

Y. Pomeau et R. Ribotta

Compte-rendus

de la

5^e Rencontre du Non-Linéaire

Paris 2002

Non Linéaire Publications

Bât. 510 Université de Paris-sud, 91405 ORSAY cedex

pnl@lps.u-psud.fr

<http://pnl.lps.u-psud.fr/pnl>

La loi du 11 mars 1957 n'autorise que les "copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective". **Toute représentation ou reproduction, intégrale ou partielle, faite sans le consentement de l'éditeur est illicite.** Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du Code Pénal.

Dépôt légal : 04.02

ISBN 2-9516773-1-6

EAN 9782951677319

RENCONTRES DU NON LINÉAIRE
Institut Henri Poincaré, PARIS,
14 -15 mars 2002

Nous remercions vivement Michel Broué, Directeur de l'Institut Henri Poincaré pour son aide à l'organisation de ces Rencontres, et le CNRS pour son soutien financier.

Les Rencontres annuelles du Non Linéaire sont organisées par :

| | |
|------------------|---|
| Serge Aubry | <i>Labo. Léon Brillouin - CEA Saclay</i> |
| Pierre Collet | <i>Centre Phys. Théor.- Polytechnique</i> |
| Pierre Coullet | <i>INLN Univ. Nice-Sophia-Antipolis</i> |
| Pierre Glorieux | <i>Labo. PhLAM - Univ. Lille1</i> |
| Yves Pomeau | <i>Labo. Phys. Stat.- ENS Paris</i> |
| Roland Ribotta | <i>Labo. Phys. Solides - Orsay</i> |
| Jean-Claude Saut | <i>Labo. Anal. Num. EDP - Orsay</i> |
| Bernard Schmitt | <i>Labo. Topologie - Univ. Bourgogne. Dijon</i> |

Ces compte-rendus et ceux des années précédentes sont disponibles auprès de :

Non Linéaire Publications
Bât. 510, Université de Paris-sud, 91405 ORSAY cedex

Toutes les informations concernant les Rencontres sont publiées sur le serveur :

<http://pnl.lps.u-psud.fr/pnl>

Renseignements :

pnl@lps.u-psud.fr,

Sommaire des communications

| | |
|---|-----------|
| Modèles d'interaction radiation-matière en milieu résonnant <i><u>B. Bidégaray</u></i> | 1 |
| Cavité laser auto-organisable <i>N. Dubreuil, A. Godard, S. Maerten, V. Reboud, <u>G. Pauliat</u> et G. Roosen</i> | 7 |
| Influence d'une numérisation de signal sur la synchronisation dans une transmission de données sécurisées par un chaos analogique <i><u>X. Bavard</u>, L. Larger et J.P. Goedgebuer</i> | 13 |
| Impulsions subpicosecondes verrouillées en phase dans un laser à fibre dopée à blocage de modes passif <i><u>F. Belhache</u>, Ph. Grellu et F. Gутty</i> | 19 |
| Etudes expérimentales de chaos sur le laser à électrons libres de Super-ACO <i>C. <u>Bruni</u>, G. De Ninno, D. Fanelli, M.E. Couprie</i> | 25 |
| Observation de la brisure de symétrie de l'état lié de solitons vectoriels dans un milieu de Kerr isotrope <i><u>C. Cambournac</u>, T. Sylvestre, H. Maillotte, P. Kockaert, B. Vanderlinden, Ph. Emplit et M. Haelterman</i> | 31 |
| Modélisation mathématique du régime développé d'une tornade atmosphérique <i><u>A. Chauvière</u> et J. Chaskalovic</i> | 37 |
| Guide d'onde ruban reconfigurable induit par solitons spatiaux photo-voltaïques <i><u>G. Couton</u> et M. Chauvet</i> | 43 |
| Intermittence spatiotemporelle dans un écoulement de Couette de torsion <i><u>A. Cros</u> et P. Le Gal</i> | 49 |
| Calcul de propriétés d'optique non-linéaire dans les cristaux <i><u>Clovis Darrigan</u> et Michel Rérat</i> | 55 |
| Etudes théoriques de chaos sur le laser à électrons libres de Super-ACO <i><u>G. De Ninno</u>, D. Fanelli, M.E. Couprie</i> | 61 |
| Estimation d'attracteurs étranges, Application à l'attracteur de Rössler <i><u>S. Derivière</u> et M. Aziz-Alaoui</i> | 67 |

| | |
|--|------------|
| Instabilités spatio-temporelles dans un laser <i>J. Plumecoq, C. Szewaj, M. Lefranc, D. Derozier, T. Erneux et S. Bielawski</i> | 72 |
| Accord de phase et gain des interactions paramétriques optiques à 4 photons, spécificités par rapport aux couplages à 3 ondes <i>J. Douady, J.P. Fève et B. Boulanger</i> | 73 |
| Dispersion modale de polarisation et instabilité de modulation vectorielle dans les fibres à cristaux photoniques <i>Laurent Provino, John M. Dudley, Alexandre Sauter et Guy Millot</i> | 79 |
| Un exemple d'autofocalisation? <i>E. Dumas</i> | 85 |
| Mise en œuvre d'un générateur de chaos optoélectronique haute fréquence pour les télécommunications optiques sécurisées <i>É. Genin, L. Larger et J.P. Goedgebuer</i> | 91 |
| Structures non-linéaires et fluctuations quantiques dans un Oscillateur Paramétrique Optique <i>S. Gigan, N. Treps, S. Ducci, M. Martinelli, A. Maitre and C. Fabre</i> | 97 |
| Influence d'un gradient radial de température sur l'instabilité de Couette-Taylor <i>A. Goharzadeh, F. Dumouchel et I. Mutabazi</i> | 103 |
| Solénoïdes : un point de vue géométrique riche en conséquences dynamiques <i>M. Lagrange</i> | 109 |
| Démonstration expérimentale d'une bifurcation de Hopf sous-critique dans un système dynamique à retard de non linéarité localement cubique <i>L. Larger et T. Erneux</i> | 113 |
| Pénétration nonlinéaire dans une bande interdite photonique <i>F. Géniet et J. Léon</i> | 119 |
| Turbulence faible dans les ondes de Faraday <i>L. Pastur, M.T. Westra et W. van de Water</i> | 124 |
| Intermittences à multi-canaux de réinjection <i>C. Letellier, P. Werny, J.-M. Malasoma et R. Gilmore</i> | 125 |
| Mélange et couplage de polarisation dans des Oscillateurs Paramétriques Optiques de type II <i>L. Longchambon, K.S. Zhang, J. Laurat, T. Coudreau et C. Fabre</i> | 131 |
| Thermocapillary instabilities in laterally heated liquid layers <i>S. Madruga, C. Pérez-García and G. Lebon</i> | 135 |

| | |
|---|-----|
| Détermination du groupe d'équivariance d'un modèle hyperchaotique de convection de Rayleigh-Bénard <i>M.-A. Boiron et J.-M. Malasoma</i> | 141 |
| Bifurcation globale de l'écoulement de Von Kármán <i>L. Marié, F. Daviaud et A. Chiffaudel</i> | 147 |
| Quasilinearité du transport dans le système ondes-particules en turbulence développée <i>Y. Elskens et D.F. Escande</i> | 152 |
| Bifurcation dans le spectre de l'oscillation issue d'un oscillateur optique non-linéaire photoréfractif <i>P. Mathey, H.R. Jauslin, S.G. Odoulov et D. Rytz</i> | 153 |
| Motifs spiralés engendrés par des bulles advectées radialement à la surface d'un liquide <i>C. Mathis et P. Maissa</i> | 159 |
| Récepteur d'informations digitales basé sur la résonance stochastique <i>S. Morfu, J.C.Comte, J.M. Bilbault et P. Marquié</i> | 165 |
| Modèle à trois champs de phase de la croissance eutectique: Asymptotique et simulations <i>R. Folch et M. Plapp</i> | 170 |
| Transmission non linéaire à travers une couche mince au voisinage de l'angle limite. Cas d'un nouveau polymère octupolaire à fort effet Kerr non résonnant. <i>R. Mountasser, H. Maillotte et F. Cherioux</i> | 171 |
| Génération d'un large continuum spectral dans le mode fondamental d'une fibre telecom standard pompée par un microlaser <i>A. Mussot, L. Provino, T. Sylvestre et H. Maillotte</i> | 177 |
| Le Collagène: un modèle de câble à trois brins <i>Sébastien Neukirch et Gert van der Heijden</i> | 183 |
| Sources et Puits dans des structures d'ondes progressives <i>L. Pastur, M.T. Westra et W. van de Water</i> | 189 |
| Influence des agents d'ancrage sur la re-orientation optique des cristaux liquides nématiques dopés par les colorants <i>A. Petrossian et S. Residori</i> | 195 |
| Analyse des régimes d'intermittence spatio-temporelle à la périphérie d'une colonne de plasma en champ magnétique <i>M. Matsukuma, Th. Pierre et D. Guyomarch</i> | 201 |

| | |
|--|------------|
| Structuration bidimensionnelle d'un film visqueux sous gravité déstabilisante avec alimentation continue | |
| <i>Ch. Pirat, Ph. Maïssa, Ch. Mathis et L. Gil</i> | 207 |
| Une nouvelle approche pour étudier les effets non linéaires dans les réseaux de Bragg fibrés | |
| <i>S. Pitois, M. Haelterman et G. Millot</i> | 213 |
| Amplification paramétrique à très large bande spectrale et gain plat dans un arrangement multi-tronçons de fibres non-linéaires | |
| <i>L. Provino, A. Mussot, E. Lantz, T. Sylvestre et H. Maillotte</i> | 219 |
| Génération de la fréquence somme pour les ondes optiques en milieu dissipatif | |
| <i>S. Residori, A. Petrossian, L. Gil</i> | 225 |
| Modes de propagation et résonance stochastique dans un réseau d'atomes froids | |
| <i>M. Schiavoni, F.-R. Carminati, L. Sanchez-Palencia, F. Renzoni et G. Grynberg</i> | 231 |
| Diffusion anormale multifractale dans le comportement natatoire d'organismes marins | |
| <i>F. Schmitt et L. Seuront</i> | 237 |
| Technique des homologies pour la description topologique de flux chaotiques | |
| <i>D. Sciamarella et G. B. Mindlin</i> | 243 |
| Différentes classes de systèmes dynamiques identifiés par leurs circuits de rétroaction | |
| <i>C. Letellier, R. Thomas et M. Kaufman</i> | 249 |
| Analogie mécanique d'un laser | |
| <i>N. Vandenberghe et P. Couillet</i> | 255 |
| Instabilité modulationnelle dans une ligne de transmission électrique non linéaire discrète | |
| <i>D. Yemélé, P. Marquié et J.M. Bilbault</i> | 259 |
| Étude numérique des propriétés de cohérence des spectres de supercontinuum engendrés dans les fibres à cristaux photoniques | |
| <i>Stéphane Coen et John M. Dudley</i> | 265 |

Modèles d'interaction radiation-matière en milieu résonnant

B. Bidégaray

Laboratoire de Modélisation et de Calcul, CNRS UMR 5523

Tour IRMA, B.P. 53, 38041 Grenoble Cedex 9

Brigitte.Bidegaray@imag.fr

Résumé

La description semi-classique de l'interaction radiation-matière dans un contexte résonnant utilise le modèle de Maxwell-Bloch. Nous décrivons dans cet article quelques avancées récentes en modélisation tant physique que numérique qui permettent d'aborder la simulation d'une plus grande variété de phénomènes physiques. La maîtrise de ce modèle permet d'une part d'envisager d'aborder des modèles encore plus complexes, mais aussi de justifier rigoureusement l'utilisation de certains modèles simplifiés.

1 Introduction

Les intensités et les temps d'impulsion accessibles par les lasers nécessitent un modèle semi-classique pour la description de l'interaction radiation-matière. Étant donné l'importance des phénomènes transitoires, un modèle classique mais dans le domaine temporel sert à décrire la propagation du champ. Les phénomènes d'interaction sont d'autant plus importants que la fréquence de l'onde incidente est en rapport avec une fréquence propre du matériau. On parle alors de milieu résonnant. Pour rendre compte de ces fréquences propres, le seul effet du milieu sur l'onde ne suffit plus (comme dans les modèles classiques) et un modèle quantique est requis pour la description de l'évolution du matériau.

Le modèle le plus précis dans ce contexte est alors le modèle de Maxwell-Bloch. Ce modèle ne suppose pas d'hypothèses *a priori* sur la forme des solutions. En fonction du paramétrage du milieu et de l'onde, on peut ainsi traiter de multiples applications (dont nous donnerons des exemples au paragraphe 3.3) et combiner plusieurs effets. Néanmoins son utilisation dans des codes de calcul scientifique est restreint à des dispositifs de petites tailles.

Cependant dans certaines configurations expérimentales des modèles beaucoup plus grossiers sont utilisés. Bien souvent, on se contente de sélectionner une ou plusieurs fréquences d'intérêt et *modulo* quelques hypothèses supplémentaires, le modèle le plus couramment obtenu est celui de Schrödinger non-linéaire.

De nombreux autres modèles intermédiaires émaillent la littérature (modèle de Lorentz, équations de taux, ...). Nous nous intéressons ici plus particulièrement au modèle de Maxwell-Bloch. Les seules équations de Bloch peuvent déjà susciter des problématiques aussi bien du point de vue théorique que numérique, que nous présentons dans la section 2. Nous traitons dans la section 3 le couplage avec les équations de Maxwell ainsi que des applications. Enfin, la dernière section est consacrée aux conclusions et aux nombreuses perspectives dans la complexification de ce modèle ainsi que dans la justification de modèles simplifiés.

2 Équations de Bloch

2.1 Le modèle

La dérivation des équations de Bloch peut se trouver dans de nombreux ouvrages (par exemple [4, 8, 9, 10, 11]). Celles-ci décrivent l'évolution temporelle d'une observable appelée matrice densité :

$$\partial_t \rho_{nm} = \underbrace{-i\omega_{nm}\rho_{nm} - i\mathbf{E}(t) \cdot [\mu, \rho]_{nm}}_{\text{mécanique quantique}} \quad \underbrace{+Q(\rho)_{nm}}_{\text{phénoménologique}}$$

Dans cette description on suppose que le matériau est bien décrit par ses N premiers états propres. Les termes diagonaux de la matrice ρ_{nn} décrivent la population d'un niveau n , $1 \leq n \leq N$, donné. Les termes extra-diagonaux représentent la cohérence entre deux niveaux.

Le premier terme du second membre provient de l'hamiltonien non perturbé du système qui est caractérisé par la fréquence de transition $\omega_{nm} = \omega_n - \omega_m$ entre deux niveaux.

Le deuxième terme provient de l'effet d'un champ électromagnétique sur le système. Nous considérons dans cette section que le champ $\mathbf{E}(t)$ est donné. Le moment dipolaire, $\mu = \mathbf{p}/\hbar$, est une matrice à valeurs vectorielle qui décrit l'aptitude d'une transition à générer une polarisation dans chacune des directions. Enfin, $[\mu, \rho] = \mu\rho - \rho\mu$ est un commutateur et $Q(\rho)$ un terme de relaxation phénoménologique qui provient de nombreuses sources (mélange statistique, collisions, vibrations, ...) et est l'objet du paragraphe suivant.

2.2 Les termes de relaxation

Tous les modèles de la littérature s'accordent sur la forme des termes de relaxation transverse (i.e. affectant les cohérences) :

$$Q(\rho)_{nm} = -\gamma_{nm}\rho_{nm}, \text{ avec } \gamma_{nm} = \gamma_{mn}.$$

En revanche, plusieurs modèles de relaxation longitudinale (qui affecte les populations) sont présents dans la littérature physique. Leurs mérites relatifs ne sont jamais étudiés. Nous avons décidé (voir [3, 4]) de les comparer du point de vue de la bonne modélisation de l'émission spontanée et de la conservation de la trace (la somme des population doit valoir 1). Cette étude distingue le modèle de l'équation maîtresse de Pauli

$$Q(\rho)_{nn} = \sum_{m \neq n} W_{nm}\rho_{mm} - \sum_{m \neq n} W_{mn}\rho_{nn}, \quad \Gamma_n = \sum_{m \neq n} W_{mn},$$

dont les états d'équilibres ($Q(\rho) = 0$) sont imposés par la relation

$$W_{nm} = W_{mn}e^{\hbar(\omega_m - \omega_n)/\kappa T}.$$

Pour de plus préserver au cours du temps des propriétés de positivité ($\rho_{nn} \in [0, 1]$, $|\rho_{nm}|^2 \leq \rho_{nn}\rho_{mm}$, ρ opérateur positif), il faut imposer des conditions sur les coefficients. Pour les deux premières propriétés, on peut trouver des conditions nécessaires et suffisantes qui sont toujours vérifiées dans les exemples physiques :

$$\gamma_{nm} \geq 0, \quad W_{nm} \geq 0, \quad 2\gamma_{nm} \geq \Gamma_n + \Gamma_m - \sqrt{W_{nm}W_{nm}}.$$

Pour la dernière condition, on peut faire l'hypothèse (très restrictive mais à nouveau toujours proposée dans les modèles physiques) que γ_{nm} est de la forme

$$\gamma_{nm} = \frac{1}{2}(\Gamma_n + \Gamma_m) + \gamma_n^{coll} + \gamma_m^{coll},$$

auquel cas il suffit de vérifier que $\gamma_n^{coll} \geq 0$.

2.3 Enjeux numériques

Les seuls travaux numériques préexistant à cette étude est un code Maxwell-Bloch mono- ou bi-dimensionnel à deux niveaux d'énergie ($N = 2$) [13]. Le schéma utilisé pour les équations de Bloch est celui de Crank-Nicolson. Il conserve la trace en théorie mais pas en pratique (erreurs cumulées des points fixes). Par ailleurs, il ne préserve pas les propriétés de positivité pour plus de deux niveaux. C'est pourquoi, nous proposons un schéma de splitting [4] qui pallie ces défauts.

3 Modèle de Maxwell-Bloch

3.1 Le modèle

On ne suppose maintenant plus que le champ $\mathbf{E}(t)$ est donné, mais qu'il est solution des équations de Maxwell :

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 \varepsilon_\infty \partial_t \mathbf{E} &= \frac{1}{\mu_0} \text{rot } \mathbf{B} - \partial_t \mathbf{P}, \\ \partial_t \mathbf{B} &= -\text{rot } \mathbf{E}. \end{aligned}$$

Le couplage avec les équations de Bloch est réalisé par l'expression de la polarisation

$$\mathbf{P} = Na \text{Tr}(\mathbf{p}\rho),$$

et l'espace joue le rôle d'un paramètre *via* $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ dans les équations de Bloch.

Se pose alors le problème d'existence et d'unicité de solutions au système de Maxwell-Bloch. Une réponse positive est donné dans [2] pour des temps courts. Le problème en temps long est ouvert et semble receler de nombreuses difficultés algébriques et analytiques. La dérivation rigoureuse de modèles asymptotiques pour des applications particulières est également un vaste problème sur lequel nous reviendrons à la section 4.

3.2 Enjeux numériques

Pour obtenir un code efficace, on utilise dans [13] une méthode de différences finies (due à Yee [12]) dont le point important est qu'il utilise des grilles de discrétisation décalées en temps et en espace pour \mathbf{E} et \mathbf{B} . Le schéma de splitting pour les équations de Bloch permet de conserver ces avantages (bien mieux que le schéma de Crank-Nicolson) à condition de choisir judicieusement la grille de discrétisation de la matrice densité [1]. On obtient alors un code explicite, parallélisable en grande partie et facilement modulable pour l'appliquer à différentes circonstances dont nous donnons des exemples ci-après.

3.3 Applications

Nous présentons ici quelques applications possibles de ce type de modèle. On peut en imaginer bien d'autres : cavités laser, diffusion Brillouin, ...

3.3.1 Transparence auto-induite

La transparence auto-induite est un phénomène qui se décrit très bien avec l'équation de Schrödinger cubique, il ne nécessite donc pas de modèle quantique. Il est intéressant de voir qu'il se retrouve dans ce modèle plus complet. Il s'agit de vérifier qu'une onde (dont le profil correspond au soliton de Schrödinger cubique) traverse un milieu sans être modifiée pendant que le milieu subit un nombre entier d'inversions totales. Ce cas test permet de quantifier les performances d'un schéma sans être pollué par les problèmes de positivité puisqu'il ne fait intervenir que deux niveaux.

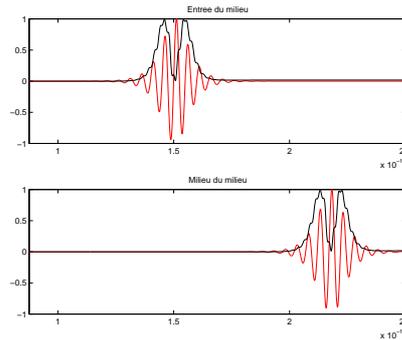


FIG. 1 – *Transparence auto-induite: évolution temporelle de \mathbf{E} et ρ_{11} . L'onde se propage sans modification.*

3.3.2 Transfert de cohérence

A l'opposé du cas test précédent, le transfert de cohérence est un cas test typiquement quantique qui nécessite de modéliser les cohérences (ce que ne font pas des équations de taux, par exemple). Comme son nom l'indique, il s'agit de considérer une cohérence initialement installée entre les niveaux 1 et 2 (par exemple) pour la transférer entre les niveaux 2 et 3.

