Estimation d'Attracteurs Etranges
Application à l'Attracteur de Rössler

Sara Derivière & M.A. Aziz-Alaoui
Laboratoire de Mathématiques Appliquées, Université du Havre,
Faculté des Sciences et Techniques, BP 540, 76058 Le Havre cedex, France.
sara.deriviere@univ-lehavre.fr, aziz@univ-lehavre.fr

Résumé

On donne des résultats théoriques sur la stabilité globale des solutions de systèmes différentiels et sur l'estimation d'attracteurs. A cet effet, une extension du principe d'invariance de LaSalle nécessitant des conditions moins restrictives que celles du principe d'invariance classique est donnée. Des applications pour les estimations d'attracteurs étranges sont présentées ; en particulier on donne une estimation théorique de l'attracteur de Rössler, puis on démontre que, pour les paramètres usuels, cet attracteur ne pénètre jamais dans un voisinage de l'axe Oz et que la variable z est toujours strictement positive.

1 Introduction, principe d'invariance et extension

Le principe d'invariance de LaSalle est un outil très utilisé pour étudier le comportement asymptotique des solutions d'équations différentielles, voir [1, 2].

L'objet de cet article est de présenter une version plus générale du principe d'invariance de LaSalle, permettant d'obtenir des estimations concrètes pour les attracteurs de systèmes d'équations différentielles, car pour beaucoup de systèmes présentant un comportement compliqué ou chaotique, il n'est pas évident de trouver une fonction de Lyapunov à dérivée orbitale positive, voir [3].

Rappelons tout d'abord le principe d'invariance de LaSalle classique. Considérons l'équation différentielle ordinaire et autonome suivante:

$$\frac{dX}{dt} = F(X, \lambda) \tag{1}$$

où X $\in I\!R^n$, $F \in C^1(I\!R^n)$, λ représente les paramètres du système.

Théorème 1. *Principe d'invariance globale*
Soient $V : I\!R^n \to I\!R^+$ et $F : I\!R^n \to I\!R^n$ des fonctions de classe C^1. Supposons que la dérivée orbitale vérifie $\frac{d}{dt}V(X) \leq 0$ pour tout $X \in I\!R^n$, et définissons $E := \{X \in I\!R^n : \frac{d}{dt}V(X) = 0\}$. Posons B le plus grand ensemble invariant inclus dans E.
Alors toutes les solutions de (1), bornées pour $t \geq 0$, convergent vers B quand $t \to \infty$.

Dans ce papier, deux résultat plus généraux sont présentés. Ils requierent des hypothèses moins fortes que pour le principe d'invariance classique dans le sens où les fonctions de Lyapunov choisies peuvent être de dérivée orbitale positive sur certaines régions. Ainsi la recherche de telles fonctions s'avérera plus faciles et, comme nous le verrons, de nouvelles applications seront possibles.

Théorème 2. *Extension du principe d'invariance* (voir [4, 5])
Soient $F : I\!R^n \to I\!R^n$, $V_1 : I\!R^n \to I\!R$ des fonctions C^1 et $c_1 : I\!R^n \to I\!R$ une fonction continue telle que: $L_t V_1(X) \leq -c_1(X)$, pour tout $X \in I\!R^n$.
Soit $A_1 := \{X \in I\!R^n : c_1(X) < 0\}$.
Supposons que $sup_{X \in A_1} V_1(X) = M \in I\!R$ et que $\bar{\Omega}_M := \{X \in I\!R^n : V_1(X) \leq M\}$ soit borné.
Définissons $E_1 := \{X \in I\!R^n : L_t V_1(X) = 0\} \cup \bar{\Omega}_M$, et soit B_1 le plus grand sous-ensemble invariant par F inclus dans E_1.
Alors toutes les solutions de (1), bornées pour $t \geq 0$, convergent vers B_1 quand $t \to \infty$.
De plus, si $X_0 \in \bar{\Omega}_M$, alors $\varphi_1(t, X_0)$ est définie pour tout $t \geq 0$, $\varphi_1(t, X_0) \in \bar{\Omega}_M$ pour tout $t \geq 0$ et $\varphi_1(t, X_0)$ tend vers le plus grand sous-ensemble invariant inclus dans $\bar{\Omega}_M$, quand $t \to \infty$.

