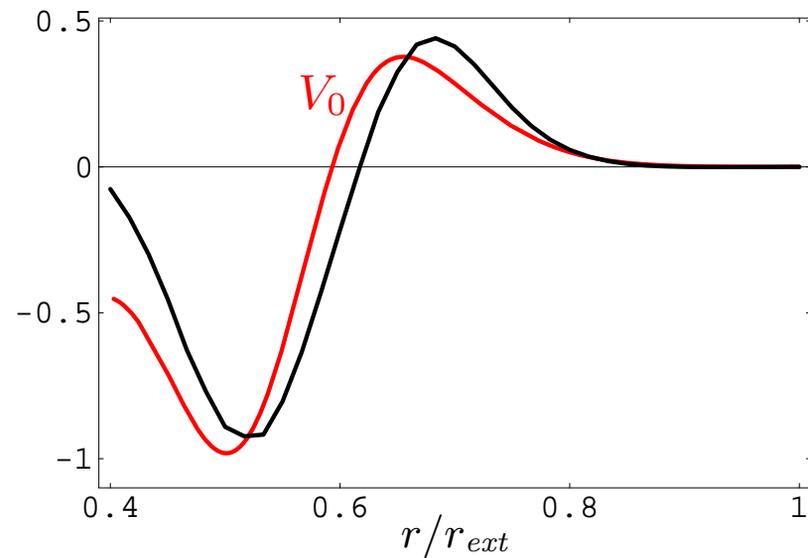
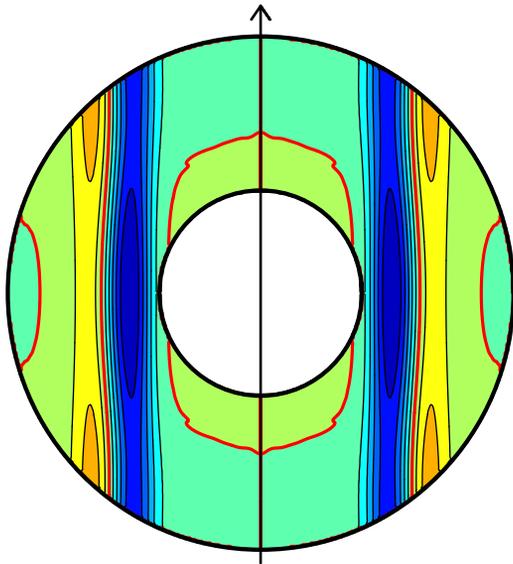
↪ *bon accord avec l'écoulement zonal 3D moyenné/z.*

2. Modèle *quasi géostrophique* pour le non linéaire

Cet *accord* est *encore meilleur en rotation plus rapide* : à $E^{-1} = 50000$,
et toujours $\epsilon = R/R_c - 1 = 0.05$, l'*équation de Landau*