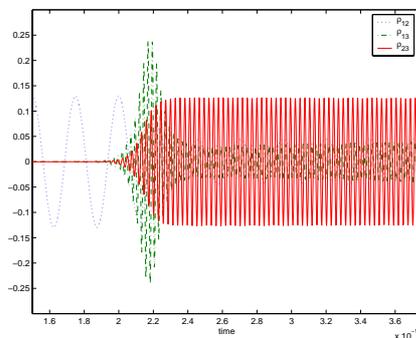


FIG. 2 – *Transfert de cohérence: évolution temporelle des cohérences.*

3.3.3 Doublage de fréquence

Pour les premiers bancs d'essai d'un code multi-dimensionnel, on peut essayer de créer une fréquence double dans une polarisation différente de la polarisation incidente. Ce cas test passe sans problème avec l'apparition bien sûr également d'un phénomène de rectification optique.

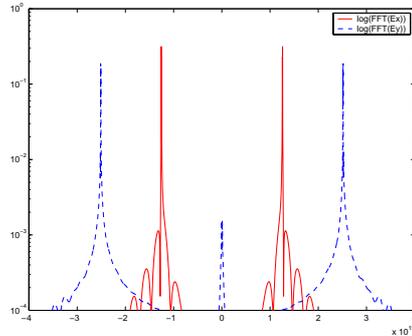


FIG. 3 – *Doublage de fréquence : fréquence double et rectification dans une autre polarisation.*

3.3.4 Diffusion Raman

Enfin, on peut regarder des cas tests peut être plus intéressants pour les applications, par exemple la diffusion Raman. Pour réaliser le cas test présent en rendant compte des différents pics avec des couplages d'équations de Schrödinger, il faudrait la bagatelle de 14 équations de Schrödinger non linéaires, avec le risque d'oublier un phénomène (Raman multiples, Raman sur la fréquence triple).

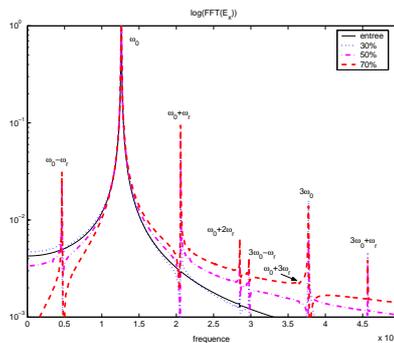


FIG. 4 – *Diffusion Raman : fréquences apparues (diffusions simples, multiples, triplage de fréquence) en différents points du milieu.*

4 Conclusion

Nous avons donné un cadre théorique pour le modèle de Maxwell-Bloch dans des milieux isotropes. Ceci a permis d'élaborer des schémas numériques dédiés qui ouvrent la voie vers des applications physiques diverses. La bonne maîtrise de ce modèle permet

d'envisager de le rendre plus complexe, pour par exemple rendre compte d'anisotropies dans des cristaux. Ceci nécessite de nouvelles avancées avec l'introduction de la prise en compte minimale de niveaux dégénérées (algèbre et chimie quantique) et la parallélisation effective des codes.

Pour les applications à l'optique, les discrétisations spatiale et temporelle est trop fine par rapport à la taille de la plupart des dispositifs pour rendre ce modèle pleinement efficace. On peut cependant l'utiliser soit pour valider des modèles plus grossiers soit dans des contextes où les matériaux sont petits. C'est le cas par exemple de la caractérisation de boîtes quantiques dans des semi-conducteurs. Il faut alors enrichir l'étude de l'effet d'aléas sur des phénomènes résonnants. Par ailleurs, la résolution des équations de Maxwell-Bloch constitue un problème direct auquel il faudrait associer un problème inverse et une méthode numérique d'identification de paramètres.

Un autre programme ambitieux est la dérivation rigoureuse de modèles asymptotiques qui pourrait être assortie de vérifications numériques des limites de validité des codes et nécessite donc un code Maxwell-Bloch performant. Une première approche dans ce sens est présentée dans [6, 7] et permet, sous l'hypothèse de faible inversion, de dériver une équation de Schrödinger non-linéaire à partir du modèle de Maxwell-Bloch à deux niveaux. Les phénomènes fortement résonnants sortent typiquement du cadre de ce type d'asymptotique, ce qui laisse un large champ pour des développements ultérieurs.

Références

- [1] B. Bidégaray, *Time discretizations for Maxwell-Bloch equations*, prépublication MIP 00.44 (2000), soumis à Numerical Methods for Partial Differential Equations.
- [2] B. Bidégaray, *Contributions à l'électromagnétisme dans le domaine temporel. Modélisation classique et quantique en optique non linéaire*, Habilitation à diriger des recherches de l'Université Paul Sabatier (2001).
- [3] B. Bidégaray, *De Maxwell-Bloch à Schrödinger non linéaire: une hiérarchie de modèles en optique quantique*, Cours Post-DEA, Université Paris-Orsay (2001).
- [4] B. Bidégaray, A. Bourgeade, D. Reignier, *Introducing physical relaxation terms in Bloch equations*, J. Comput. Phys., **170**, 603-613, (2001).
- [5] R.W. Boyd, *Nonlinear Optics*. Academic Press (1992).
- [6] J.-L. Joly, G. Métivier, J. Rauch, *Optique géométrique non linéaire et équations de Maxwell-Bloch*, Séminaire de l'École Polytechnique (1999).
- [7] J.-L. Joly, G. Métivier, J. Rauch, *Transparent nonlinear geometric optics and Maxwell-Bloch equations*, J. Differ. Equations, **166**, 175-250, (2000).
- [8] J.R. Lalanne, A. Ducasse, S. Kielich, *Interaction laser-molécule – Physique du laser et optique non linéaire moléculaire*, Polytechnica (1994).
- [9] R. Loudon, *The Quantum Theory of Light*, Oxford Science Publications (1983).
- [10] R.H. Pantell, H.E. Puthoff, *Electronique quantique en vue des applications*, Dunod (1973).
- [11] Y.R. Shen, *The Principles of Nonlinear Optics*, Wiley (1984).
- [12] K.S. Yee, *Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations*, IEEE Trans. Anten. Propagat., **14**, 302-307, (1966).
- [13] R.W. Ziolkowski, J.M. Arnold, D.M. Gogny, *Ultrafast pulse interaction with two-level atoms*. Phys. Rev. A, **52**, 3082-3094, (1995).

Cavité laser auto-organisable

N. Dubreuil, A. Godard, S. Maerten, V. Reboud, G.Pauliat, G. Roosen

Laboratoire Charles Fabry de l'Institut d'Optique, UMR 8501,

Centre Scientifique d'Orsay, Bât. 503, 91403 Orsay cedex

`gilles.pauliat@iota.u-psud.fr`

Résumé

Un milieu holographique dynamique est un matériau qui reproduit, sous la forme d'un hologramme, la figure d'éclairement à laquelle il est soumis. Une modification de la figure d'éclairement est suivie d'une remise à jour de l'hologramme. Nous montrons que l'insertion d'un tel matériau à l'intérieur d'une cavité laser peut induire des comportements spectaculaires. Les modes qui oscillent induisent un hologramme, hologramme qui en retour modifie les pertes pour chacun de ces modes. Cette auto-adaptation de la structure modale à l'hologramme (et de l'hologramme à la structure modale) peut, par exemple, forcer une cavité initialement multimode à n'osciller que sur un seul mode longitudinal.

1 Introduction

L'insertion de filtres spectraux est souvent nécessaire pour forcer des cavités laser à n'osciller que sur un seul mode. Les filtres les plus couramment utilisés sont des éléments statiques comme le filtre étalon de Fabry Perot, le filtre de Lyot, une sous cavité. La sélection d'un mode s'obtient par un réglage du pic de transmission du filtre sur le mode que l'on désire voir osciller; les autres modes présentant des pertes plus grandes passent sous le seuil d'oscillation laser. Ces filtres présentent l'avantage de pouvoir choisir le mode que l'on veut faire osciller mais, en contrepartie, ils requièrent un alignement et un positionnement précis et délicats. Ces réglages sont à refaire si la cavité se modifie, sous l'effet de contraintes thermiques, mécaniques ou suite à son vieillissement.

Comme alternatives à ces systèmes, des cavités laser auto-organisables ont été proposées. Ce sont des cavités laser dans lesquelles est inséré un matériau holographique dynamique, c'est-à-dire un matériau qui reproduit, sous la forme d'un hologramme, la figure d'éclairement à laquelle il est soumis. Une modification de la figure d'éclairement est suivie d'une remise à jour de l'hologramme. Dans la cavité, les modes y inscrivent un hologramme, hologramme qui en retour joue le rôle de filtre pour ces modes. Il y a donc une adaptation mutuelle des modes à l'hologramme. Pour un système correctement conçu, le résultat de cette auto-organisation peut conduire à un état stationnaire pour lequel il n'y a plus qu'un seul mode qui oscille.

Ces filtres étant auto-adaptatifs ils ne requièrent ni asservissement ni réglage. De plus, ils s'adaptent en permanence à toutes les perturbations de la cavité pour conserver ce fonctionnement monomode.

De nombreux milieux holographiques dynamiques ont été utilisés, chacun avec un mécanisme d'enregistrement particulier. La création de réseaux thermiques, dans une solution de nitrate de cuivre, par la structure longitudinale des modes d'un laser Nd:YAG a été démontrée [1]. L'inscription de réseaux de gain dans des amplificateurs solides permet

également d'établir une sélection entre les modes d'un laser, par exemple Nd:YAG [2]. De façon similaire, des réseaux d'absorption ont été enregistrés dans des cellules d'absorbant saturable insérées dans des lasers [3].

Nous nous intéressons ci-après à un autre milieu d'enregistrement holographique : les cristaux photoréfractifs [4]. Ces matériaux holographiques dynamiques sont particulièrement attrayants pour ce type d'applications. Ils reproduisent, sous la forme d'un réseau d'indice de réfraction, la figure d'interférence qui les illumine. Ils s'adaptent à toute modification de cette figure d'interférence en un temps d'autant plus court que l'éclairement est fort. Ces cristaux inorganiques ne subissent absolument aucune fatigue et peuvent fonctionner indéfiniment.

Ces cristaux ont été employés pour créer des filtres nommés Fabry-Perot auto-adaptatifs. Après une brève description de leur fonctionnement, nous rappelons ci-dessous les résultats du processus d'auto-adaptation obtenus dans deux lasers différents.

2 Fonctionnement des filtres auto-adaptatifs

Un Fabry-Perot auto-adaptatif est construit autour d'un cristal photoréfractif qui est inséré dans une cavité laser linéaire entre le milieu amplificateur et le miroir de sortie. La figure 1 montre un exemple de filtre auto-adaptatif dans un laser linéaire à milieu amplificateur Nd:YVO₄. Les ondes stationnaires inscrivent un hologramme par réflexion dans le cristal. Par diffraction, cet hologramme agit comme un miroir qui renvoie une partie de la lumière vers le milieu amplificateur. Le cristal photoréfractif et le miroir de sortie du laser jouent donc bien le rôle d'un Fabry-Perot.

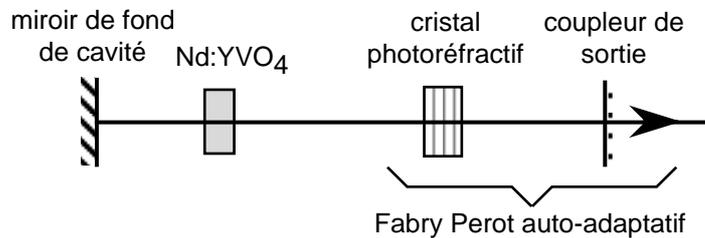


FIG. 1 – Exemple de cavité laser à amplificateur Nd:YVO₄ avec un filtre auto-adaptatif.

L'efficacité de ce filtrage provient d'une des caractéristiques des cristaux photoréfractifs : ils sont dits "non centro-symétriques". Ainsi, leur orientation peut être choisie de sorte que, si un seul mode oscille, l'onde réfléchiée par l'hologramme inscrit par ce mode interfère toujours constructivement avec celle réfléchiée par le miroir de sortie. La présence de l'hologramme réduit donc les pertes pour ce mode : ce filtre est bien auto-adapté au mode actif et ce mode est stabilisé au détriment des autres. Si le cristal avait été mis dans la mauvaise position, c'est-à-dire tourné de 180°, les pertes auraient été augmentées et le comportement monomode ne serait pas stable.

À l'allumage du laser aucun hologramme n'est inscrit et plusieurs modes oscillent. Ces modes commencent à inscrire un hologramme qui, en retour, les modifie : il y a ainsi une adaptation mutuelle entre cet hologramme et les modes qui oscillent. On peut montrer [5] que, pour un système correctement conçu, le résultat de cette adaptation mutuelle est de forcer la source laser à émettre sur un seul mode longitudinal. Le temps d'adaptation du système est de l'ordre de la constante de temps photoréfractive, typiquement de quelques

millisecondes à quelques secondes. Ce fonctionnement monomode est ensuite maintenu même pour des cavités non stabilisées : le filtre s'adapte en permanence au mode qui oscille. Il est ainsi possible de construire des sources monomode sans asservissement.

3 Démonstrations

Le fonctionnement d'un filtre de Fabry-Perot auto-adaptatif a été démontré dans des lasers aussi différents que des lasers à colorant fonctionnant en continu [6], un laser saphir dopé au Titane fonctionnant en régime impulsif [7], plusieurs lasers Nd:YVO₄ [7,8] et des diodes laser en régime continu [9,10]. Nous illustrons ci-dessous le fonctionnement de ce type de filtres dans deux lasers différents, un laser Nd:YVO₄ et une diode laser montée dans cavité externe.

3.1 Exemple dans un laser Nd:YVO₄

Un exemple typique de cavité employant un filtre auto-adaptatif est montré sur la figure 1 [7,8]. L'amplificateur est un cristal de YVO₄ dopé à 1% en néodyme. Il est traité anti-reflet sur ses deux faces à la longueur d'onde d'émission de 1,06 μm . Il est pompé optiquement à 808 nm au travers du miroir de fond de cavité qui est traité anti-reflet à 808 nm et à réflexion maximale à la longueur d'onde d'émission de 1,06 μm . Il est positionné à moins de 1 mm du miroir, c'est-à-dire le plus près possible compte tenu de l'encombrement. L'autre miroir, le miroir de couplage possède un coefficient de transmission de 10% et un rayon de courbure de 10 cm. La longueur totale de la cavité est d'environ 6 cm. Le cristal photoréfractif est un échantillon de BaTiO₃, dopé au rhodium pour le rendre sensible à la longueur d'onde de 1,06 μm . Ce cristal, d'épaisseur 3 mm, nous a été fourni par D. Rytz de la société FEE à Idar-Oberstein en Allemagne. En fait, les dimensions exactes de la cavité sont sans grande importance. Nous avons construit plusieurs cavités à amplificateur Nd:YVO₄. Quelle que soit la longueur de la cavité et quel que soit l'emplacement du cristal photoréfractif nous avons toujours obtenu un fonctionnement correct du filtre.

Sans cristal photoréfractif nous observons toujours un comportement multimode. Avec un cristal photoréfractif nous obtenons systématiquement un comportement monomode au bout d'un temps d'adaptation variable, dépendant de la structure modale à l'allumage du laser et de la puissance émise. Lorsque le laser émet une puissance de l'ordre de 25 mW, ce temps est de l'ordre de quelques secondes et au plus d'une minute.

Le filtre de Fabry-Perot photoréfractif ne nécessite absolument aucun réglage. Le cristal photoréfractif doit juste être sur le trajet du faisceau, son orientation à plus de 10° près n'a aucune importance.

Une fois l'état monomode atteint, celui-ci est maintenu tant que le laser est allumé et ceci même, si pour une raison ou une autre, la longueur de la cavité change. La fréquence dérive mais l'hologramme s'adapte en permanence à cette dérive. À l'extinction du laser l'hologramme disparaît, typiquement en quelques dizaines de secondes. Un nouvel hologramme s'inscrira lors du prochain allumage.

Expérimentalement, avec la puissance maximale du faisceau de pompage, nous avons pompé ce laser jusqu'à 5 fois au-dessus de son seuil sans observer de modification du fonctionnement du filtre auto-adaptatif. Nous pensons être encore très en dessous des limites puisque des simulations numériques [8] de ce laser montrent qu'un pompage 30 fois au-dessus du seuil doit être possible.

3.2 Exemple avec une diode laser à 810 nm

Le montage expérimental est décrit sur la figure 2 [9]. La puce semi-conductrice est une diode laser SDL (modèle SDL 5411) limitée par diffraction. Sa puissance maximale, avant d'être traitée anti-reflet, est de 100 mW. Avant d'être insérée dans la cavité, une de ses faces est traitée anti-reflet. Le faisceau issu de la diode est rendu parallèle par une lentille asphérique. La cavité de longueur 10 mm est close par un miroir plan de réflectivité 57%. Le cristal photoréfractif de BaTiO_3 est dopé au Cobalt pour optimiser sa sensibilité à 810 nm. Son épaisseur est de 2 mm. Il est positionné à 4 mm de la lentille. Ce cristal provient également de la société F.E.E. Après traitement anti-reflet, et avant son insertion dans la cavité, le courant de seuil de la diode est de 18 mA. Il tombe à 11 mA dans la cavité sans cristal photoréfractif et remonte à 12 mA après insertion du cristal.

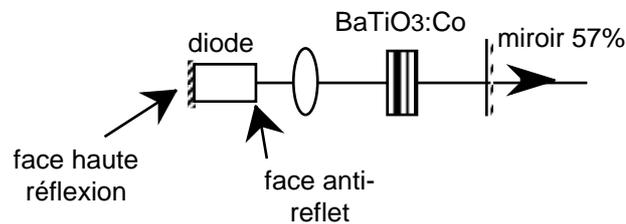


FIG. 2 – Diode laser à cavité étendue comportant un filtre de Fabry-Perot auto-adaptatif.

Sans cristal photoréfractif, il existe quelques zones de couples de courant d'injection et de température pour lesquels la cavité oscille sur un seul mode longitudinal; pour les autres points de fonctionnement elle est multimode. Lorsque l'on insère le cristal photoréfractif dans la cavité et à l'allumage du laser, la diode oscille également parfois de façon monomode, parfois multimode. Néanmoins, après un temps maximum de quelques dizaines de secondes, l'adaptation mutuelle de l'hologramme à la structure modale permet de toujours atteindre un fonctionnement monomode et ceci jusqu'à des courants d'injection égaux à trois fois le courant de seuil.

Une évolution temporelle typique du spectre émis par la diode est montrée sur la figure 3. Les acquisitions ont été faites pour un courant égal à 1,5 fois le courant de seuil. Le spectre est acquis par un interféromètre de Fabry-Perot à balayage dont l'intervalle spectral libre vaut 1,5 GHz. Un spectre est acquis toutes les 5 s. Au temps $t = 0$, on ouvre un obturateur situé dans la cavité. Le spectre initial, fortement multimode est donc acquis alors que l'hologramme photoréfractif n'a pas eu le temps de s'inscrire. On observe ensuite une modification du spectre qui se réduit à un seul mode au bout de 40 s. Après un saut de mode final, on arrive à un état final stable monomode qui le reste pendant plusieurs dizaines de minutes. D'autres points de fonctionnement de la diode produisent d'autres cinétiques mais l'état final est toujours un état monomode.

Sur une durée d'une minute, la longueur de cohérence de cette diode est de plus d'un mètre ce qui est suffisant pour de nombreuses applications en interférométrie. Nous pensons que le passage de la cavité actuelle, qui est ouverte et constituée de nombreuses montures, à une cavité monolithique permettra d'augmenter significativement cette longueur de cohérence.

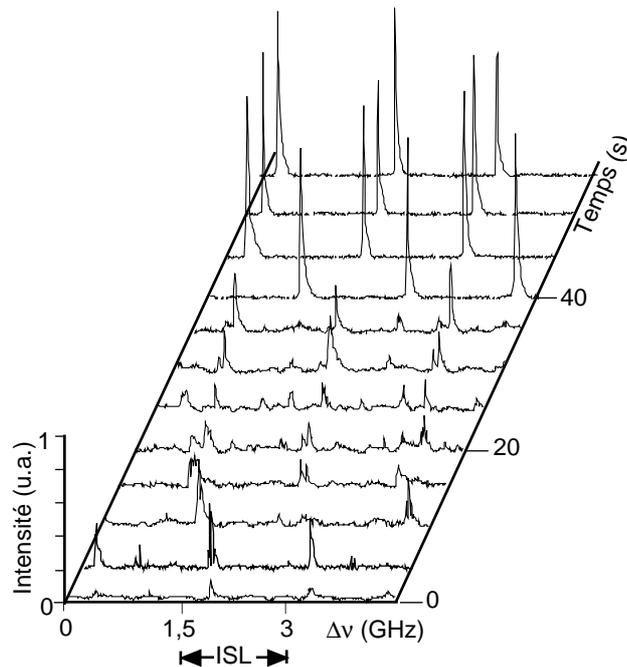


FIG. 3 – Exemple d'évolution du spectre émis par la cavité externe depuis un état fortement multimode (à $t = 0$ s) jusqu'à l'état final monomode. ISL représente l'intervalle spectral libre de l'interféromètre d'analyse.