Théorème 3. *Variance de l'extension du principe d'invariance*
Soient $F : I\!R^n \to I\!R^n$, $V_2 : I\!R^n \to I\!R$ des fonctions C^1 et soit $c_2 : I\!R^n \to I\!R$ une fonction continue telle que: $L_t V_2(X) \geq -c_2(X)$, pour tout $X \in I\!R^n$.
Soit $A_2 := \{X \in I\!R^n : c_2(X) > 0\}$.
Posons $m := inf_{X \in A_2} V_2(X)$ et $\bar{\Omega}_m := \{X \in I\!R^n : m \leq V_2(X)\}$.
Définissons $E_2 := \{X \in I\!R^n : L_t V_2(X) = 0\} \cup \bar{\Omega}_m$, et soit B_2 le plus grand sous-ensemble invariant par F inclus dans E_2.
Alors toutes les solutions de (1), bornées pour $t \geq 0$, convergent vers B_2 quand $t \to \infty$.
De plus, si $X_0 \in \bar{\Omega}_m$, alors $\varphi_2(t, X_0)$ est définie pour tout $t \geq 0$, $\varphi_2(t, X_0) \in \bar{\Omega}_m$ pour tout $t \geq 0$ et $\varphi_2(t, X_0)$ tend vers le plus grand sous-ensemble invariant inclus dans $\bar{\Omega}_m$, quand $t \to \infty$.

Pour la démonstration, voir [6].

Remarques:
Si on suppose $V_1 : I\!R^n \to I\!R^+$ et $L_t V_1 \leq 0$ sur $I\!R^n$ dans le théorème 1, alors les ensembles A_1 et $\bar{\Omega}_M$ sont vides, et le résultat obtenu est celui du principe d'invariance classique, le théorème 1 est donc bien une extension du principe d'invariance.
Il est important de noter que dans cet article, l'expression "fonction de Lyapunov" devra être comprise dans un sens large qui inclus le cas des fonctions dont la dérivée orbitale peut aussi être positive.

2 Estimation de l'attracteur de Rössler

Le système de Rössler est le suivant:

$$\frac{dx}{dt} = -(y+z), \quad \frac{dy}{dt} = x + ay, \quad \frac{dz}{dt} = b + xz - cz.$$

où a, b et c sont les paramètres du système. Dans ce papier, nous utilisons les valeurs usuelles suivantes:

$$a = b = 0.2, \quad c = 14.0\,.$$

2.1 Détermination de l'ensemble $\bar{\Omega}_M$

Nous cherchons à présent une estimation théorique de l'attracteur de Rössler. Pour cela posons:

$$V_1(x, y, z) = cx^2 + cy^2 + az^2.$$

Alors

$$L_tV_1(x,y,z) = -2\left(-acy^2 + acz^2 - abz + cxz - axz^2\right) \text{ et}$$
$$A_1 := \left\{(x,y,z) \in I\!R^3 : -acy^2 + acz^2 - abz + cxz - axz^2 < 0\right\},$$

c'est à dire que la fonction c_1 du théorème d'extension est donnée par:

$$\Phi(x,y,z) = 2\left(-acy^2 + acz^2 - abz + cxz - axz^2\right).$$

Cherchons la valeur de $M := sup_{X\in A_1}V_1(X)$. La fonction V_1 est convexe, mais la contrainte: $-acy^2 + acz^2 - abz + cxz - axz^2$ ne l'est pas, donc on ne peut appliquer de méthodes classiques comme la technique des multiplicateurs de Lagrange.