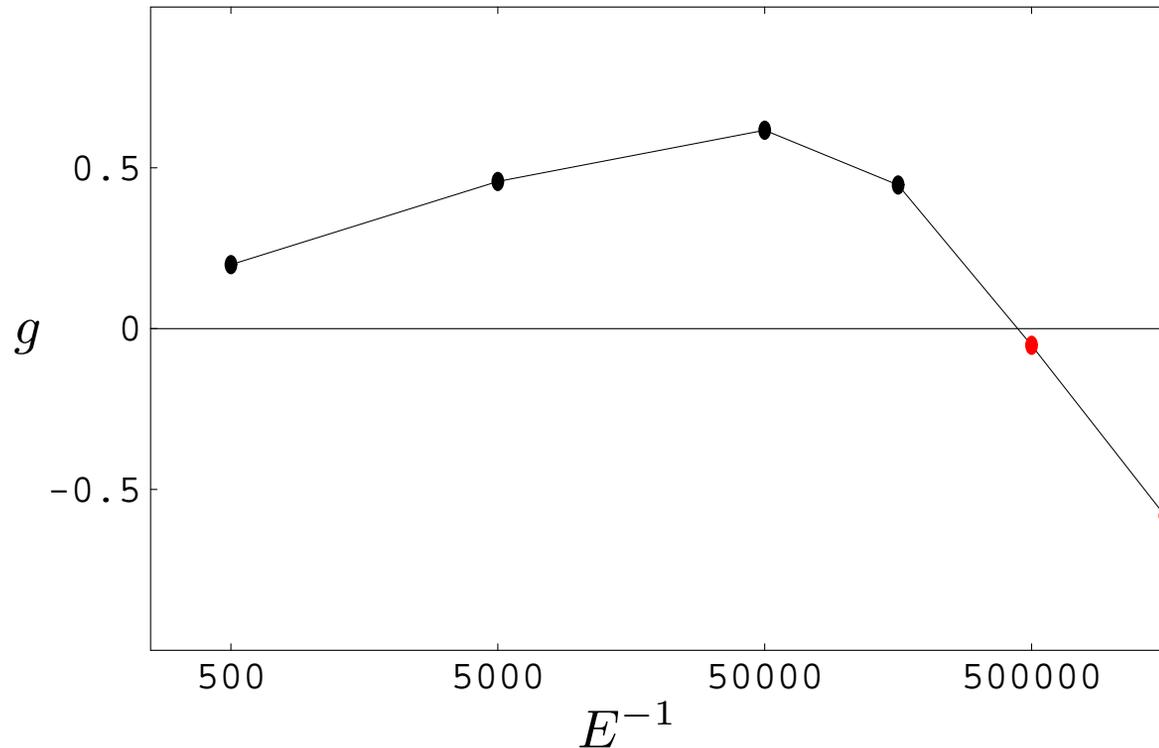
$$\tau_0 dA/dt = (1 + is)\epsilon A - g(1 + ic)|A|^2 A$$

$$\downarrow V_0 * = |A|^2 = \epsilon/g$$



2. Modèle *quasi géostrophique* pour le non linéaire

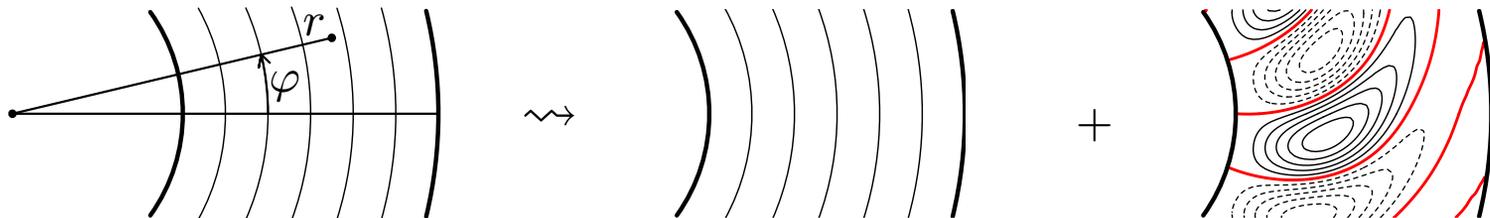
L'intérêt du *modèle 2D* est de pouvoir explorer une plus large gamme d'Ekman que le modèle 3D, ce qui réserve des surprises :



La bifurcation devient sous-critique à bas Ekman !...

3. Conclusions et perspectives

- Un *nouveau modèle quasi géostrophique* a été *validé en régime non linéaire* / modèle 3D.
- Ceci balise le chemin pour d'autres études, par exemple pour les *modèles dynamo 2D1/2* en cours de mise au point à Grenoble...
- Le *changement de nature de la bifurcation avec E* reste à analyser en détail...
- Au passage on a exhibé une *formule énergéti-co-géométrique générale* pour calculer la *contrainte de Reynolds* créée par une *onde 2D brisant une invariance par rotations* :



$$\tau_{rr} = -2E_{cr}, \quad \tau_{\varphi\varphi} = -2E_{c\varphi}, \quad \tau_{r\varphi} = -2E_{cr} p(r) = \tau_{rr} p(r)$$