4 Conclusion

Nous avons illustré le fonctionnement des cavités laser auto-organisables sur deux exemples. Avec des géométries légèrement différentes, nous pouvons induire d'autres comportements, comme des glissements de fréquence ou des oscillations périodiques entre modes [8,10]. Ces filtres sont également efficaces dans des oscillateurs paramétriques optiques ainsi que démontré récemment [11]. Nous nous attachons à comprendre l'évolution temporelle jusqu'à l'état stationnaire qui est maintenant relativement bien compris [8]. Une autre voie de recherche que nous commençons à explorer est l'auto-organisation des modes spatiaux.

Références

- [1] S. Camacho-Lopez, M.J. Damzen, *Self-starting Nd:YAG holographic laser oscillator with a thermal grating*, *Opt. Lett.*, **24**, 753–755 (1999).
- [2] P. Sillard, A. Brignon, J.P. Huignard, *Loop resonators with self-pumped phase-conjugate mirrors in solid-state saturable absorber*, *J. Opt. Soc. Am.*, **B 14**, 2049–2058 (1997).
- [3] M. Horowitz, R. Daisy, B. Fisher, *Filtering behaviour of a self-induced three-mirror formed by intracavity wave mixing in a saturable absorber*, *Opt. Lett.*, **21**, 299–301 (1996).
- [4] G. Pauliat, G. Roosen, *L'optique non linéaire et ses matériaux*, ch. 11 “L'effet Photoréfractif”, pp. 235–332 (J. M. Jonathan et R. Lévy, eds., EDP Sciences, Les Ulis,

- 2001).
- [5] L. Meilhac, N. Dubreuil, G. Pauliat, G. Roosen, *Modeling of laser mode self-adapted filtering by photorefractive Fabry Perot interferometers*, *Opt. Mat.*, **18**, 37–40 (2001).
 - [6] W. B. Whitten, J. M. Ramsey, *Mode selection in a continuous-wave dye laser with an intracavity photorefractive element*, *Opt. Lett.*, **12**, 117–119 (1987).
 - [7] N. Huot, J.M. Jonathan, G. Pauliat, P. Georges, A. Brun, G. Roosen, *Laser mode manipulation by intracavity dynamic holography: Application to mode selection*, *Appl. Phys. B.*, **69**, 155–157 (1999).
 - [8] L. Meilhac, *Cavités laser auto-organisables : réduction du nombre de modes longitudinaux par un filtre photoréfractif dynamique*, thèse de l'Université de Paris XI (octobre 2001).
 - [9] S. Maerten, N. Dubreuil, G. Pauliat, J-M. Jonathan, G. Roosen, D. Rytz, *Trends in Optics and Photonics Series, Volume 62, OSA, Compte rendu de la conférence "Photorefractive Effects, Materials and Devices"*, 47 (2001).
 - [10] A. Godard, G. Pauliat, G. Roosen, Ph. Graindorge, Ph. Martin, *Relaxation of the alignment tolerances of a 1.55 μm extended-cavity semiconductor laser by use of an intracavity photorefractive filter*, *Opt. Lett.*, **26**, 1955–1957 (2001).
 - [11] S. Victori, T. Lépine, P. Georges, A. Brun, *Spectral narrowing of a pulsed optical parametric oscillator using an intracavity photorefractive crystal*, *Advanced Solid State Laser, Topical Meeting, Québec (Février 2002)*.

Influence d'une numérisation de signal sur la synchronisation dans une transmission de données sécurisées par un chaos analogique

X. Bavard, L. Larger et J.-P. Goedgebuer

GTL CNRS TELECOM, UMR 6603

2-3, Rue Marconi, 57070 Metz

Université de Franche-Comté, Lab. d'Optique P.M. Duffieux

16, route de Gray, 25030 Besançon

xbavard@georgiatech-metz.fr

Résumé

L'objet de ce travail de recherche concerne l'étude de l'influence d'une quantification des données cryptées (par conversion analogique / numérique) sur la synchronisation du récepteur (décodage) avec l'émetteur (générateur de chaos). Cette solution est un moyen de limiter la quantité de bruit ajoutée par le canal de transmission, et donc de conserver pratiquement (dans une liaison réelle) la qualité de décodage déjà obtenue en laboratoire. La nature numérique du signal transmis est aussi un avantage dans un contexte de compatibilité avec les systèmes actuels de transmission de données binaires.

1 Introduction

L'utilisation de systèmes non-linéaires en régime chaotique présente un important potentiel pour la réalisation de communications sécurisées. En effet, le chaos généré à l'émetteur est semblable à un signal pseudo-aléatoire (aspect bruité, spectre de fréquence de type bruit blanc). Il est donc adapté au brouillage d'une information, et par conséquent à sa protection. Au récepteur, le décodage de l'information est rendu possible grâce à une synchronisation avec l'émetteur (i.e. reproduction des oscillations chaotiques de celui-ci). Les premières études ont été réalisées avec des circuits électroniques [1, 2], puis avec des circuits opto-électroniques [3]. Dans le cas du système opto-électronique étudié ici, le chaos est généré par un système à contre-réaction non-linéaire retardée, avec la variable dynamique optique "longueur d'onde" d'un laser semiconducteur accordable [4].

Jusqu'à présent, ces transmissions cryptées étaient réalisées avec des signaux analogiques, et la qualité du décodage, quoique très bonne en laboratoire, est susceptible d'être affectée de manière plus ou moins importante à cause du bruit introduit par le canal de transmission. Les améliorations du système peuvent alors être obtenues de différentes manières :

- amélioration de la sécurité des communications (modulation des paramètres du chaos [5], cryptage d'une information numérique [6], injection de l'information à différents endroits dans l'émetteur [7], etc.),
- amélioration de la synchronisation du chaos entre l'émetteur et le récepteur (modulation des paramètres du système [8], etc.).

Dans notre cas, nous avons choisi d'améliorer la synchronisation entre l'émetteur et le récepteur en utilisant une transmission numérique du signal masqué chaotiquement. Mais

du fait de la quantification, le problème du maintien de la synchronisation est posé, entre autres à cause de la propriété de sensibilité aux conditions initiales.

2 Principe

2.1 Définition

On appelle signal analogique, un signal dont l'amplitude varie de façon continue au cours du temps. Il évolue dans sa gamme de tension et dans un temps continu.

On appelle signal numérique, un signal qui se présente au moyen de valeurs discrètes. Il est typique de ce qui se propage dans les systèmes informatiques.

2.2 Générateur de chaos

Un schéma du système est représenté figure 1. L'oscillateur chaotique est constitué d'une diode laser (DBR) accordable autour de $1,55 \mu\text{m}$, d'un élément non linéaire constitué par un cristal biréfringent placé entre deux polariseurs croisés P1 et P2, d'un photodétecteur, d'une ligne à retard T, d'un gain β , et d'un filtre passe-bas RC de premier ordre (20 kHz) qui détermine le temps de réponse de la boucle (τ).

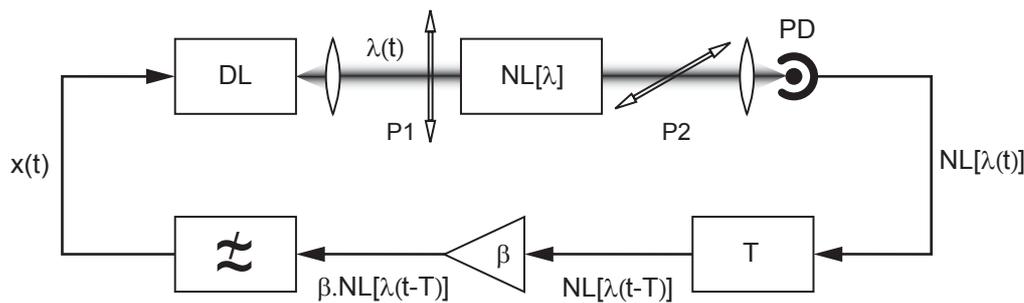


FIG. 1 – Générateur de chaos : système à contre-réaction non-linéaire retardée

Les caractéristiques du signal chaotique obtenu par ce type de schéma électro-optique permet donc de générer un signal pseudo-aléatoire, à spectre large (de type bruit blanc), déterministe et sensible aux conditions initiales. Les oscillations chaotiques de la longueur d'onde émise par la diode laser, sont alors utilisées pour le masquage d'information (cryptographie).

Un tel schéma est général et peut être utilisé dans plusieurs domaines (optique, électronique, mécanique, biologique, etc.) pour décrire n'importe quel système chaotique à contre-réaction non-linéaire retardée. La dynamique du montage peut être modélisée par l'équation différentielle d'Ikeda [9] :

$$x(t) + \tau \frac{dx}{dt}(t) = \beta \cdot NL[x(t - T)], \quad (1)$$

où $x(t)$ représente le signal chaotique dans le système et $NL[.]$ la fonction non-linéaire.

Le chaos généré à l'émetteur est donc un signal analogique. Jusqu'à présent, ce signal était transmis de l'émetteur (codage) au récepteur (décodage) de façon analogique.

Par conséquent, la synchronisation entre l'émetteur et le récepteur (et donc la qualité de décryptage), pouvait être plus ou moins affectée par le bruit introduit par le canal de transmission. La numérisation de ce signal permet alors de contrôler l'influence du bruit ajouté lors de la transmission.

2.3 Emetteur-Récepteur-Conversion AN/NA

La méthode de codage utilisée à l'émetteur, consiste à superposer avec un faible rapport signal-sur-bruit le signal électrique de l'information sur le signal chaotique de la boucle de contre-réaction. Le message participe donc activement à la dynamique du chaos dictée par l'équation (104). Au récepteur, l'opération inverse est effectuée : le message crypté de l'émetteur est soustrait au chaos reproduit et synchronisé par le récepteur.

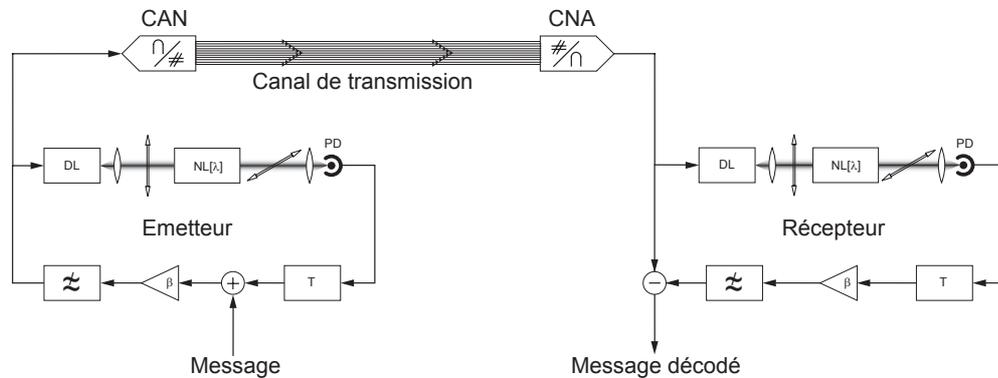


FIG. 2 – Schéma d'une transmission numérique entre émetteur et récepteur

La figure 2 représente le principe de fonctionnement du système cryptographique utilisé. Nous pouvons constater sur ce schéma que le récepteur est une réplique de l'émetteur au détail près que la boucle de contre-réaction est ouverte. Ce type de schéma serait courant s'il n'y avait pas de transmission numérique.

En effet, à la sortie de l'émetteur et à l'entrée du récepteur sont disposés deux convertisseurs : un convertisseur analogique-numérique (CAN), et un convertisseur numérique-analogique (CNA). Et entre les deux se trouve le canal de transmission.

Le processus de numérisation comprend trois concepts de base :

- l'échantillonnage (exprimé en Hertz),
- la quantification (exprimée en nombre de bits),
- et le codage.

L'échantillonnage correspond à la discrétisation du temps appliquée à un signal analogique (plus rapide sera le taux d'échantillonnage, plus fidèle sera la reproduction du signal). Une fois l'échantillonnage du signal obtenu, l'étape suivante consiste à quantifier cette valeur en l'arrondissant à l'unité la plus proche sur une échelle de mesure étudiée spécialement (appelée aussi paliers). La quantification consiste donc à associer une même mesure à toutes les tensions d'une même plage de quantification. Et enfin, la conversion se termine par le codage : il permet d'associer à chaque valeur de sortie un mot binaire.

La détection de ces impulsions au récepteur est essentiellement similaire au processus d'échantillonnage et de quantification. Le convertisseur N/A échantillonne à la vitesse appropriée et classe les valeurs selon des niveaux de code préétablis.

Dans cet article, nous nous proposons donc d'étudier l'influence de l'échantillonnage et de la quantification sur la synchronisation entre l'émetteur et le récepteur, et de déterminer les valeurs minimales de ceux-ci pour que la qualité de décodage ne soit pas dégradée.

3 Résultats

3.1 Résultats numériques

Le système de codage utilisé expérimentalement, a été simulé en utilisant la méthode d'Euler [10] (intégration numérique de l'équation différentielle (104)), puis en numérisant-dénumérisant le signal chaotique avant de le décrypter. Nous avons donc choisi une méthode simple et rapide (la méthode d'Euler) qui permet d'obtenir une solution dont le comportement chaotique est semblable au comportement observé expérimentalement. De même, la numérisation est effectuée en code binaire et avec une interpolation linéaire, décrivant ainsi le plus possible les résultats expérimentaux.

Dans les calculs numériques, nous avons fait varier deux paramètres : la fréquence d'échantillonnage et la résolution (nombre de bits) des convertisseurs. La figure 3(a) montre alors la forte dépendance de la variable fréquence d'échantillonnage sur la synchronisation entre l'émetteur et le récepteur. En effet, pour un échantillonnage de 100 kHz, le message décodé est très bruité. Le tableau de la figure 3(b) confirme ce bruit important puisque le rapport Signal/Bruit n'atteint pas les 6 dB.

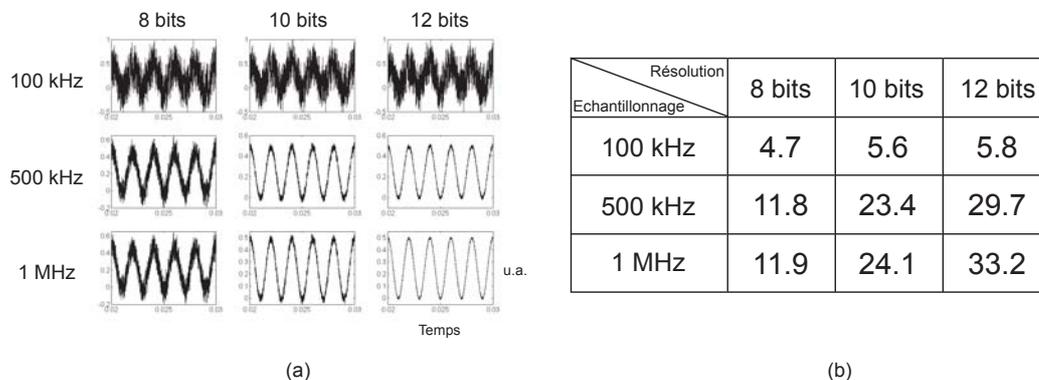


FIG. 3 – Simulation de transmission numérique montrant l'évolution du décodage en fonction de la quantification et de l'échantillonnage des convertisseurs. (a) Représentations du message décrypté. (b) Valeurs du rapport Signal/Bruit en dB.

Le paramètre quantification joue aussi un rôle important dans la numérisation. Nous pouvons constater qu'il existe un seuil en dessous duquel le décodage (et par conséquent la synchronisation) sont médiocres. Avec un convertisseur 8 bits, on atteint à peine les 12 dB, ce qui est insuffisant pour une transmission en télécommunication. En effet, pour qu'une transmission soit valable dans les télécoms, il faut que le rapport signal sur bruit soit d'au moins 30 dB pour une transmission de données analogiques et au moins 20 dB

pour une transmission numérique.

La configuration minimum des convertisseurs dans notre cas (i.e. en transmission numérique) est donc 10 bit en résolution et 500 kHz pour la fréquence d'échantillonnage (cf tableau figure 3(b)).

3.2 Résultats expérimentaux

Les résultats expérimentaux montrés figure 4 ont été obtenus avec un couple de convertisseurs CAN et CNA ayant une résolution de 12 bits et une fréquence d'échantillonnage de 500 kHz.

La figure 4(a) correspond à la corrélation entre le signal chaotique prélevé à l'émetteur et celui prélevé au récepteur en mode Lissajous (appelé aussi mode XY). L'émetteur et le récepteur arrivent donc bien à se synchroniser entre eux, bien qu'il y ait une conversion analogique-numérique, puis une transmission et enfin une conversion numérique-analogique entre les deux. L'erreur entre les deux signaux chaotiques est donc due au bruit apporté par les conversions (bruit de quantification et bruit d'échantillonnage), mais aussi par la différence entre les paramètres des systèmes maître et esclave.

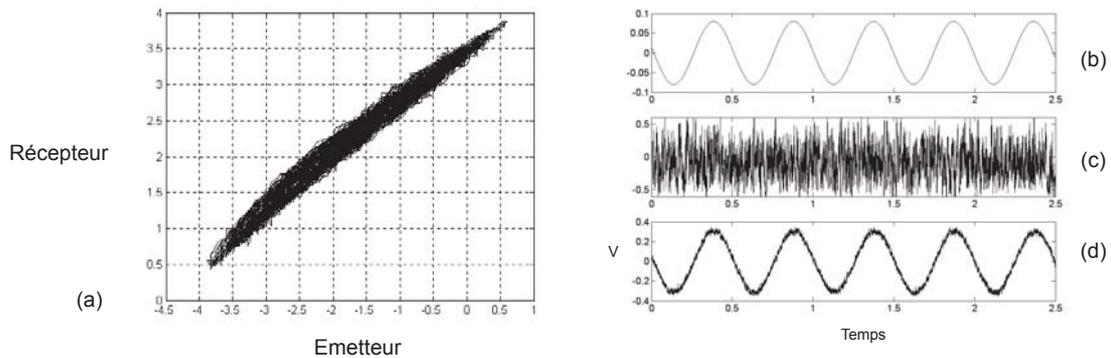


FIG. 4 – Résultats expérimentaux avec une transmission numérique utilisant un couple de convertisseurs de 12 bits et 500 kHz de fréquence d'échantillonnage. (a) Synchronisation du récepteur avec l'émetteur. (b) Signal d'entrée à l'émetteur. (c) Signal crypté lors de la transmission. (d) Signal décodé au récepteur.

Malgré cet apport de bruit, la synchronisation est possible et le décodage de l'information reste de très bonne qualité. En effet, la figure 4(d) montre le signal décodé à la sortie du récepteur à partir du signal chaotique représenté par la figure 4(c). Il y a bien correspondance entre le signal d'entrée figure 4 (signal injecté dans le générateur de chaos) et le signal décodé. Nous obtenons un rapport signal sur bruit de 25,1 dB avec la transmission numérique, à la sortie du récepteur.

En simulation nous avons obtenu un facteur signal sur bruit de 29,7 dB (tableau figure 3(b)) avec une résolution de 12 bits et une fréquence d'échantillonnage de 500 kHz. L'écart entre les résultats de simulation et les résultats expérimentaux (4,6 dB) provient du bruit propre aux composants, du bruit dû à la différence des composants entre ceux de l'émetteur et ceux du récepteur, du bruit provenant de la synchronisation et du bruit de la conversion analogique-numérique / numérique-analogique. Cet ajout de bruit n'a pas été pris en compte lors de la simulation.

4 Conclusion

Dans cet article, nous avons proposé une méthode pour améliorer la synchronisation (et donc la qualité de décodage) entre l'émetteur et le récepteur. Nous avons constaté que la synchronisation entre les systèmes maître et esclave avec une transmission numérique est de bonne qualité en utilisant un couple de convertisseurs ayant une résolution de 12 bits et une fréquence d'échantillonnage de 500 kHz minimum.

La bande passante du signal chaotique et la numérisation de ce signal lors de la transmission permettent alors au système étudié d'être compatible avec les standards utilisés par les systèmes actuels de communications.

L'étape suivante consistera à baisser encore la fréquence d'échantillonnage en changeant le filtre dans la boucle de génération de chaos (et aussi au récepteur) : remplacer par exemple, le filtre du premier ordre par un filtre anti-repliement d'ordre plus élevé.