On utilise pour cela l'algorithme d'optimisation Knitro, voir [7] (qui est basée sur une méthode de points intérieurs). On trouve alors:

$$sup_{X\in A_1}V_1(X) = 9,8.10^7.$$

Ainsi, $\bar{\Omega}_M$ est l'ellipsoïde définie par:

$$\bar{\Omega}_M = \left\{(x,y,z) \in I\!R^3 : cx^2 + cy^2 + az^2 \leq 9,8.10^7\right\}$$

Toutes les solutions bornées du système de Rössler, pour les paramètres fixés auparavant, convergent dans cette ellipsoïde (selon le principe d'invariance étendu). Ce résultat peut être affiné (on peut trouver une autre fonction V_2 conduisant à un rayon plus petit).

2.2 Détermination d'un ensemble $\bar{\Omega}_m$: L' attracteur de Rössler se situe dans le demi-espace $z > 0$

Nous allons démontrer que, pour l'attracteur classique de Rössler, les solutions (asymptotiquement) sont toujours strictement au dessus du plan $z = 0$. Nous utiliserons pour cela la variance du Principe d'Invariance de LaSalle pour montrer que les solutions bornées de l'attracteur convergent dans le demi-espace $z > 0$.

Considérons donc la fonction de Lyapunov suivante:

$$V_2(x,y,z) = z.$$

On a: $L_tV_2(x,y,z) = xz - cz + b$, d'où, par définition,

$$A_2 := \{(x,y,z) \in I\!R : -xz + cz - b > 0\}.$$

On cherche la valeur de $m := inf_{(x,y,z)\in A}V_2(x,y,z)$; on la calcule comme précedemment grâce au programme d'optimisation Knitro, et on obtient numériquement :

$$m := inf_{(x,y,z)\in A}V_2(x,y,z) = 6,5.10^{-7}.$$

Définissons alors: $\bar{\Omega}_m = \left\{(x,y,z) \in I\!R^3 : z \geq 6,5.10^{-7}\right\}$.

On en conclut donc, d'après le théorème 3, que l'attracteur de Rössler est dans

$$\bar{\Omega}_m = \left\{(x,y,z) \in I\!R^3 : z \geq 6,5.10^{-7}\right\}.$$

Par ailleurs, pour affiner au maximum notre ensemble $\bar{\Omega}_m$, on peut démontrer que les

solutions de l'attracteur de Rössler ne rentrent jamais dans une région située le long du demi-axe positif, en prenant par exemple comme fonction de Lyapunov une paraboloïde elliptique orientée selon l'axe Oz contenant l'origine et en montrant que les solutions ne rentrent jamais à l'interieur (voir Figure 1).

2.3 Récapitulatif:

D'après les extensions du principe d'invariance de LaSalle, toutes les solutions bornées du système de Rössler convergent dans:

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \in I\!R^3 : cx^2 + cy^2 + az^2 \leq 9,8.10^7\right\} \cap \left\{(x,y,z) \in I\!R^3 : z \geq 6,5.10^{-7}\right\}$$