Références

- [1] L.M. Pecora, T.L. Carroll, *Synchronization in chaotic systems*, Phys. Rev. Lett., **64**, 821 (1990),
- [2] K.M. Cuomo, A.V. Oppenheim, *Circuit implementation of synchronized chaos with applications to communications*, Phys. Rev. Lett., **71**, 65 (1993),
- [3] J.P. Goedgebuer, L. Larger, H. Porte, *Optical cryptosystem based on synchronized of hyperchaos generated by a delayed feedback tunable laser diode*, Phys. Rev. Lett, **80**, 22498 (1998),
- [4] L. Larger, J.P. Goedgebuer, F. Delorme, *Optical encryption system using hyperchaos generated by an optoelectronic wavelength oscillator*, Phys. Rev. E, **57**, 6618 (1998),
- [5] T. Yang, L.O. Chua, *Secure communication via parameter modulation*, IEEE Trans. Circuits Syst. I, **43**, 887 (1996),
- [6] J.B. Cuenot, L. Larger, J.P. Goedgebuer, W.T. Rhodes *Chaos shift keying with an optoelectronic encryption system using chaos in wavelength*, IEEE J. Quantum Electron., **37**, 849 (2001),
- [7] V.S. Oudaltsov, J.P. Goedgebuer, L. Larger, W.T. Rhodes, *Communicating with optical hyperchaos : information encryption and decryption in delayed nonlinear feedback systems*, Phys. Rev. Lett., **86**, 1892 (2001),
- [8] P. Celka, *Synchronization of chaotic systems through parameter adaptation*, IEEE, **1**, 692 (1995),
- [9] K. Ikeda, K. Matsumoto, *High-dimensional chaos behavior in systems with time-delayed feedback*, Physica D, **29**, 223 (1987),
- [10] J.D. Faires, R. Burden, *Numerical Methods*, ch. 5, Brooks/Cool, 2nd ed. (1998).

Impulsions subpicosecondes verrouillées en phase dans un laser à fibre dopée à blocage de modes passif

F. Belhache, F. Gутty, Ph. Grelu et J. M. Soto-Crespo

Laboratoire de Physique de l'Université de Bourgogne (UMR 5027)

9 Avenue A. Savary, B.P. 47870, 21078 Dijon Cedex

Franck.Belhache@u-bourgogne.fr

Résumé

Nous rapportons l'observation d'une paire d'impulsions stables présentant une différence de phase de $\pm\pi/2$, dans un laser en anneau à fibres optiques fonctionnant par blocage de modes passif. La stabilisation des impulsions sub-picoseconde en interaction est obtenue pour une gamme de séparations inter-impulsions assez importante, typiquement de 2.5 à 10 picosecondes, sans l'intervention d'un asservissement extérieur.

1 Introduction

Le domaine des applications télécom demande la mise au point de sources d'impulsions optiques compactes avec des taux de répétitions de plus en plus élevés. Dans le cadre du développement de telles sources, les lasers à fibre dopée Erbium ont été l'objet d'intense recherches au cours de la dernière décennie [1]. Le confinement du champ dans les fibres optiques dopées procure à la fois un gain optique et une non-linéarité Kerr, éléments essentiels pour le blocage de modes passif. La dispersion anormale mène à la formation de solitons et favorise un fonctionnement multi-impulsionnel avec l'augmentation de la puissance de pompe, comme cela a été observé lors d'expériences récentes dans des cavités laser à blocage de modes passif [2]. On constate que de légères modifications des conditions de blocage de modes peuvent regrouper les impulsions en un paquet plus ou moins dense, au lieu de les laisser régulièrement espacées le long de la cavité [3]. Récemment, ce phénomène de regroupement d'impulsions a été l'objet d'un regain d'attention de part la grande stabilité de fonctionnement obtenue sous certaines conditions [4], ouvrant la voie à de nouvelles études des interactions entre impulsions dans les cavités lasers à fibres.

Dans les lignes de communication optiques, la question de l'interaction entre deux impulsions voisines est cruciale pour la transmission de l'information. Idéalement il faudrait que les impulsions n'interagissent pas du tout. Les systèmes réels peuvent être modélisés par l'équation de Schrödinger non-linéaire (NLSE) [5]. Mais NLSE décrit des systèmes conservatifs dans lesquels les effets en balance sont uniquement la dispersion et la non-linéarité; les degrés de liberté du problème font que les solitons brillants, solutions pour un ensemble de paramètres, appartiennent à une famille de solutions avec des amplitudes variables. Il s'ensuit que, lors de l'interaction de deux solitons, leurs amplitudes peuvent varier. Les deux impulsions peuvent échanger de l'énergie, ce qui les rend instables.

2 Paires d'impulsions stables pour l'équation de Ginzburg-Landau

La situation change radicalement pour les systèmes non-conservatifs, tels que les lasers ou les lignes de transmission optiques. Ils peuvent être modélisés, en première approche, par l'équation de Ginzburg-Landau quintique complexe (CGLE quintique) qui s'écrit :

$$i\psi_\xi + \frac{D}{2}\psi_{\tau\tau} + |\psi|^2\psi = i\delta\psi + i\epsilon|\psi|^2\psi + i\beta\psi_{\tau\tau} + i\mu|\psi|^4\psi - \nu|\psi|^4\psi$$

où τ est le retard temporel, ξ est la distance de propagation, ψ est l'enveloppe complexe du champ électrique, δ représente le gain ou les pertes linéaires, β décrit le filtrage spectral ($\beta > 0$), $D = \pm 1$ est le coefficient de dispersion chromatique, ϵ rend compte des processus de gain ou d'absorption non-linéaires, μ représente une correction d'ordre supérieur de l'amplification ou l'absorption non-linéaire, et ν est un terme possible de correction d'ordre supérieur de l'indice de réfraction qui dépend de l'intensité.

Les états liés de deux solitons brillants, dans ces systèmes non-conservatifs, ont été analysés par B. A. Malomed. Il a montré que des solutions stationnaires, sous la forme d'états liés à deux solitons en phase ou en opposition de phase, pouvaient exister [6]. Pourtant un problème a été mis à jour avec ces solutions.

Les solitons brillants sont un type de solution de CGLE quintique, et constituent un ensemble discret. Il peut y avoir une multiplicité de solutions, pour chaque ensemble de paramètres de l'équation, mais chaque solution a une amplitude et un profil de phase fixés. La raison physique en est la suivante. Avec NLSE, les solitons résultent uniquement d'un équilibre entre non-linéarité et dispersion. Mais les solitons de CGLE proviennent d'un double équilibre : le précédent, et celui entre le gain et les pertes. Chacun de ces équilibres pris indépendamment définit une famille de solutions, mais imposer les deux simultanément donne des solutions fixées.

En tenant compte de ceci, il a été montré que seulement deux paramètres peuvent changer durant l'interaction entre deux solitons : leur séparation et la différence de phase entre eux. Il s'ensuit que l'espace de phase du problème est bidimensionnel et qu'on peut analyser les états liés de deux solitons ainsi que leur stabilité et leur dynamique dans un «plan d'interaction». Celui-ci est un outil très puissant pour l'étude des solutions stationnaires de CGLE quintique et de leur stabilité [7]. Les résultats de cette étude montrent que, pour un vaste ensemble de paramètres, des solutions stationnaires apparaissent sous la forme d'états liés de deux solitons. Il s'agit de deux solitons dont la séparation et la relation de phase permettent de satisfaire aux conditions d'équilibre du système.

B. A. Malomed avait déjà trouvé de telles solutions pour lesquelles les deux solitons étaient soit en phase, soit en opposition de phase [6]. Ces solutions sont retrouvées dans la référence [7] mais il est prouvé qu'elles sont instables. Par contre, on y découvre d'autres solutions qui sont stables. Il s'agit de paires de solitons qui sont déphasés de $\pm\pi/2$.

Finalement, il ressort de ces travaux l'existence d'un vaste ensemble d'états stables de deux solitons liés. Ce sont des paires d'impulsions en quadrature, dont le temps de séparation est du même ordre de grandeur que leur durée. La conséquence la plus remarquable de leur relation de phase de $\pm\pi/2$ est l'asymétrie du spectre qui les caractérise.

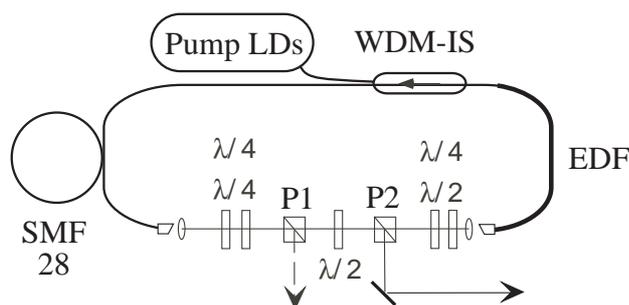


FIG. 1 – Schéma de la cavité laser

3 Résultats expérimentaux

Il a récemment été rapporté l'observation d'une paire d'impulsions proches en interaction, qui forme un état lié solitonique, dans un anneau à fibres en régime anormal [8]. Pour prévenir la dérive temporelle et obtenir un état lié, l'injection d'une forte onde laser continue (CW) était nécessaire. Deux valeurs différentes de l'écart temporel, entre les deux impulsions de 310 fs, ont été observées : l'une de 1.16 ps et l'autre de 2.28 ps.

Nous venons d'obtenir expérimentalement le verrouillage d'une paire d'impulsions avec la relation de phase précise de $\pi/2$ prédite par l'analyse de stabilité de l'équation de Ginzburg-Landau rapportée ci-dessus. Contrairement aux besoins mentionnés dans la référence [8], aucune injection externe n'a été nécessaire dans notre cavité fibrée, et les paires d'impulsions en interaction sont obtenues par un verrouillage de phase spontané, sur une gamme assez large de temps de séparation possibles.

3.1 Configuration expérimentale

Le système laser, une cavité à fibres en anneau comprenant une section à l'air libre, est illustré figure 1. Le gain optique est procuré par une fibre dopée à l'Erbium (EDF, 1400 ppm) de 1.6 m de long ayant une dispersion normale ($D = -40$ ps/nm/km). La fibre EDF est suivie d'un coupleur-isolateur insensible en polarisation (WDM-IS), dans lequel le faisceau de pompe à 980 nm est injecté. Un tronçon de fibre SMF-28 de 4.8 m de long procure la dispersion anormale ($D = +17$ ps/nm/km). La rotation de polarisation non-linéaire, subie par l'onde laser durant sa propagation dans les fibres, rend la transmission à travers le polariseur P1 dépendante en intensité, permettant au blocage de modes passifs d'être réglé par un ajustement adéquat des lames précédant P1. La transmission à travers P1 est ainsi plus grande pour un fonctionnement impulsionnel que pour un fonctionnement continu. Toutefois, en impulsionnel, P1 doit rejeter un pourcentage élevé (30 à 70 %) de la puissance intracavité afin qu'il y ait stabilisation et que les impulsions au niveau du port de sortie P2 présentent un très faible piédestal. La caractérisation temporelle de la sortie laser est réalisée avec un autocorrélateur - dans lequel un cristal de BBO d'1 mm d'épaisseur permet d'obtenir de la génération de seconde harmonique de type I - fabriqué dans notre laboratoire, pouvant opérer en mode interférométrique ou non interférométrique. Pour l'analyse spectrale, nous utilisons un monochromateur à haute résolution commercial (HR640).

3.2 Dynamique du système

Le blocage de modes est obtenu à partir d'une puissance de pompe de 35 mW. Opérant dans un régime de dispersion moyenne légèrement anormal (environ +3 ps/nm/km) nous observons des profils d'impulsions *sécante hyperbolique* à faible piédestal, dont la largeur à mi-hauteur (FWHM) varie entre 400 fs et 650 fs. Des paquets stables d'impulsions sont facilement obtenus quand la puissance de pompe est élevée au-dessus de 80mW, comme décrit dans la référence [4]. Pour un pompage à 250 mW, nous avons ainsi le regroupement de 5 impulsions identiques, de 15 pJ et 450 fs, présentant un espacement régulier de 20 ps. De plus, les autocorrélations et spectres enregistrés montrent que les impulsions sont verrouillées en phase et ne subissent qu'une dérive temporelle extrêmement faible.

La procédure permettant d'arriver à une paire d'impulsions proches en interaction est la suivante. Nous partons d'un paquet de plusieurs impulsions régulièrement espacées, d'environ 20 ps, ce qui est la configuration la plus stable et la plus immédiate à obtenir. La puissance de pompe est ensuite diminuée de façon à ne garder que deux des impulsions, toujours distantes de 20 ps. On peut noter la présence de franges d'interférences dans le spectre, indiquant que les impulsions sont verrouillées en phase. Cependant, l'écart important entre les deux impulsions rend leur relation de phase difficile à déterminer. En réduisant la puissance de pompe en dessous de 50 mW, nous observons que l'intervalle temporel entre les deux impulsions diminue. Faisons remarquer que la configuration impulsionnelle obéit à un cycle d'hystérésis vis à vis de la puissance de pompe.

On peut conserver une configuration donnée pour une puissance de pompe bien inférieure à celle nécessaire à sa formation. Lorsque nous commençons à baisser la puissance, l'amplitude des impulsions diminue continûment alors que leur séparation reste constante. En pompant de moins en moins il se produit une transition abrupte qui rapproche subitement les deux impulsions et les verrouille de nouveau en phase, avec un intervalle de séparation plus faible. Le même processus peut être renouvelé 2 ou 3 fois. Le raccourcissement du temps de séparation n'est donc pas uniforme mais se fait par sauts successifs. Cela est certainement en rapport avec la grande stabilité du régime de fonctionnement pour lequel une paire d'impulsions reste précisément verrouillée en phase. De plus, les états stables du système ne doivent correspondre qu'à certains intervalles de séparations, qui sont donc ceux observés [7].

3.3 Détermination de la relation de phase entre les impulsions

Lorsque l'écart entre les impulsions passe en dessous de 10 ps, la relation de phase peut enfin être déduite avec une bonne précision de la position des franges dans le spectre.

Pour un point de fonctionnement de notre configuration, obtenu en pompant à 31 mW, l'autocorrélation montre des pics latéraux qui sont caractéristiques de la présence de deux impulsions proches. La figure 2(a) montre que les impulsions ont 610 fs de large et sont séparées de 6.8 ps. Les pics latéraux comportent des franges d'interférences (incrustations fig. 2(a)), preuves d'une relation de phase stable entre les deux impulsions [9]. De plus, la mesure de la largeur du spectre fig. 3(a) permet de calculer un produit $\Delta t \times \Delta \omega = 0.32 \pm 0.01$, ce qui est compatible avec des impulsions à profil *sécante hyperbolique* non chirpées. Une information complémentaire est procurée par l'autocorrélation. Si les deux impulsions ont la même amplitude, il est prévu que les franges des pics latéraux s'étendent de 0.5 à 4.5. Nos enregistrements présentent un assez bon accord avec ceci, ce qui tend à confirmer que les deux impulsions ont même durée et même amplitude.

L'étude du spectre fig. 3(a) montre qu'il présente une asymétrie qui n'est pas compa-

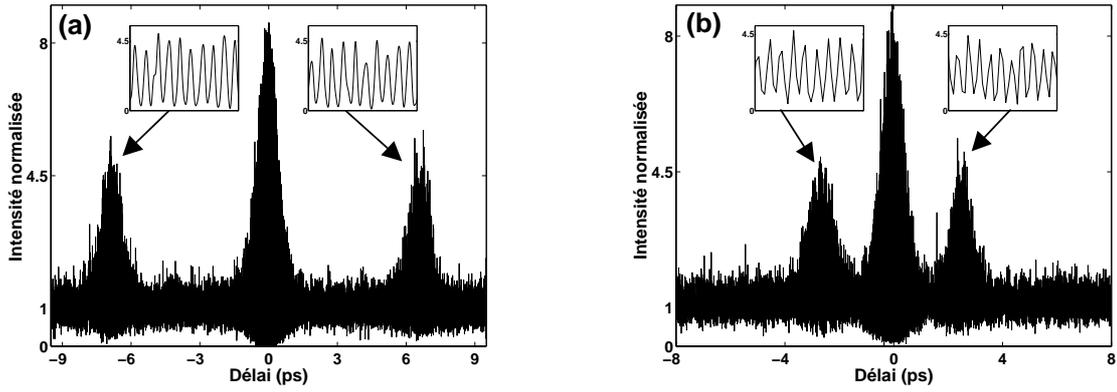


FIG. 2 – Autocorrélation interférométrique de 2 impulsions séparées de 6.8 ps (a) et 2.5 ps (b); zooms sur les pics secondaires en incrustation.

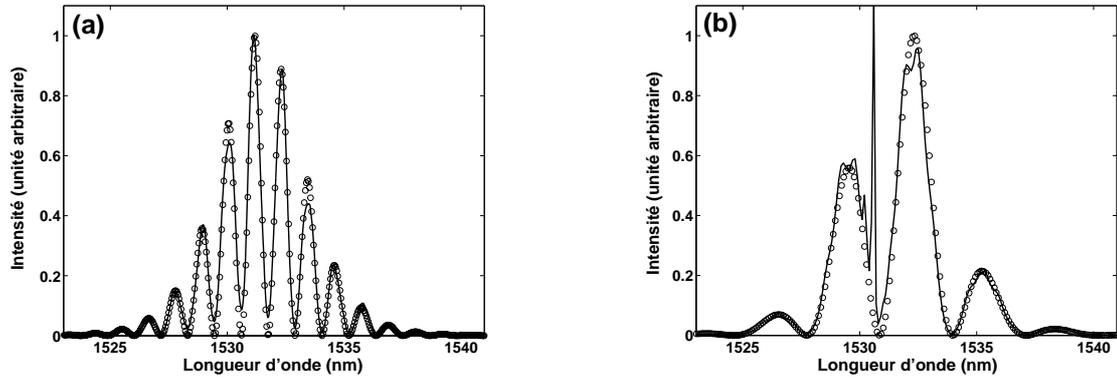


FIG. 3 – Spectre expérimental (trait continu) et ajustement (cercles) pour 2 impulsions séparées de 6.8 ps (a) et 2.5 ps (b).

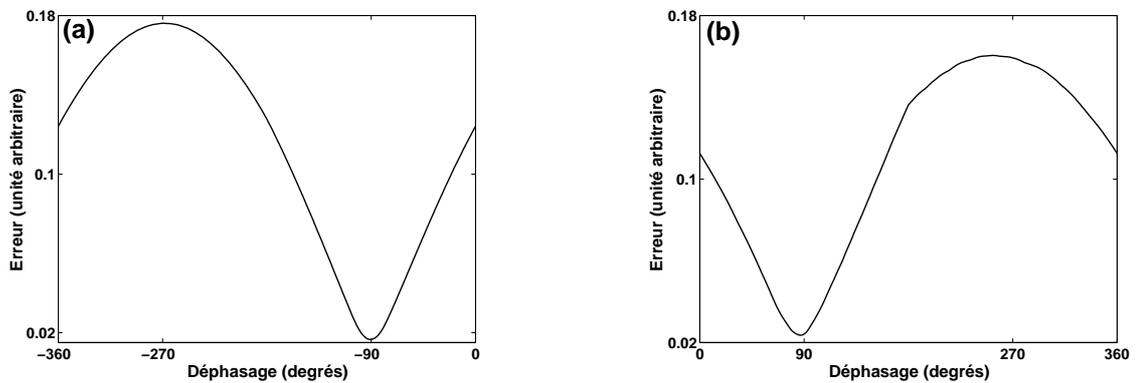


FIG. 4 – Erreur de l'ajustement du spectre, en fonction du déphasage supposé entre impulsions, pour une séparation de 6.8 ps (a) et 2.5 ps (b).

tible avec une relation de phase de 0 ou π . Connaissant les principales caractéristiques des impulsions, à l'exception de leur déphasage $\Delta\phi$, il suffit d'ajuster le spectre expérimental et de relever la valeur de $\Delta\phi$ fournissant le meilleur accord. L'évolution de l'erreur entre spectre expérimental et spectre calculé est donnée figure 4(a). Il apparaît qu'une seule valeur de $\Delta\phi$ permet d'ajuster correctement le spectre, cette valeur étant $-\pi/2$. Le résultat de cet ajustement est donné figure 3(a), en regard avec le spectre expérimental.

Un autre spectre, enregistré à une puissance de pompe de 29 mW, est montré figure 3(b). Nous suivons la même procédure de traitement que précédemment et montrons que le spectre expérimental est ajusté par celui de deux impulsions de 540 fs, séparées de 2.5 ps, et déphasées de $+\pi/2$ (fig. 4(b)). La fonction d'autocorrélation interférométrique correspondante est donnée figure 2(b).

La relation de phase de $\pm\pi/2$, calculée à partir des spectres précédents, était celle prédite par l'analyse de stabilité de l'équation de Ginzburg-Landau quintique [7]. Il est remarquable que cette relation se présente pour des impulsions séparées par plus de dix fois leur largeur, dans un système dynamique très perturbé comme un laser à fibres.

4 Conclusion

Nous avons démontré, expérimentalement, qu'un laser à fibres à blocage de modes passif peut générer des paires d'impulsions verrouillées en phase avec un déphasage de $\pm\pi/2$. Selon la puissance de pompe et les conditions de blocage de mode, la séparation entre impulsions peut varier sur une grande étendue. La différence de phase de $\pm\pi/2$ pourrait être due à des interactions soliton-soliton, comme cela a été théoriquement prédit en se basant sur l'analyse de stabilité des équations de Ginzburg-Landau.

De part la grande diversité des temps de séparation observés, nous pensons que plusieurs phénomènes doivent intervenir. Des effets incohérents, comme le temps de récupération du gain [10] et l'électrostriction [11], pourraient fixer une séparation approximative, en particulier quand les impulsions sont assez éloignées. Le verrouillage en phase précis des impulsions serait quant à lui provoqué par des interactions plus fines, telle que celles de type soliton-soliton évoquées dans cet article.

Références

- [1] *Rare-Earth-Doped Fiber Lasers and Amplifiers*, édité par M. J. F. Digonnet, 2^e édition, M. Dekker, N. Y. (2001).
- [2] D. Y. Tang, W. S. Man et H. Y. Tam, *Opt. Commun.*, **165**, 189 (1999).
- [3] M. J. Guy, D. U. Noske et J. R. Taylor, *Opt. Lett.*, **18**, 1447 (1993).
- [4] F. Gутty, Ph. Greлу, N. Huot, G. Vienne et G. Millot, *Electron. Lett.*, **37**, 745 (2001).
- [5] N. N. Akhmediev et A. Ankiewicz, *Solitons, Nonlinear Pulses and Beams*, Chapman & Hall, London (1997).
- [6] B. A. Malomed, *Phys. Rev. A*, **44**, 6954 (1991).
- [7] N. N. Akhmediev, A. Ankiewicz et J. M. Soto-Crespo, *J. Opt. Soc. Am. B*, **15**, 515 (1998).
- [8] D. Y. Tang et al., *Phys. Rev. A*, **64**, 33814 (2001).
- [9] Ph. Greлу, F. Belhache et F. Gутty, *Opt. Lett.*, à paraître.
- [10] J. N. Kutz et al., *IEEE J. Quantum Electron.*, **34**, 1749 (1998).
- [11] A. N. Pilipetskii, E. A. Golovchenko et C. R. Menyuk, *Opt. Lett.*, **20**, 907 (1995).

Etudes expérimentales de chaos sur le laser à électrons libres de Super-ACO.

C. Bruni¹, D. Garzella^{1,2}, G. L. Orlandi^{1,2}, M. E. Couprie^{1,2}

1) *Laboratoire pour l'Utilisation du Rayonnement Electromagnétique, Bâtiment 209D, Université Paris Sud, BP34, 91 898 Orsay cedex, France*

2) *CEA/DSM/DRECAM/SPAM, Bâtiment 522, 91191 Gif-sur-Yvette, France*
christelle.bruni@lure.u-psud.fr

Résumé

Ce papier présente les résultats expérimentaux obtenus sur le laser à électrons libres installé sur l'anneau de stockage Super-ACO (Orsay), comme des structures macrotemporelles, des diagrammes de bifurcation et des attracteurs. Compte tenu de la réponse amplitude-phase du système couplé laser-faisceau d'électrons non-linéaire, toute perturbation autour de la fréquence de résonance, f_0 , entraîne une instabilité sur le gain et peut produire une oscillation importante de l'intensité du laser, de type périodique stable ou instable, donnant une structure macro-temporelle pulsée à l'échelle de la milliseconde. Pour les études de chaos, nous appliquons une modulation de gain par une modulation de la condition de synchronisation longitudinale des électrons et de l'onde optique à une fréquence voisine de f_0 . Selon les paramètres de la modulation (amplitude et fréquence) le laser reproduit différents régimes: la période de la structure macrotemporelle pulsée du laser est soit un multiple de celle de la modulation (nT), soit chaotique.

1 Les éléments constitutifs d'un laser à électrons libres sur anneau de stockage

Le processus d'amplification d'un laser à électrons libres (LEL) résulte de l'interaction d'un faisceau d'électrons relativistes, issu d'un accélérateur de particules, avec une onde électromagnétique. Le LEL de l'anneau de stockage Super-ACO est schématisé sur la figure 1. L'onde électromagnétique est générée par émission de rayonnement synchrotron au passage du faisceau d'électrons dans le champ magnétique périodique permanent d'un onduleur. Une cavité optique est nécessaire afin de stocker le rayonnement. Lorsque le paquet d'électrons et l'onde lumineuse interagissent, le rayonnement peut être amplifié au détriment de l'énergie cinétique des électrons, ce qui conduit à l'effet laser.

1.1 L'anneau de stockage

Un anneau de stockage [1] est une succession d'éléments magnétiques qui permettent à des particules relativistes chargées de circuler sur une orbite fermée. Les particules sont repérées sur leur trajectoire par trois axes: τ , l'axe longitudinal, x et z , les axes du plan transverse. La courbure de la trajectoire dans le plan (x, τ) est assurée par des dipôles, tandis que les quadripôles maintiennent le faisceau focaliser. Au passage des électrons dans des éléments magnétiques comme les dipôles, les électrons perdent de l'énergie par émission de rayonnement synchrotron. Une cavité radio-fréquence compense à chaque tour cette perte d'énergie à l'aide d'un champ électrique longitudinal oscillant sinusoidalement

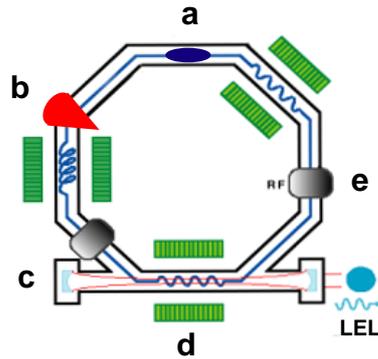


FIG. 1 – Représentation de l’anneau de stockage Super-ACO. a) un paquet d’électrons d’énergie 800 MeV circulant dans l’anneau de 72 m de circonférence, b) un dipôle, c) miroir de la cavité optique, d) un onduleur, e) la cavité radio-fréquence.

avec le temps à une fréquence multiple de la fréquence de révolution des particules dans l’anneau. Les forces magnétiques, ainsi que la cavité radio-fréquence imposent une mise en paquet des électrons dans l’anneau dont les dimensions RMS sont σ_x , σ_z et σ_τ .

1.2 Le klystron optique

Dans le cas de Super-ACO, l’onduleur est en réalité remplacé par un klystron optique constitué de deux onduleurs séparés par une section dispersive créant un champ magnétique élevé de grande période. Ce système permet d’augmenter artificiellement le gain pour une section droite disponible de 3 m. Le gain du LEL de Super-ACO à 350 nm est de 2 %, nécessitant des optiques de faibles pertes [4].

1.3 La cavité optique

Afin de respecter la condition de synchronisation longitudinale entre l’onde lumineuse stockée dans la cavité optique et les paquets circulant dans l’anneau, la longueur de la cavité optique doit être un sous-multiple de la distance séparant deux paquets successifs. Dans le cas de Super-ACO, deux paquets sont stockés dans l’anneau, la longueur de la cavité optique est de 18 m.

2 Structure temporelle du laser

2.1 Structure microtemporelle

Le LEL reproduit la structure temporelle pulsée à haute cadence des paquets d’électrons à partir desquels il est généré. Deux paquets espacés de 120 ns, sont stockés dans l’anneau de stockage Super-ACO. A l’échelle microtemporelle, le laser est pulsé à la fréquence de passage des paquets d’électrons dans la cavité optique du laser, soit 8.33 MHz (Figure 2).

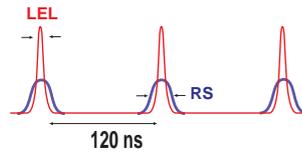


FIG. 2 – Structure microtemporelle du laser : coupe longitudinale de la distribution en intensité du laser ainsi que la distribution des électrons au sein du paquet. La largeur rms de l'impulsion du laser est de l'ordre de 20 ps ; chaque impulsion étant espacée de 120 ns. La dimension rms de la distribution des électrons au sein du paquet (RS) est comprise entre 50 et 250 ps selon le fonctionnement de l'anneau et le courant stocké dans l'anneau.

2.2 Structure macrotemporelle

A l'échelle macrotemporelle (échelle de la milliseconde), la dynamique du laser dépend de la condition de synchronisation entre l'onde lumineuse stockée dans la cavité optique et le paquet d'électrons circulant dans l'anneau. Cette synchronisation dépend de l'accord entre la fréquence de passage des électrons dans la cavité optique et la fréquence d'aller-retour de l'onde optique. Ce désaccord peut s'obtenir expérimentalement en modifiant la fréquence d'aller-retour de l'onde lumineuse, soit la longueur de la cavité optique ; ou en modifiant la fréquence de passage des électrons dans la cavité optique, soit la fréquence (f_{RF}) de la cavité radio-fréquence à 100 MHz ($\Delta f_0/f_0 = \Delta f_{RF}/f_{RF}$). Cette dernière méthode, expérimentalement adaptée à Super-ACO, est employée pour acquérir l'intensité du laser en fonction du désaccord et tracer la courbe d'accord (Figure 3) [5].

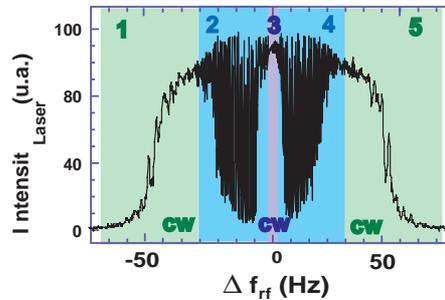


FIG. 3 – Courbe d'accord : intensité du laser, recueillie par un photomultiplicateur, en fonction de la variation de la fréquence de la cavité radio-fréquence à 100 MHz.

La courbe d'accord se décompose en 5 zones. La zone centrale (zone 3) correspond à un laser "continu", soit "cw" à l'échelle de la milliseconde. Le laser possède dans cette zone les meilleures caractéristiques : la plus grande puissance, la plus petite largeur d'impulsion, ainsi que la meilleure stabilité. En présence d'un léger désaccord, le laser devient pulsé (zones 2 et 4) à une fréquence d'environ 300 Hz. Pour des désaccords plus grands (zones 1 et 5), le laser redevient "cw" mais avec un élargissement de la distribution de l'intensité laser et de la raie spectrale, et une moins bonne stabilité.

3 Structure macrotemporelle chaotique

3.1 Modulation du gain du laser

Le gain étant proportionnel à la densité électronique, il varie suivant la position τ du laser par rapport au maximum de la distribution électronique longitudinale des paquets :

$$G(\tau) = G(0) \exp \frac{-\tau^2}{\sigma_\tau^2}$$

$G(\tau)$ étant le gain à une position τ du laser, $G(0)$ le gain maximum à l'accord parfait, σ_τ la largeur rms de la distribution électronique longitudinale des paquets. Varier la position τ du laser revient à varier le gain du laser. Expérimentalement, on applique une modulation de type sinusoïdale à la fréquence de la cavité rf, c'est-à-dire sur la condition de synchronisation :

$$\Delta f_{RF} = \frac{A}{2} \cos(2\pi ft)$$

avec Δf_{RF} la variation de la fréquence de la cavité rf par rapport à la fréquence correspondant à l'accord parfait, A l'amplitude de la modulation, f la fréquence de la modulation, et t le temps. La fréquence de la modulation est de l'ordre de la centaine de Hz, proche de la fréquence naturelle de pulsation macrotemporelle du laser f_0 (environ 300 Hz). L'amplitude A de la modulation doit être inférieure à la largeur de la courbe d'accord afin de ne pas éteindre le laser. En réponse à cette modulation de gain, la structure macrotemporelle du laser est pulsée à une période multiple de la période de la modulation, ou chaotique [8]. La figure 4 illustre l'évolution de l'intensité du laser en fonction du temps $I(t)$. Pour une modulation de fréquence $f = 400 \text{ Hz}$, de période T et d'amplitude 7 Hz, $I(t) = I(t+T)$, conduisant à un régime 1T. Pour une fréquence de 660 Hz et une amplitude de 46 Hz, clairement $I(t)$ diffère de $I(t+nT)$, et l'écart entre deux maxima laser successifs n'est pas constant; le laser adopte donc un régime chaotique.

3.2 Diagrammes de bifurcation

L'intensité $I(t+T)$ est tracée en fonction de l'un des paramètres de la modulation, mettant en évidence les changements de régime du laser. La figure 5 illustre différents cas de bifurcation du laser. La figure de droite montre une transition 1T-2T pour une fréquence de 250 Hz. Les autres figures présentent des séquences où des régimes chaotiques apparaissent. Dans la figure centrale la séquence est 1T-2T-chaos+2T-3T, et dans la figure de droite 1T-chaos-2T-2T+4T.

Les régimes chaotiques n'apparaissent pas sur toutes les séquences. Des mesures systématiques devraient permettre de déterminer les conditions d'apparition du chaos.

3.3 Attracteurs

Une autre façon de visualiser les différents régimes du laser, est l'attracteur. Le laser étant un oscillateur forcé, l'espace des phases de l'attracteur est $I(t+T)$, $I(t)\cos(2\pi ft)$, $I(t)\sin(2\pi ft)$. La figure 6 montre des attracteurs pour les régimes 2T, 3T, et chaotiques.

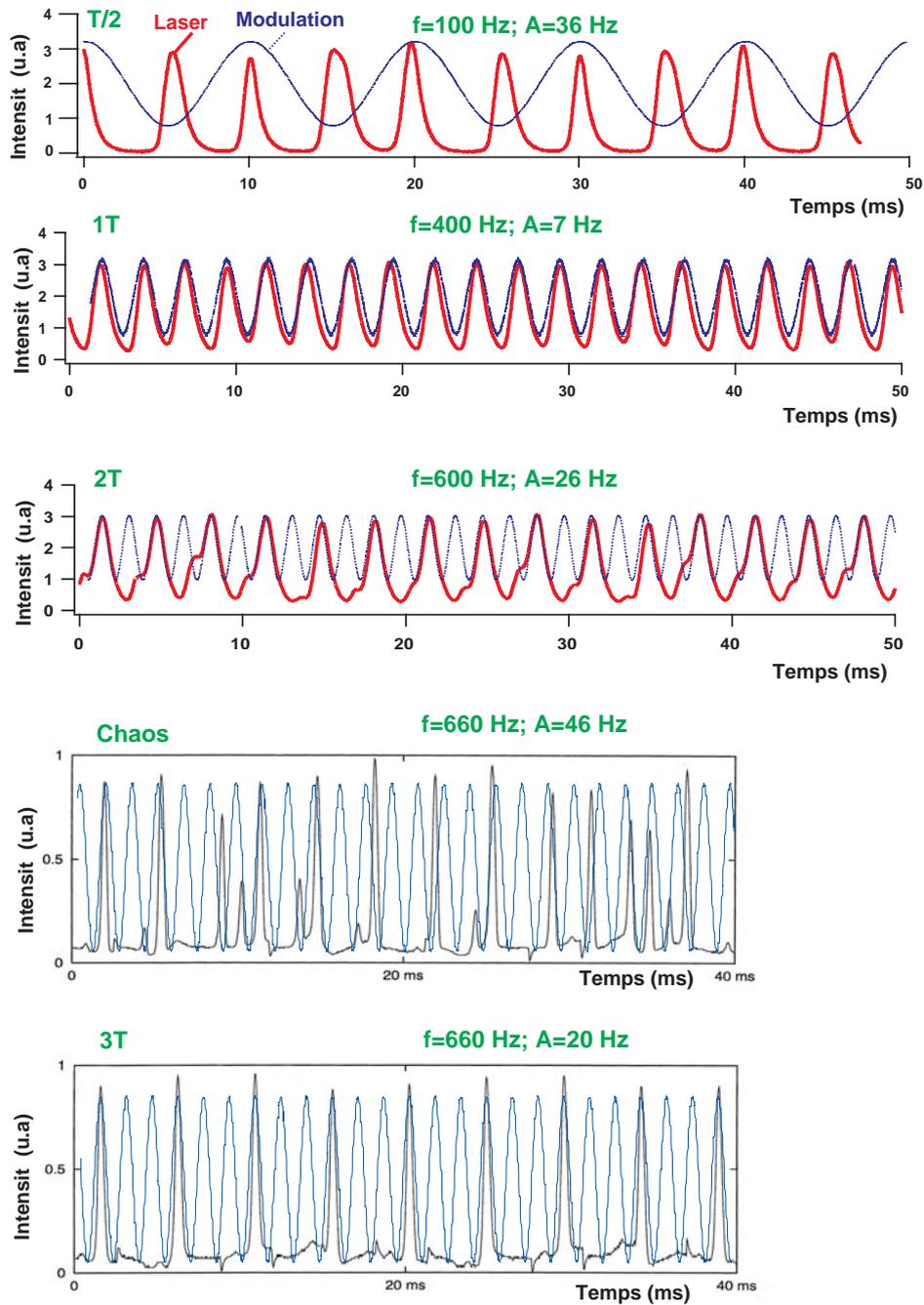


FIG. 4 – Intensité macrotemporelle du laser en fonction du temps (échelle de la milliseconde). La période du laser est un multiple de la période de la modulation (nT), ou chaotique selon l'amplitude A et la fréquence f de la modulation.

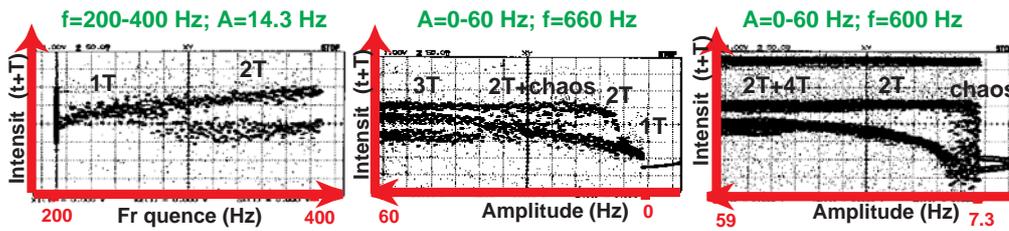


FIG. 5 – Diagramme de bifurcation $I(t+T)$ en fonction du paramètre variant de la modulation.

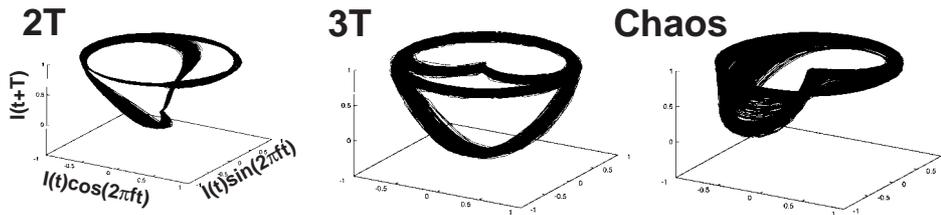


FIG. 6 – Attracteurs pour différents régimes du laser.

4 Conclusion

Cette étude expérimentale du laser à électrons libres en oscillateur forcé a mis en évidence des séquences du type Feigenbaum. Certains de ces régimes sont reproduits théoriquement [7]. Il réside cependant un important travail expérimental afin de connaître les conditions d'apparition du chaos.

Références

- [1] M. Sands, *The Physics of electron storage ring: an introduction*, SLAC report 121 UC-28 (1970).
- [2] JMJ.Madey, *Stimulated Emission of Brehmmstrahlung in a periodic magnetic field*, Jour. Appl. Phys., **42** (5), 1906-1913 (1971).
- [3] P. Elleaume, *Optical klystron*, J. Phys. (Paris) **44**, C1-353 (1983).
- [4] E. Renault, D. Nutarelli, D. Garzella, ME. Couprie, M. Billardon, *UV dielectric multilayer mirrors for free electron lasers*, Proceedings of the SPIE, The International Society for Optical Engineering, **3738**, 354-65 (1999).
- [5] ME. Couprie et al, *Possible microstructure in the Super-ACO FEL pulse*, EPAC 2000.
- [6] M. Billardon, *Storage ring Free Electron laser and chaos*, Phys. Rev. Lett. **65**, 713 (1990)
- [7] ME. Couprie, G. De Ninno, D. Fanelli, D. Garzella *Etude théorique de chaos sur la laser à électrons libres de Super-ACO*, publications des journées du non linéaire.
- [8] M. Billardon, *Storage ring Free Electron laser and chaos*, Phys. Rev. Lett. **65**, 713 (1990)

Observation de la brisure de symétrie de l'état lié de solitons dans un milieu de Kerr isotrope

C. Cambournac[†], T. Sylvestre[†], H. Maillotte[†],

P. Kockaert[‡], B. Vanderlinden[‡], Ph. Emplit[‡] et M. Haelterman[‡]

[†] *Laboratoire d'Optique P.M. Duffieux, Université de Franche-Comté,*

Unité mixte de recherche du CNRS n° 6603, 16 route de Gray, 25030 Besançon

[‡] *Service d'Optique et d'Acoustique, Université Libre de Bruxelles*

CP 194/5, 50 av. F. D. Roosevelt, B-1050 Bruxelles, Belgique

`thibaut.sylvestre@univ-fcomte.fr`

Résumé

Les propriétés de propagation des faisceaux solitons multimodes dans les milieux non linéaires font actuellement l'objet de nombreuses investigations en raison des applications potentielles aux systèmes de télécommunications optiques. L'exemple le plus simple parmi la famille des solitons multimodes est le soliton bimodal pour lequel la propagation en milieu non linéaire est généralement instable car les forces d'interaction qui agissent sur chacun des deux modes les amènent, soit à se séparer, soit à s'attirer. Toutefois, il existe une mise en forme spécifique en amplitude et en polarisation du soliton bimodal qui permet d'annuler les forces d'interaction, assurant une grande stabilité de propagation et formant ainsi ce que l'on appelle l'état lié de solitons. Nous étudions dans ce travail la stabilité d'un tel soliton vectoriel à deux modes dans un guide plan de Kerr isotrope et nous vérifions expérimentalement que, lorsque le coefficient d'intermodulation de phase est supérieur à celui de l'automodulation de phase, le soliton bimodal est sujet à une instabilité de type brisure de symétrie, phénomène suggérant une application directe à la commutation optique spatiale ultra-rapide (cf. figure 1).