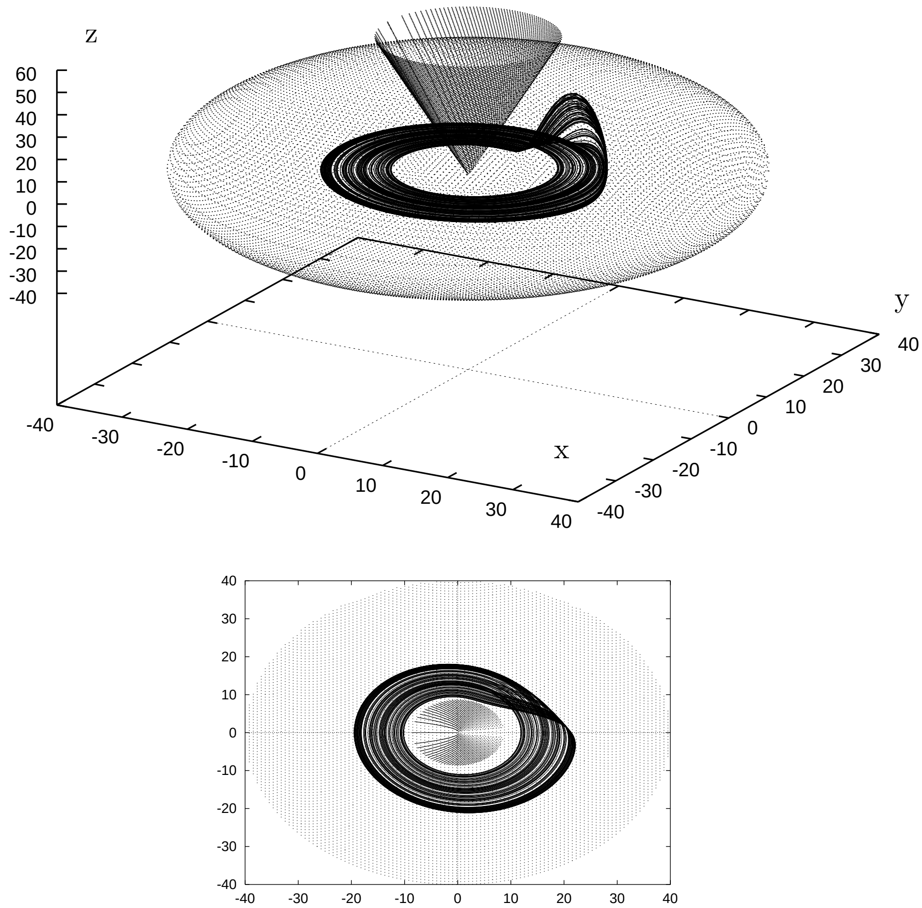

Fig. 1. Illustration numérique de l'estimation de l'attracteur de Rössler, et du 'trou' le long du demi axe positif oz, pour les paramètres $a = 0.2 = b$ et $c = 14$ du système. (a) Vue tridimensionnelle, (b) projection sur le plan xy. L'attracteur (en noir foncé) est strictement contenu dans l'ellipsoïde et à l'extérieur de l'hyperboloïde infinie d'axe de révolution oz, et vérifie $z > 0$.

3 Conclusion

Dans ce article, une version plus générale (et une variance) du principe d'invariance, utile dans l'étude de la stabilité des solutions de systèmes d'équations différentielles, est présentée. Dans cette version, des conditions moins restrictives que les conditions du principe classique sont utilisées, ce qui permet de l'appliquer pour une plus large classe de problèmes.

Ces extensions du principe d'invariance de LaSalle nous ont permis d'étudier l'attracteur de Rössler et de démontrer un résultat important : l'attracteur de Rössler est toujours dans le demi-espace $z > 0$.

Remarquons que les estimations données par ces théorèmes dépendent du choix des fonctions de Lyapunov, l'estimation de l'attracteur de Rössler donnée par l'extension du principe d'invariance de LaSalle peut être affinée par le choix d'une autre fonction de Lyapunov.

Références

[1] J.P. LaSalle, *The stability of Dynamical Systems*, Z.Artstein (1976).

[2] J.P. LaSalle, *Some extensions of Lyapunov's second method*, IRE Trans. Circuit Theory, Vol. **CT-7**, pp. 520-527 (1960).

[3] S. Derivière & M.A. Aziz-Alaoui, *Principe d'Invariance Uniforme et Estimation d'Attracteurs Etranges dans* $\mathbb{R}^3$, 3^{ieme} colloque sur le Chaos temporel et le Chaos spatio-temporel, pp. 65-70, Le Havre, (Septembre 2001).

[4] H.M. Rodrigues, L.F.C.A Alberto & N.G. Bretas, *On the Invariance Principle: Generalizations and Applications to Synchronization*, IEEE, **47**, pp. 730-739 (2000).

[5] H.M. Rodrigues, L.F.C.A Alberto & N.G. Bretas, *Uniform Invariance Principle and Synchronization. Robustness with respect to Parameter Variation*, JDE **Vol 169**, pp. 228-254 (2001).

[6] S. Derivière & M.A. Aziz-Alaoui, *Sur une extension du principe d'invariance de LaSalle*, Preprint, Le Havre, à soumettre, (2002).

[7] R.A. Waltz & J. Nocedal, *KNITRO.2.0*, http://www.ece.northwestern.edu/ nocedal/knitro/obtaininstall.htm