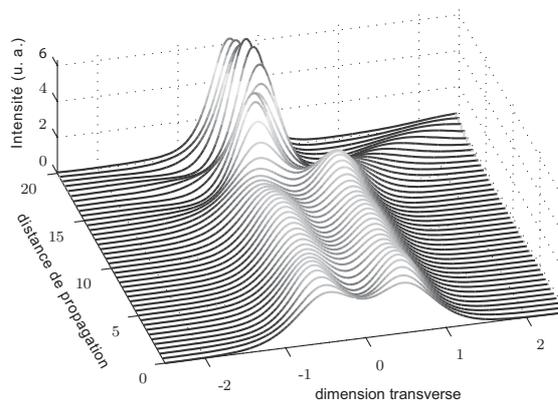


FIG. 1 – Propagation d'un état lié de solitons à deux modes dans un milieu de Kerr isotrope. L'intermodulation de phase provoque une brisure de symétrie en transférant l'énergie d'un mode vers l'autre.

1 Introduction

Un des grands objectifs de l'optique non linéaire moderne porte sur la réalisation de dispositifs purement optiques dans lesquels la lumière est utilisée pour guider et manipuler la lumière sans avoir recours à la fabrication de guide d'ondes [1]. La seule et unique possibilité de créer de tels guides d'ondes reconfigurables repose sur l'utilisation du concept fondamental de lumière auto-guidée, un principe essentiellement basé sur la propagation de solitons spatiaux en milieu non linéaire. La stabilité en propagation de ces solitons résulte de l'équilibre entre la diffraction et l'auto-focalisation causée par la non-linéarité. Ils se propagent sans déformation et peuvent être ainsi considérés comme des canaux porteurs d'information. En effet, en modifiant l'indice de réfraction du milieu qu'ils traversent, les solitons sont capables d'attirer et guider d'autres faisceaux lumineux en les piégeant par effet d'intermodulation de phase. Ce phénomène de guidage, intéressant à la fois pour l'étude de la physique non linéaire mais aussi par ses diverses applications potentielles, explique l'intérêt considérable porté actuellement à l'égard des solitons spatiaux. Il existe en effet une grande variété de solitons et ils se manifestent dans différents domaines de la physique tels que l'hydrodynamique, la physique des plasmas, ou encore plus récemment l'étude des ondes de matière et des condensats de Bose-Einstein [2]. En optique, les solitons sont principalement regroupés en trois classes qui dépendent essentiellement de la non-linéarité mise en jeu soit, en pratique, du matériau utilisé : les solitons Kerr, les solitons photoréfractifs et les solitons quadratiques. Parmi ces trois classes de solitons existent des combinaisons multiples d'enveloppes et de polarisations distinctes mutuellement piégées par intermodulation de phase, qui forment ce que l'on appelle les solitons multimodes vectoriels [3]. Pour comprendre comment ces solitons à composantes multiples peuvent exister, il suffit d'imaginer un guide d'onde de symétrie radiale supportant de nombreux modes transverses couplés par l'effet soliton. Lorsque deux (ou plusieurs) modes se propagent simultanément, un des modes peut jouer le rôle de guide d'onde effectif pour d'autres modes d'ordres supérieurs. Les expériences menées jusqu'à ce jour ont été réalisées pour la plupart dans des milieux photoréfractifs qui se caractérisent par une non-linéarité effective saturable [4, 5, 6]. Les résultats de ces expériences ont montré que la propagation des solitons multimodes était stable, révélant ainsi la formation d'états liés de solitons. Toutefois, des études théoriques récentes ont montré que la propagation de tels solitons devenait instable lorsque le coefficient d'intermodulation de phase est supérieur à celui de l'automodulation de phase [7, 8]. Une instabilité de brisure de symétrie viendrait perturber la stabilité des états liés de solitons. Dans cette étude, nous démontrons expérimentalement l'existence d'une telle instabilité en faisant interagir le mode fondamental et le premier mode d'ordre supérieur induits par effet soliton dans un guide plan de Kerr.

2 L'instabilité de type brisure de symétrie

Pour obtenir un coefficient d'intermodulation de phase supérieur à celui de l'automodulation de phase, nous avons considéré, pour les deux composantes du soliton vectoriel, les deux états de polarisations circulaires de la lumière, ainsi qu'une non-linéarité induite par réorientation moléculaire. Dans ces conditions, le rapport entre l'intermodulation de phase et l'automodulation de phase atteint la valeur considérable de 7 [9], ce qui devrait favoriser l'observation de l'instabilité de brisure de symétrie. Aussi, comme nous considérons une non-linéarité de Kerr pure non saturable, il convient de restreindre l'étude à une dimension transverse afin d'éviter la dislocation des faisceaux qui survient inévitablement

dans les milieux massifs [10]. L'expérience sera par conséquent réalisée dans un guide plan de disulfure de carbone (CS_2). La propagation de la lumière dans un tel guide est régie par un système de deux équations de Schrödinger non linéaires couplées qui s'écrivent sous la forme suivante [3]

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{i}{2k} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + i\gamma (|U|^2 U + 7|V|^2 U), \quad (2)$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{i}{2k} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + i\gamma (|V|^2 V + 7|U|^2 V), \quad (3)$$

où $U(x, z)$ et $V(x, z)$ sont respectivement les enveloppes des deux composantes de polarisations circulaires gauche et droite du champ électrique, k est le module du vecteur d'onde dans le guide plan et γ , le coefficient non linéaire. Ces deux équations de Schrödinger non linéaires sont couplées de façon incohérente (i.e., sans terme de mélange à quatre ondes) et admettent une famille de solutions stationnaires [11], composées d'une enveloppe de symétrie paire (U) superposée à une enveloppe de symétrie impaire (V). La figure 2(a) illustre cette famille de deux solitons. Ils sont représentés à la fois en polarisation rectiligne (E_x, E_y) et en polarisation circulaire (U, V). Ces deux modes U et V peuvent être à juste titre considérés comme étant respectivement le mode fondamental et le premier mode d'ordre supérieur du guide d'ondes qu'ils induisent ensembles par intermodulation de phase. La figure 2(b) présente une simulation numérique à partir des Eqs. (1) et (2) de la propagation du soliton bimodal dans le guide plan de CS_2 . Le soliton bimodal évolue

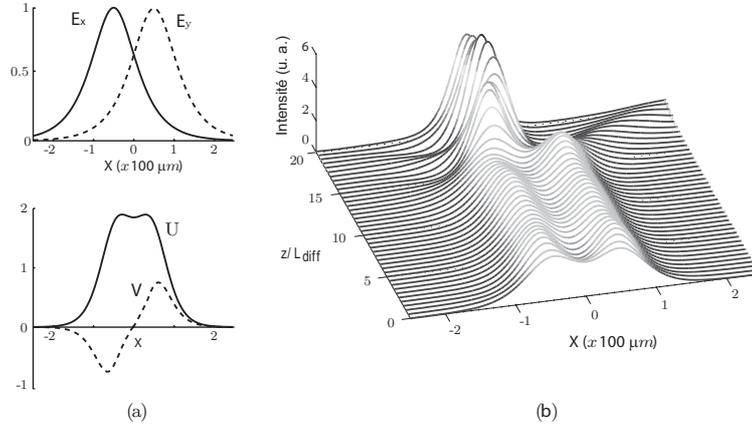


FIG. 2 – (a) Enveloppes des deux composantes du soliton vectoriel bimodal en polarisations circulaires opposées (U symétrique et V anti-symétrique) et en polarisations linéaires (E_x et E_y). (b) Simulation numérique de la propagation de l'état lié de solitons. L'évolution conduit à la formation d'un soliton elliptique fondamental après brisure de symétrie au bout de 15 longueurs de diffraction. L'instabilité est initiée par une faible perturbation asymétrique initiale sur V .

dans un premier temps sous la forme d'un état lié de solitons jusqu'à sa destruction par instabilité de brisure de symétrie au voisinage de 15 longueurs de diffraction. Pour cette simulation, l'instabilité est amorcée par une très faible perturbation asymétrique du profil V à l'entrée du guide (0,8 % en intensité sur le lobe gauche). L'énergie, qui est initialement équi-répartie sur les deux lobes du soliton, est alors transférée de la droite vers la gauche,

causant ainsi l'interruption du guide induit par la non-linéarité. Il est important de noter que cette instabilité prend naissance à partir du bruit dès l'entrée dans le guide. Elle s'amplifie au cours de la propagation, impliquant un échange périodique d'énergie entre les deux modes du soliton (attraction et répulsion) jusqu'à ce que son amplitude devienne telle que l'un des lobes est subitement absorbé par l'autre. Un fait remarquable est que, contrairement à ce que laisserait penser l'exemple de simulation de la figure 2(b), le sens gauche-droite de la brisure n'est pas déterminé par le signe de l'asymétrie initiale mais par son amplitude. Enfin, au-delà de cette instabilité le champ électromagnétique demeure en grande partie confiné dans une distribution d'intensité à une bosse, et forme ce que l'on appelle un soliton fondamental de polarisation elliptique [7, 12].

3 Montage expérimental

Pour observer l'instabilité de brisure de symétrie gauche-droite du soliton bimodal, nous utilisons un guide plan constitué d'une couche guidante de disulfure de carbone ($10 \mu\text{m}$ d'épaisseur) confinée entre deux blocs de verre SK5 ($\Delta n=0.04$) [13]. La différence des constantes de propagation transverse électrique (TE) et transverse magnétique (TM) dans ce guide est très faible. En conséquence, la biréfringence du guide peut être négligée étant donné sa faible longueur (3 cm), ce qui permet de considérer le guide comme isotrope. Le montage expérimental est représenté sur la figure 1. Il comprend principalement une source laser Nd:YAG picoseconde émettant à la longueur d'onde de 532 nm et un interféromètre de Michelson employé pour la mise en forme des enveloppes U et V du soliton bimodal. Le

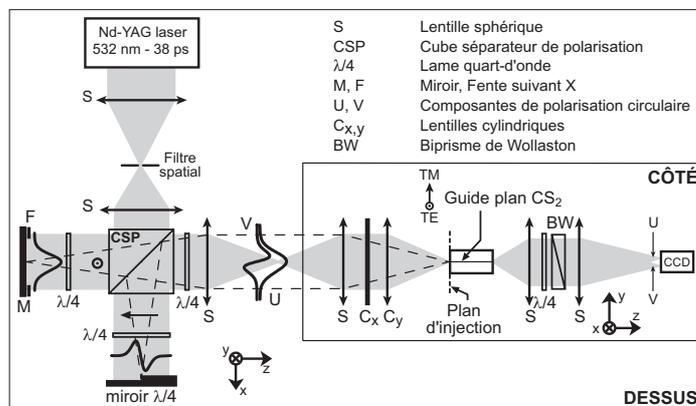


FIG. 3 – Montage expérimental

faisceau laser est dans un premier temps filtré spatialement puis séparé en deux faisceaux de polarisations orthogonales à l'aide d'un cube séparateur de polarisation. Un miroir à saut de phase, réalisé par masquage et usinage ionique sur substrat de silicium, est placé dans un des bras de l'interféromètre afin d'introduire le saut de phase de π requis pour l'enveloppe de symétrie impaire V. Dans chaque bras de l'interféromètre, une lame quart-d'onde assure la transmission à la sortie de l'interféromètre après réflexion sur les miroirs. A la sortie de l'interféromètre, une troisième lame quart-d'onde réalise la conversion en polarisations circulaires gauche et droite. Les deux faisceaux U et V sont ensuite injectés dans le guide à l'aide de deux lentilles cylindriques croisées, puis analysés séparément en sortie à l'aide d'un biprisme de Wollaston et d'une caméra CCD.

4 Résultats et discussions

La figure 4(a) montre les profils en intensité des faisceaux U et V avant l'injection dans le guide. Le faisceau V fait apparaître à son origine une bande sombre d'environ $40 \mu\text{m}$, qui provient du saut de phase introduit dans l'interféromètre. La puissance du faisceau gaussien U est 3 fois supérieure à celle de V et sa largeur à mi-hauteur w est égale à $64 \mu\text{m}$. La figure 4(b) illustre ces mêmes faisceaux à la sortie du guide en régime linéaire, c'est à dire à faible puissance de pompe. Cette figure indique que la diffraction provoque un

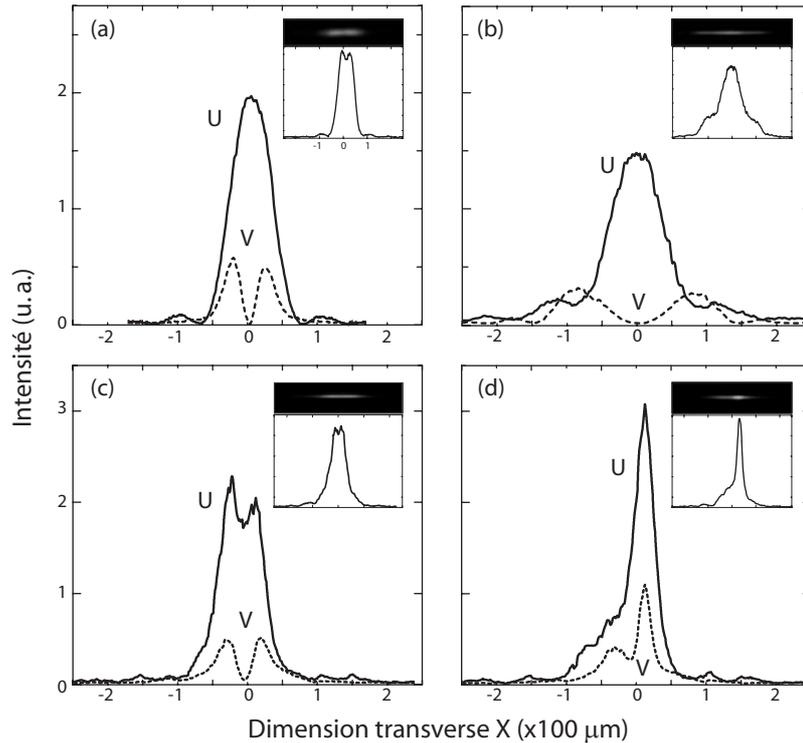


FIG. 4 – (a) Profils en intensité des deux composantes polarisées circulairement (U, V) du soliton vectoriel à deux modes à l'entrée du guide de CS_2 . (b) Diffraction en sortie du guide en régime linéaire. (c) Etat lié du soliton bimodal en sortie du guide en régime non linéaire ($P_U=2,9 \text{ kW}$, $P_V=0,9 \text{ kW}$). (d) Brisure de symétrie et apparition du soliton elliptique fondamental en sortie du guide. Les inserts illustrent respectivement les images obtenues avec la caméra CCD sans séparer les composantes de polarisation et le profil (U+V) correspondant.

élargissement significatif des faisceaux U et V ($87 \mu\text{m}$ pour le faisceau U), ce qui correspond approximativement à un étalement sur une longueur de diffraction $L_D = 0,36 w^2 k=2,8 \text{ cm}$. La figure 4(c) présente ces mêmes enveloppes U et V à plus forte puissance de pompe, c'est à dire lorsqu'elles sont mutuellement liées par compensation de la diffraction par la non-linéarité. On s'aperçoit d'une part que le faisceau U perd son profil gaussien initial et présente un profil à deux lobes (cf. figure 2(a)), alors que celui de V est conservé. D'autre part, la largeur du profil total en intensité est identique à celle des conditions d'entrée de guide, ce qui prouve l'existence de l'état lié et le piégeage réciproque des deux modes transverses induits sur la longueur de propagation considérée. Toutefois, ces états liés ne sont observés que pour 38 % des tirs lasers. Les 62 % de tirs restants sont caractérisés par

une forte asymétrie d'intensité et un confinement de l'énergie soit vers la gauche soit vers la droite, comme c'est le cas pour la figure 4(d). Ces résultats expérimentaux apportent la démonstration de l'instabilité de propagation de l'état lié de solitons par brisure de symétrie, et viennent ainsi conforter nos prédictions théoriques [8]. La brisure de symétrie est effectivement amorcée par les fluctuations de bruit du laser puisqu'elle est observée à peu près autant à gauche (46 % des tirs lasers) qu'à droite (54 %). De plus, nous n'avons pas remarqué de situation intermédiaire entre l'observation de l'état lié de solitons et celle de la brisure de symétrie, ce qui montre que l'instabilité apparaît très soudainement, comme le montre la simulation numérique de la figure 2(b).

5 Conclusions

En conclusion, nous avons démontré expérimentalement l'existence de l'instabilité de brisure de symétrie qui affecte la propagation des solitons optiques multimodes dans un milieu de Kerr isotrope. L'observation de cette nouvelle instabilité a été réalisée en faisant interagir les deux premiers modes transverses de polarisations circulaires opposées de la lumière au sein d'un guide plan de disulfure de carbone. La bifurcation spatiale ainsi engendrée par cette brisure de symétrie présente un intérêt manifeste pour la commutation tout-optique ultra-rapide, dans la mesure où elle bénéficierait de l'absence de seuil de puissance de commutation (amorçage par un faible signal de contrôle).

Remerciements Nous remercions Mathieu Chauvet et Eric Lantz du Laboratoire d'Op-

tique P. M. Duffieux pour la fabrication du miroir à saut de phase et les discussions scientifiques. Ce travail est soutenu par le programme d'attraction inter-universitaire belge (PAI P4-07) et par le projet européen Quantim (IST-2000-26019).

Références

- [1] Y. S. Kivshar et G. I. Stegeman, *Optics and Photonics News* **20**, 59 (2002).
- [2] M. H. Anderson *et al.*, *Science* **269**, 198 (1995).
- [3] M. Haelterman, A. P. Sheppard et A. W. Snyder, *Opt. Lett.* **18**, 1406 (1993).
- [4] M. Mitchell, M. Segev et D. N. Christodoulides, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 4657 (1998).
- [5] T. Carmon *et al.*, *Opt. Lett.* **25**, 1113 (2000).
- [6] W. Krolikowski *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 1424 (2000).
- [7] Y. Silberberg et Y. Barad, *Opt. Lett.* **20**, 246 (1995).
- [8] P. Kockaert et M. Haelterman, *J. Opt. Soc. Am. B* **16**, 732 (1999).
- [9] P. D. Marker et R. W. Terhune, *Phys. Rev. A* **137**, 801 (1965).
- [10] R. Y. Chiao, E. Garmire et C. H. Townes, *Phys. Rev. Lett.* **13**, 479 (1964).
- [11] M. Haelterman et A. P. Sheppard, *Phys. Rev. E* **49**, 3376 (1994).
- [12] M. Haelterman et A. P. Sheppard, *Phys. Lett. A* **194**, 191 (1994).
- [13] C. Cambournac, H. Maillotte, E. Lantz, J. M. Dudley et M. Chauvet, *J. Opt. Soc. Am. B* **19**, 574 (2002).

Modélisation mathématique du régime développé d'une tornade atmosphérique

A. Chauvière et J. Chaskalovic

Laboratoire de Modélisation en Mécanique

8, rue du capitaine Scott, 75015 Paris

chauvier@lmm.jussieu.fr et jch@ccr.jussieu.fr

Résumé

L'observation, la modélisation et la compréhension des tornades atmosphériques ont connu, ces dix dernières années, des développements considérables. Malgré les moyens de calculs actuels, la mise en oeuvre de modèles simplifiés *via* la recherche et l'étude de solutions exactes des équations de la dynamique des fluides, demeure un outil non négligeable, dont le principal objectif est la détermination des conditions singulières qui déclenchent ces trombes.

Nous présentons une modélisation de ces tourbillons, par le biais de solutions exactes autosimilaires des équations de Navier-Stokes, solutions dites coniques, traduisant l'interaction entre une ligne tourbillonnaire semi-infinie et un plan d'adhérence matérialisant le sol.

Par l'intermédiaire de ces solutions, nous nous sommes attachés à traduire une dynamique réaliste, dont l'une des structures fréquemment observée, expérimentalement [1] et numériquement [2], consiste en un écoulement tourbillonnaire intense, descendant le long de l'axe central, alors que l'écoulement est convergent et beaucoup moins intense au voisinage du sol, ces deux branches se rejoignant afin d'éjecter le fluide dans une direction privilégiée (voir figure 1).

Quelques modèles analytiques décrivent ce type de comportement [3], mais peu sont à même de prendre en compte les contraintes que nécessite la modélisation des tourbillons atmosphériques. En effet, la condition d'adhérence au sol est le plus souvent remplacée par une condition de glissement, alors que nous montrerons que la relaxation de cette condition dans les solutions coniques peut changer considérablement la nature des écoulements. De plus, l'importance de prendre en compte des nombres de Reynolds élevés dans la modélisation des tourbillons atmosphériques a été largement confirmée par des travaux récents [4, 5].

Ainsi, nous allons développer à partir du modèle de J. Serrin [6], un modèle susceptible d'appréhender des solutions à deux cellules pour de grands nombres de Reynolds, tout en vérifiant une condition d'adhérence au sol. Ces solutions permettront de rendre compte du caractère intense et très localisé des tornades en régime développé [7].

1 Introduction

On considère un fluide incompressible de viscosité cinématique ν , dans un demi-espace limité par un plan horizontal matérialisant le sol, et on utilisera le système de coordonnées sphériques $(O; R, \alpha, \theta)$, où R désigne la distance radiale à l'origine O , α la colatitude, et θ l'angle méridien autour de l'axe vertical OZ . La recherche de solutions autosimilaires des équations de Navier-Stokes stationnaires, pour un écoulement de révolution autour de l'axe vertical, permet d'écrire les composantes du champ de vitesses $\vec{V} = u \vec{e}_R + v \vec{e}_\alpha + w \vec{e}_\theta$ sous

la forme générique $f(x)/R$, où on l'a posé $x = \cos \alpha$. Les conditions d'adhérence au sol, de comportement de tourbillon libre de la vitesse de rotation w (inversement proportionnelle à la distance à l'axe), et d'imperméabilité de l'axe (forçant les lignes de courant à longer ce dernier), conduisent au modèle de J. Serrin [6]. Ce modèle consiste en une famille de solutions qui possède trois types de comportements, paramétrés par le nombre de Reynolds tourbillonnaire $\mathcal{R}_e = \Gamma/\nu$ (Γ étant la circulation du tourbillon proche de l'axe), et un paramètre q caractéristique du cisaillement au sol. L'un de ces écoulements s'apparente de manière qualitative au régime développé d'une tornade atmosphérique [1], et se sépare en deux zones : l'une proche du sol, dans laquelle les courants convergents sont redressés verticalement, et la seconde constituée de courants centraux descendants le long de l'axe. De manière quantitative, les ordres de grandeur des vitesses obtenues sont très faibles, du fait de l'absence de solutions pour de grands nombres de Reynolds. C'est pourquoi nous nous proposons de développer une nouvelle approche pour ce type d'écoulement.

2 Présentation du modèle

2.1 Configuration de l'écoulement

La modélisation adoptée est une extension du modèle de Serrin, par une approche qui consiste à considérer chaque zone, couplée à l'autre par des conditions de raccord sur une surface fictive de séparation correspondant à un cône d'angle α_c (voir figure ci-dessous). Le domaine de l'écoulement est ainsi séparé en deux cellules, chaque cellule possédant une

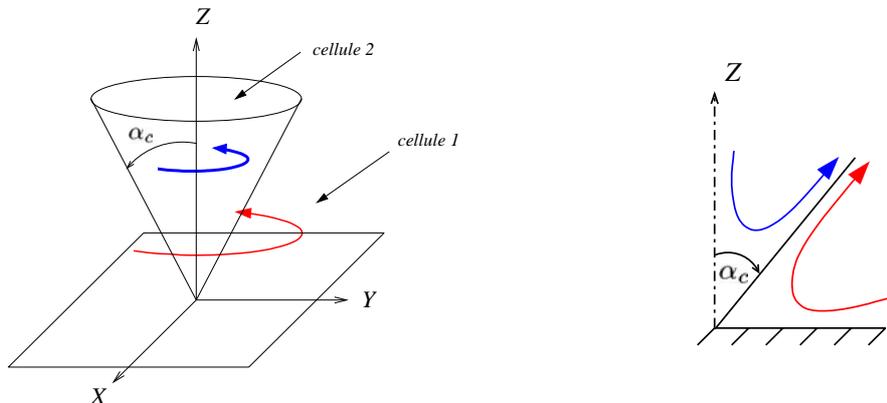


FIG. 1 – Configuration de l'écoulement à deux cellules

vitesse caractéristique de rotation propre : la cellule 1 est définie par $x \in [0, x_c]$ et la cellule 2, par $x \in [x_c, 1]$ où $x_c = \cos \alpha_c$. Dans chacune des cellules, les composantes sphériques du champ de vitesses seront cherchées sous la forme

$$u_i(x, R) = \frac{\Gamma_i F'_i(x)}{R}, \quad v_i(x, R) = \frac{\Gamma_i F_i(x)}{R\sqrt{1-x^2}}, \quad w_i(x, R) = \frac{\Gamma_i \Omega_i(x)}{R\sqrt{1-x^2}},$$

pour $i \in \{1, 2\}$, où les fonctions F_i et Ω_i sont des fonctions sans dimension et les circulations Γ_i définissent un nombre de Reynolds tourbillonnaire $\mathcal{R}_{e_i} = \Gamma_i/\nu$ propre à chaque cellule.

2.2 Modélisation de l'interface et conditions aux limites

La surface de séparation entre les deux cellules est modélisée par une interface conique, imperméable, assurant la continuité des vitesses, et dont la position (l'angle α_c) résulte

des efforts exercés par chacune des cellules. Cet angle est donc donné par une équation d'équilibre qui traduit la compensation des efforts normaux imposés par chaque cellule sur le cône. Cette relation d'équilibre, associée à la continuité des vitesses, se traduit par la continuité de la pression au travers de l'interface, et permettra d'obtenir x_c . Sur cette interface $x = x_c$, les conditions de continuité prendront la forme

$$F_2'(x_c) = \chi F_1'(x_c), \quad F_2(x_c) = F_1(x_c) = 0 \quad \text{et} \quad \Omega_2(x_c) = \chi \Omega_1(x_c), \quad (4)$$

où χ est le rapport $\mathcal{R}_{e_1}/\mathcal{R}_{e_2}$. De plus, les grandeurs $F_i'(x_c)$ devront être positives afin de respecter la configuration d'éjection du fluide le long de l'interface.

Enfin, les conditions aux limites utilisées par Serrin, traduisant l'adhérence au sol et le comportement de l'écoulement proche de l'axe, seront conservées, et s'écrivent

$$F_1 = F_1' = \Omega_1 = 0 \text{ en } x = 0, \quad F_2 = 0 \text{ et } \Omega_2 = 1 \text{ quand } x \text{ tend vers } 1.$$

Muni de ces conditions, l'écriture des problèmes dans chaque cellule montre qu'il reste à chaque fois un degré de liberté, dont le rôle est joué par un paramètre q_i caractéristique du cisaillement sur les frontières du domaine. Ainsi, le problème complet est un modèle à quatre paramètres (q_1, \mathcal{R}_{e_1}) et (q_2, \mathcal{R}_{e_2}), associés respectivement aux cellules 1 et 2.

2.3 Formulation du problème mathématique

Le modèle que nous venons de décrire consiste à résoudre le problème (\mathcal{P}) ci-dessous, obtenu à partir des équations de Navier-Stokes écrites pour chaque cellule, couplées aux conditions de continuité (4):

$$(\mathcal{P}) \left\{ \begin{array}{l} (\mathcal{P}_1) \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\mathcal{R}_{e_1}} [2(1-x^2)F_1' + 4xF_1] + F_1^2 = H_1(x), \quad F_1(0) = 0, \\ \frac{1}{\mathcal{R}_{e_1}} (1-x^2)\Omega_1'' + F_1\Omega_1' = 0, \quad \Omega_1(0) = 0, \quad \Omega_1(x_c) = 1, \end{array} \right. \quad \forall x \in]0, x_c[, \\ (\mathcal{P}_2) \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\mathcal{R}_{e_2}} [2(1-x^2)F_2' + 4xF_2] + F_2^2 = H_2(x), \quad F_2(x_c) = 0, \\ \frac{1}{\mathcal{R}_{e_2}} (1-x^2)\Omega_2'' + F_2\Omega_2' = 0, \quad \Omega_2(x_c) = \chi, \quad \Omega_2(1) = 1, \end{array} \right. \quad \forall x \in]x_c, 1[\end{array} \right.$$

où les seconds membres H_1 et H_2 des équations différentielles portant sur F_1 et F_2 sont donnés par :

$$H_1(x) = -q_1 x(x_c - x) + \frac{2F_1'(x_c)}{\mathcal{R}_{e_1}} (1-x^2) \frac{x}{x_c} + 2 \left[1 - \left(x_c + \frac{1}{x_c} \right) x + x^2 \right] \int_0^x \frac{t\Omega_1^2}{(1-t^2)^2} dt + 2 \frac{x}{x_c} \int_x^{x_c} \frac{\Omega_1^2}{(1-t^2)^2} (x_c - t)(1 - x_c t) dt,$$

et

$$H_2(x) = - \left[q_2 + \frac{\chi^2}{1-x_c^2} \right] (x-x_c)(1-x) + \frac{2F_2'(x_c)}{\mathcal{R}_{e_2}} (1+x_c)(1-x) + 2(1-x)^2 \int_{x_c}^x \frac{t\Omega_2^2}{(1-t^2)^2} dt + 2 \frac{x-x_c}{1-x_c} \int_x^1 \frac{\Omega_2^2}{(1+t)^2} dt - 2x_c \frac{1-x}{1-x_c} \int_{x_c}^x \frac{\Omega_2^2}{(1+t)^2} dt.$$

Dans ce système, la valeur de x_c est déterminée par la continuité de la pression au travers de l'interface, qui s'écrit :

$$q_1 + 2 \int_0^{x_c} \frac{t\Omega_1^2(t)}{(1-t^2)^2} dt = \frac{q_2}{\chi^2} + \frac{1}{1-x_c^2}. \quad (5)$$

2.4 Comportement des solutions

Une analyse des solutions de chacun des problèmes (\mathcal{P}_i) , pris indépendamment, montre que l'écoulement relatif à chaque cellule est susceptible de comporter plusieurs branches. Il en découle que l'écoulement recherché, représenté sur la figure 1, ne peut être obtenu que pour certaines valeurs des paramètres q_i . On montre qu'une condition suffisante pour obtenir la configuration recherchée à deux cellules prend la forme :

$$q_1 > 1 + \frac{2}{\mathcal{R}_{e_1}} \frac{1-x_c^2}{x_c^2} |F'_1(x_c)| \quad \text{et} \quad q_2 < 0. \quad (6)$$

Pour des valeurs des paramètres vérifiant cette condition, il est possible d'étudier la position de l'interface, qui varie suivant l'intensité des vitesses, tant azimutale que verticale, dans chaque zone. Ainsi, plus l'écoulement est rapide proche de l'axe, plus la dépression engendrée a tendance à refermer le cône frontière (x_c tend vers 1). C'est à ces écoulements intenses que nous nous sommes intéressés.

3 Ecoulements à grand nombre de Reynolds

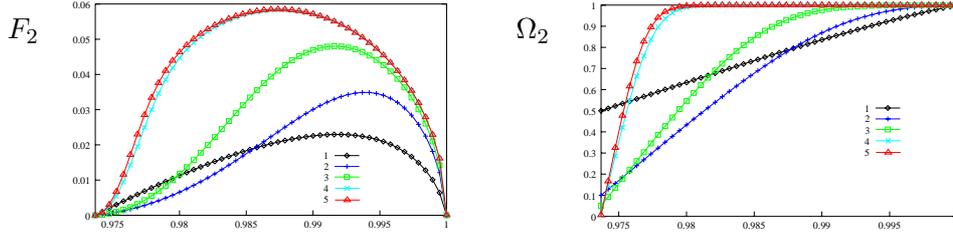
Une des applications du modèle présenté consiste à pouvoir obtenir des ordres de grandeurs des vitesses très différents d'une cellule à l'autre. C'est un moyen de lever les contraintes du modèle de Serrin, à savoir l'impossibilité d'obtenir une structure à deux cellules à grand nombre de Reynolds. Ainsi, nous allons nous intéresser à des solutions à grand Reynolds, mais uniquement à l'intérieur du cône frontière, dans la cellule 2, c'est à dire pour des valeurs élevées du paramètre \mathcal{R}_{e_2} .

3.1 Evolution des solutions en fonction de \mathcal{R}_{e_2}

Pour ces valeurs élevées de \mathcal{R}_{e_2} , le tourbillon s'intensifie dans la cellule 2, ce qui se traduit par la fermeture du cône frontière. C'est pourquoi, nous allons fixer cet angle. A cette fin, nous allons fixer les paramètres (q_1, \mathcal{R}_{e_1}) , puis faire varier \mathcal{R}_{e_2} et q_2 tels que q_2/χ^2 reste constant, tout en vérifiant les conditions (6). L'angle x_c sera alors fixé au travers de la relation (5), tout en s'assurant que

- l'écoulement dans la cellule 1 proche du sol, déterminé une fois pour toute, possède une unique branche ascendante le long du cône frontière,
- l'écoulement dans la cellule 2, à l'intérieur du cône frontière, possède lui aussi une branche unique, descendant le long de l'axe.

Nous présentons sur la figure suivante les simulations réalisées pour $q_1 = 0.7$, $\mathcal{R}_{e_1} = 8$, $x_c = 0.974$ ($q_2/\chi^2 = -6.25$) et $\mathcal{R}_{e_2} = 16(1), 80(2), 160(3), 1000(4), 1231(5)$. Ces simulations numériques montrent que les solutions dans la cellule 2 tendent vers un comportement limite quand le nombre de Reynolds \mathcal{R}_{e_2} augmente. Cette limite nous intéresse tout particulièrement car elle correspond à un écoulement très rapide dans la zone 2, dont nous allons pouvoir déterminer une expression analytique, par une technique de développements asymptotiques.


 FIG. 2 – Evolution des solutions de (\mathcal{P}_2) suivant le paramètre $\mathcal{R}e_2$

3.2 Solutions analytiques

On introduit le petit paramètre $\epsilon = 1/\mathcal{R}e_2 = o(1)$, et on impose pour cette étude $\mathcal{R}e_1 = \mathcal{O}(1)$, traduisant le fait que l'écoulement dans la cellule 1 reste *lent* en comparaison de celui dans la cellule 2. Par ces hypothèses, la méthode des développements asymptotiques raccordés permet de construire le développement composite des fonctions F_2 et Ω_2 . On montre dans ce cas, que les conditions de raccord (4) se transforment en conditions d'adhérence en $x = x_c$, et que les développements composites des solutions du problème (\mathcal{P}_2) peuvent être exprimés à partir d'une fonction g , solution du problème de Riccati suivant

$$\begin{cases} g'(y) + \frac{1}{2}g^2(y) = y, & \forall y \in [0, +\infty[, \\ g(0) = 0. \end{cases}$$

Ces développements composites s'écrivent

$$\begin{aligned} F_2^c(x, \epsilon) &= \epsilon^{1/3} \left[\frac{1}{2\sqrt{(1-x_c)}} \right]^{1/3} \sqrt{1-x} g \left([\lambda/\epsilon^2]^{1/3} (x-x_c) \right), \\ \Omega_2^c(x, \epsilon) &= \frac{1}{\gamma} \int_0^{[\lambda/\epsilon^2]^{1/3} (x-x_c)} \exp \left(- \int_0^s g(t) dt \right) ds, \end{aligned} \quad (7)$$

dans lesquels $\gamma = \int_0^\infty \exp \left(- \int_0^s g(t) dt \right) ds$ et $\lambda = [2(1-x_c)^2(1+x_c)^3]^{-1}$.

Nous présentons ci-dessous la comparaison de ces développements \dashv avec les solutions numériques — dans le cas (4) de la figure 118, correspondant à $\epsilon = 10^{-3}$.

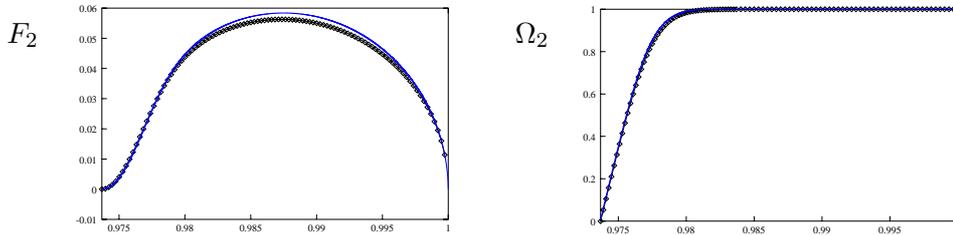
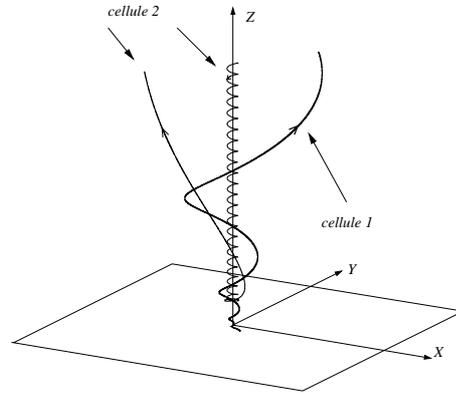


FIG. 3 – Validation des développements composites

4 Interprétation physique

Par cette approche, nous sommes à même de proposer une modélisation réaliste d'une tornade en régime développé, dont on présente ci-dessous les lignes de courant tridimen-

sionnelles obtenues à partir des solutions présentées dans la section précédente. Ces solutions qui vérifient des conditions d'adhérence au sol, décrivent une zone convergente dans laquelle les vitesses sont assez peu élevées en comparaison de celles de la zone proche de l'axe, pour laquelle le fluide se comporte de manière localisée comme un tourbillon potentiel à composante verticale. Ceci décrit de manière réaliste la phénoménologie du régime développé d'une tornade atmosphérique, comme un phénomène très localisé. Cependant, la différence des ordres de grandeur des vitesses entre les deux branches de l'écoulement, pour la solution à grand nombre de Reynolds \mathcal{R}_{e_2} , n'est possible qu'au dépend d'une perte de continuité des efforts tangentiels sur l'interface. Mais lorsqu'on analyse la solution asymptotique (7), il ressort que les conditions de raccord deviennent analogues à des conditions d'adhérence. Ceci légitime le saut de contrainte, car le fluide dans la région centrale se comporte alors comme un fluide à l'intérieur d'un cône rigide, ignorant la partie extérieure. Cependant, l'écoulement dans la cellule 1, bien que très lent en comparaison, n'est pas pour autant négligeable, car c'est lui qui permet de définir la géométrie de l'écoulement. Enfin, et c'est là le point fondamental des solutions obtenues, nous pouvons à l'aide du modèle proposé, remonter à un champ de vitesses dont les ordres de grandeur sont en accord avec les données concernant les vitesses au sein des tornades. Autant la région proche du sol peut-être, loin de l'axe, considérée comme laminaire du fait de la faible influence du tourbillon dès que l'on s'éloigne de la partie centrale, autant le cône tourbillonnaire ne saurait l'être, ce qui légitime l'introduction d'une viscosité turbulente ν_t dans la description du nombre de Reynolds \mathcal{R}_{e_2} . Les simulations numériques les plus réalistes en la matière [2], à notre connaissance, considèrent des valeurs de cette viscosité de l'ordre de $10 \text{ m}^2/\text{s}$. Pour un nombre de Reynolds $\mathcal{R}_{e_2} = 1000$, la circulation Γ_2 est de l'ordre de $10^4 \text{ m}^2/\text{s}$, ce qui correspond aux valeurs associées aux tornades les plus violentes.



Références

- [1] R. L. Gall, *Internal dynamics of tornado-like vortices*, J. Atmos. Sci., **39**, no. 12, 2721–2736, (1982).
- [2] D. S. Nolan, B. F. Farrell, *The structure and dynamics of tornado-like vortices*, J. Atmos. Sci., **56**, no. 16, 2908–2936, (1999).
- [3] V. Shtern, F. Hussain, *Hysteresis in swirling jets*, J. Fluid Mech., **309**, 1–44, (1996).
- [4] W. S. Lewellen, D. C. Lewellen, R. I. Sykes, *Large-eddy simulation of a tornado's interaction with the surface*, J. Atmos. Sci., **54**, no. 5, 581–605, (1997).
- [5] D. S. Nolan, A. S. Almgren, J. B. Bell, *High Reynolds number simulations of axisymmetric tornado-like vortices with adaptive mesh refinement*, soumis à J. Atmos. Sci., (2000).
- [6] J. Serrin, *The swirling vortex*, Phil. Trans. Roy. Soc. London, **A 271**, 320–360, (1972).
- [7] A. Chauvière, *Contributions à la modélisation d'une ligne semi-infinie tourbillonnaire: Application aux tornades atmosphériques*, thèse de l'Université Paris 6 (décembre 2001).

Guide d'onde ruban reconfigurable induit par solitons spatiaux photovoltaïques

G. Couton et M. Chauvet

*Laboratoire d'Optique P. M. Duffieux,
U.M.R. CNRS/Université de Franche-Comté n° 6603,
Institut des Microtechniques de Franche-Comté,
25030 Besançon cedex, FRANCE.
gilles.couton@univ-fcomte.fr*

Résumé

Dans cette étude, nous présentons des résultats expérimentaux accompagnés d'une modélisation sur la génération de guides rubans monomodes reconfigurables à l'aide de solitons spatiaux noirs dans un guide plan de $\text{LiNbO}_3:\text{Ti}$. Le principe s'appuie sur une modification non linéaire de l'indice de réfraction par effet photoréfractif. Les guides rubans obtenus expérimentalement permettent d'obtenir un confinement efficace. La prise en compte de l'influence du dopage titane sur la mise en place de l'effet photoréfractif nous donne une modélisation satisfaisante. Cela explique notamment que le mode supporté par le guide ruban photogénéré est décalé en profondeur par rapport au mode du guide plan initial.

1 Introduction

Pour leurs propriétés intrinsèques de localisation spatiale, de guidage auto-induit et leurs possibilités d'interactions variées, les solitons spatiaux possèdent les caractéristiques requises pour former les éléments de base pour la réalisation de composants tout-optiques de traitement parallèle de l'information [1]. En particulier, les solitons spatiaux photoréfractifs possèdent l'avantage, par rapport aux solitons dans les milieux de Kerr ou les cristaux quadratiques, de pouvoir être créés à l'aide de sources lumineuses de faible puissance (diodes laser). D'autre part, ils peuvent être figés sur de longues durées, puis éventuellement effacés et réinscrit. Ces guides peuvent être utilisés pour guider non seulement le faisceau soliton qui les crée, mais aussi d'autres faisceaux, d'intensité, de longueur d'onde ou de polarisation différentes. La plupart des applications nécessitent un confinement bidimensionnel dans un cristal massif [2] ou la combinaison d'un faisceau auto-confiné dans une direction et d'un guide planaire [3, 4]. Dans ce travail, nous présentons des résultats expérimentaux sur la création d'un guide ruban induit par un soliton noir obtenu en régime transitoire dans un guide planaire de LiNbO_3 dopé titane. Cette configuration nous permet d'exploiter une des propriétés intrinsèques du soliton noir qui est de générer un guide monomode. Notre étude s'attache également à modéliser la formation de ce guide et à calculer le profil du mode guidé.

2 Méthodes expérimentales

Partant d'un wafer de LiNbO_3 en coupe y prédopé en fer, nous avons déposé sous vide 300 Å de titane à la surface d'échantillons de 5 mm (axe \vec{z}) \times 20 mm (axe \vec{x}) \times 0.5 mm (axe \vec{y}). Les paramètres de diffusion ont été choisis pour obtenir un guide monomode à 633 nm, soit une température T de diffusion de 1020°C pendant un temps t de 6 heures.

La diffusion du titane dans le LiNbO_3 induit une augmentation d'indice de réfraction Δn_{Ti} en fonction de la profondeur y qui est donnée par l'équation 8 pour une onde polarisée suivant l'axe \vec{c} .

$$C(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\tau}{d} \exp(-y/d)^2 \quad \text{soit} \quad \Delta n_{Ti} = 7,5 \cdot 10^{-3} \times C(y) \quad (8)$$

où τ est l'épaisseur de titane déposé et $d = 2(Dt)^{1/2}$ est la profondeur de diffusion, avec $D = D_0 \exp(-T_0/T)$. La température d'activation et le coefficient de diffusion étant respectivement $T_0 \simeq 2.5 \times 10^4 K$ et $D_0 = 2.5 \times 10^{-4} \text{cm}^2/\text{s}$ [5]. Le banc expérimental réalisé

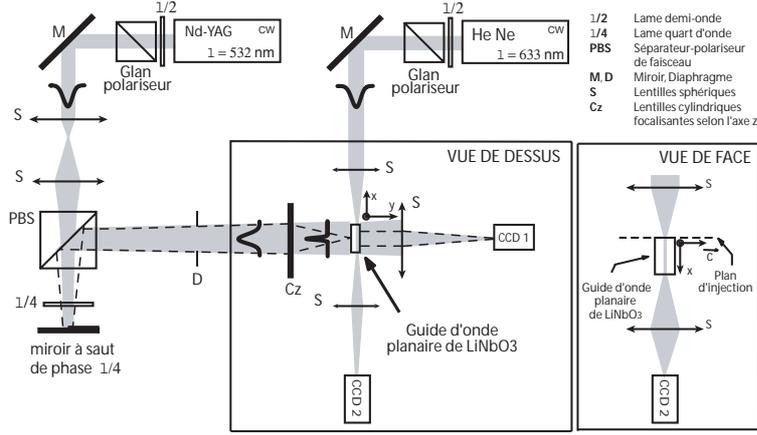


FIG. 1 – Montage expérimental

répond à deux exigences, pouvoir à la fois former un soliton spatial dans l'épaisseur de l'échantillon et dans un second temps vérifier la mise en place du guide ruban induit par ce même soliton dans le guide planaire (FIG. 1). Pour créer le soliton noir, le faisceau provenant d'un laser continu à 532 nm illumine un miroir à saut de phase ($\lambda/4$), lequel est imagé sur la surface inférieure de l'échantillon à l'aide de lentilles cylindriques, ce qui donne un éclairage homogène sauf pour une bande sombre alignée selon l'axe x de notre échantillon. Cette illumination va donner naissance à un soliton spatial noir au cours de la propagation dans la profondeur de l'échantillon. La modification d'indice de réfraction associé au soliton spatial est analysé à l'aide d'un faisceau sonde à 633 nm.

3 Modèle théorique

L'effet photoréfractif résulte de la modification par effet électro-optique de l'indice de réfraction par un champ de charge d'espace. Ce champ est créé par le déplacement puis le piégeage de porteurs photo-générés par un éclairage inhomogène. La connaissance de ce champ de charge d'espace représente la clé de notre étude en nous permettant de définir à la fois la variation photo-induite de l'indice de réfraction et par la suite la formation du soliton via l'équation de propagation. Le modèle de Kukhtarev [6], permet de calculer ce champ de charge d'espace E_{SC} . Ce modèle est formé par un système de 4 équations :

$$\frac{\partial}{\partial t} N_d^i = (sI + \beta)(N_d - N_d^i) - \gamma_e n N_d^i \quad (9)$$

$$q\mu n E_{SC} + k_B T \mu \frac{dn}{dx} + \beta_{ph}(N_d - N_d^i)I = 0 \quad (10)$$

$$\frac{\partial J}{\partial x} = q \left(\frac{\partial n}{\partial t} - \frac{\partial N_d^i}{\partial t} \right) \quad (11)$$

$$\frac{dE_{SC}}{dx} + (q/\epsilon)(n + N_A - N_d^i) = 0 \quad (12)$$

Les trois premières équations prennent en compte la génération de porteurs (optiquement et thermiquement), leur déplacement et leur capture. La dernière équation permet de calculer le champ de charge d'espace résultant. Les variables dépendantes de x sont n la densité d'électron, N_d la densité des donneurs, N_d^i celle des donneurs ionisés et N_A la densité des accepteurs ionisés, J la densité de courant et I est l'intensité du faisceau. Les constantes sont s la section efficace de photoionisation, β le taux de génération thermique, γ_e le taux de recombinaison, μ la mobilité de l'électron, β_{ph} la constante photovoltaïque, et ϵ la constante diélectrique, q est la charge de l'électron, k_B la constante de Boltzmann et T la température du cristal.

Dans le cadre d'un cristal photoréfractif pour lequel le transport de charges est dominé par l'effet photovoltaïque comme dans le cas du LiNbO_3 , Le système d'équations précédent nous permet d'obtenir l'évolution temporelle du champ de charge d'espace à partir de l'instant où l'éclairement I est appliqué et d'en déduire la variation d'indice Δn_{PR} produite :

$$E_{SC} = \frac{E_p I}{I + I_{dark}} \left(\exp\left(-\frac{I + I_{dark}}{T_d} t\right) - 1 \right) \quad ; \quad \Delta n_{PR} = -\frac{1}{2} n_b^3 r_{33} E_{SC} \quad (13)$$

avec $E_p = \frac{\beta_{ph} \gamma_e N_A}{q \mu s} = 2,7 \cdot 10^7 \text{V/m}$ et $T_d = \frac{\epsilon}{q \mu \beta (N_d - N_A) I_{dark}}$ respectivement le champ photovoltaïque et le temps de réponse diélectrique sans éclairage, caractéristiques de l'échantillon utilisé, $I_{dark} = \frac{\beta}{s}$ est l'intensité équivalente à la génération thermique. Pour un éclairage I donné, la modification d'indice du milieu d'indice n_b induite par effet électro-optique est donc maintenant connue. En injectant cette variation d'indice dans l'équation qui régit la propagation des ondes on trouve, par résolution numérique, des solutions particulières pour lesquelles le profil d'intensité I est conservé au cours de la propagation. Dans le cas du LiNbO_3 , ces solutions correspondent à la propagation de solitons noirs. La (FIG. 2) représente la largeur à mi-hauteur d'un soliton en fonction

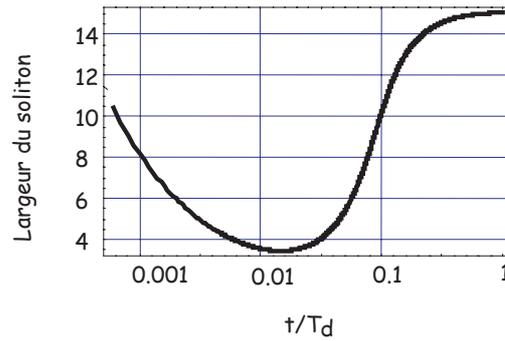


FIG. 2 – Largeur à mi-hauteur en intensité d'un soliton noir en fonction du temps. L'unité de largeur étant $kn_b \sqrt{r_{eff} E_{ph}}$ (k nombre d'onde dans le vide).

du temps t pour un faisceau 100 fois plus intense que I_{dark} . Cette courbe typique fait apparaître deux zones principales pour l'obtention d'un soliton. La première correspond au régime établi [7], lorsque t est supérieur à T_d , et la seconde correspond à une fenêtre

temporelle dans laquelle la focalisation atteint un maximum. C'est dans ce second cas qui correspond à un régime transitoire que sont observés les solitons présentés dans cette étude. L'étude théorique approfondie montre que la taille du soliton transitoire est minimale et indépendante de la valeur de l'intensité maximale utilisée. Des résultats similaires ont été démontré par Fressengeas [8] dans le cas de solitons brillants. La dynamique de formation du soliton photovoltaïque noir est donc établi. On retiendra que la variation d'indice créée par le soliton spatial forme un guide monomode pour toute longueur d'onde supérieure ou égale à la longueur d'onde utilisée lors de la formation du soliton. Cette caractéristique remarquable nous amène à envisager l'exploitation de ce guide.

4 Résultats et discussions

Nous nous intéresserons dans un premier temps à décrire la formation du soliton spatial à travers le substrat, puis à la création du guide d'onde ruban dans le guide planaire. La face inférieure est illuminée par le profil soliton polarisé suivant \vec{c} à 532 nm , dont la largeur à mi-hauteur est de $5 \mu\text{m}$. Le choix de la polarisation nous permet d'utiliser avantageusement le fort coefficient électro-optique r_{33} du cristal, optimisant ainsi notre effet photoréfractif. Avant la mise en place de cet effet, le faisceau noir diffracte lors de sa

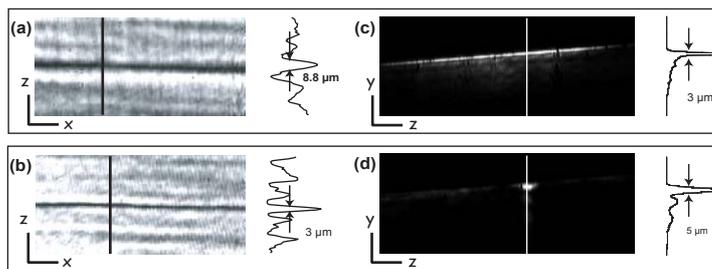


FIG. 3 – Formation du soliton et du guide ruban

propagation sur 0.5 mm . La (FIG. 3a) est l'image de la face supérieure (côté guide plan), une largeur de $8,8 \mu\text{m}$ à mi-hauteur du faisceau noir est mesurée. Après la mise en place de l'effet photoréfractif, le faisceau s'auto-focalise, contre-balance sa propre diffraction et atteint une largeur à mi-hauteur de $3 \mu\text{m}$. Le soliton spatial est en place. La figure 3b présente ce régime. Notre modélisation précédente nous permet de déduire la variation d'indice de réfraction induite par ce soliton spatial. D'après les paramètres du LiNbO_3 l'amplitude est estimée à 3.10^{-3} . Le champ de charge d'espace donné par l'équation (13) nous permet de déterminer rigoureusement le profil de cette variation d'indice. Simultanément à la formation du soliton, on observe le confinement du faisceau sonde injecté colinéairement au soliton spatial dans le guide plan. Avant formation du soliton, le faisceau sombre diffracte fortement sur les 20 mm de propagation (FIG. 3c). Notons que le faisceau est focalisé par un objectif $\times 6$ à l'entrée du guide plan. Après formation du soliton, on observe un confinement efficace et spectaculaire du faisceau sonde dans le guide ruban (FIG. 3d). Cette dernière figure nous permet de constater que le profil du mode guidé est plus épais et décalé en profondeur par rapport au profil du mode initial du guide plan. On mesure un profil de $5 \mu\text{m}$ d'épaisseur pour le guide ruban et de $3 \mu\text{m}$ pour le guide plan. Le décalage vers le substrat est estimé à $1 \mu\text{m}$. D'autre part, la largeur du mode guidé dans le guide ruban est de $10 \mu\text{m}$.

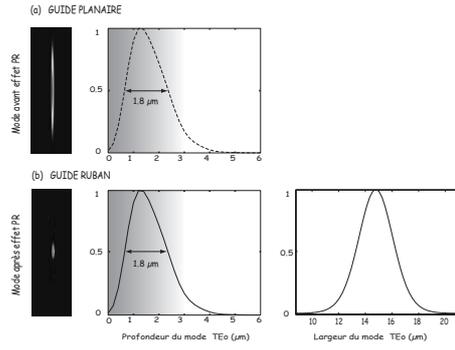


FIG. 4 – Calcul du profil du mode TE dans un guide planaire (a) et du mode TE₀ dans un guide ruban induit par soliton noir à 532 nm (b). La variation d'indice par effet PR étant supposée homogène à l'intérieur du guide plan.

Afin de modéliser la structure du mode dans le guide ruban, nous avons utilisé une analyse numérique basée sur la méthode de Galerkin [9]. Cette méthode nous permet de calculer la structure des modes pour un profil d'indice complexe. Les variations d'indices étant faibles, nous pouvons supposer que le profil d'indice de notre guide ruban résulte de la superposition de la variation d'indice Δn_{Ti} due au dopage titane donnée par la relation (8) et du profil d'indice Δn_{PR} induit par le soliton donné par la relation (13). Dans un premier temps, nous supposons que la variation d'indice Δn_{PR} dans l'épaisseur guide plan est identique à celle produite par le soliton noir. Δn_{PR} est obtenu en appliquant la théorie décrite précédemment à un soliton noir de 3 μm de large conformément à notre expérience. Sur la figure 4, le calcul du mode à la longueur d'onde de 632 nm, montre que le profil

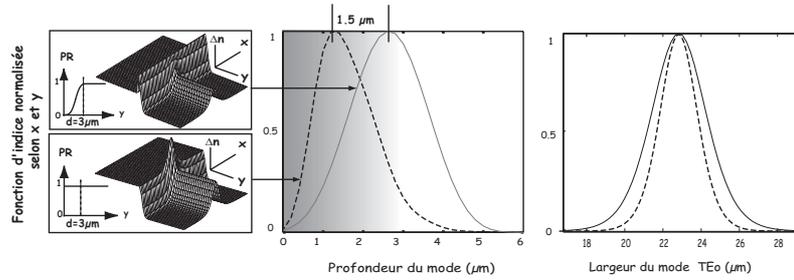


FIG. 5 – Représentation des profondeurs du mode TE₀ pour un effet PR homogène et inhomogène.

vertical dans le guide ruban est très similaire au profil calculé dans le guide plan initial. De plus, la largeur du mode légèrement supérieure à la largeur du soliton noir obtenu expérimentalement s'explique par les deux longueurs d'ondes utilisées. Cependant, cette modélisation ne permet pas d'élucider le décalage en profondeur du mode et ainsi que la largeur obtenue expérimentalement. Nous suggérons que l'origine de ce désaccord provient de l'influence du dopage titane sur la mise en place de l'effet photoréfractif. Il est en effet notoire que l'incorporation de certains éléments tend à réduire l'effet photoréfractif [10]. Conformément à la relation 8, le dopage titane est maximum à la surface de l'échantillon et diminue en profondeur. Nous intégrons donc ce paramètre dans notre modélisation en supposant que l'amplitude du champ de charge d'espace est négligeable à la surface de

l'échantillon et augmente selon une loi proportionnelle à la concentration de titane pour atteindre sa valeur nominale dans le substrat.

Le résultat est présenté figure 5. Le déplacement du mode ainsi que son étalement est bien observé en accord avec l'expérience. Notons qu'un résultat similaire serait observé en considérant que le dopage titane diminue localement le temps de réponse diélectrique du matériau (T_d). Dans ce cas, le mode devrait se décaler progressivement vers le substrat avant de se stabiliser. A ce sujet, notons que Shandarov et al. [11] ont observé un déplacement du mode guidé dans une configuration comparable à celle de notre étude. Une étude expérimentale supplémentaire permettant une analyse dynamique est nécessaire pour valider cette hypothèse.

5 Conclusion

Dans cette étude, nous présentons dans un premier temps la réalisation d'un guide d'onde reconfigurable monomode induit par soliton noir photovoltaïque en régime transitoire dans un guide planaire $\text{LiNbO}_3:\text{Ti}$ monomode à 633 nm . Puis, nous avons caractérisé plus précisément le mode du guide ruban à l'aide d'un modèle numérique que nous avons confronté aux résultats expérimentaux. Il nous apparaît évident que le dopage titane influence la mise en place de l'effet photoréfractif. Nous suggérons que ce dopage abaisse l'amplitude de l'effet photoréfractif ou/et modifie sa dynamique de mise en place.

Références

- [1] Optics and Photonics News, *SPECIAL ISSUE: Solitons*, **13**(2), 27-76 (2002).
- [2] M. Shih, M. Segev, G. Salamo, *Circular waveguides induced by two-dimensional bright steady-state photorefractive spatial screening solitons*, Opt. Lett. **21**, 931-933 (1996).
- [3] M. Chauvet, S. Chauvin, H. Maillotte, *Transient dark photovoltaic spatial solitons and induced guiding in slab LiNbO_3 waveguides*, Opt. Lett. **26**, 1344-1346 (2001).
- [4] M. Wesner, C. Herden, D. Kip, E. Krätzig, P. Moretti, *Photorefractive steady state solitons up to telecommunication wavelengths in planar SBN waveguides*, Opt. Comm. **188**, 69-76 (2001).
- [5] M. Minakata, S. Saito, M. Shibata, S. Miyazawa, *Precise determination of refractive-index changes in Ti-diffused LiNbO_3 optical waveguides*, J. Appl. Phys. **49**(9), 4677-4682 (1978).
- [6] G. Valley, J. Lam, *Photorefractive Materials and Their Applications I*, P. Gunter and J. P. Huignard, eds. (Springer-Verlag, New York, 1998), Chap. 3.
- [7] G. Valley, M. Segev, B. Crosignani, A. Yariv, M.M. Fejer, M.C. Bashaw, *Dark and bright photovoltaic spatial solitons*, Phys. Rev. A **50**(6), 4457-4460 (1994).
- [8] , N. Fressengeas, J. Maufroy, G. Kugel, *Temporel behavior of bidimensional photorefractive bright spatial solitons*, Phys. Rev. E **54**(6), 6866-6875 (1996).
- [9] D. Marcuse, *Solution of the vector wave equation for general dielectric waveguides by the Galerkin Method*, IEEE J. Quantum Electron., **28**(2), 459-465 (1992).
- [10] D. A. Bryan, R. Gerson, H. E. Tomaschke, *Increased optical damage resistance in lithium niobate*, Appl. Phys. Lett. **44**, 847 (1984).
- [11] V. Shandarov, D. Kip, M. Wesner, J. Hukriede, *Observation of dark spatial photovoltaic solitons in planar waveguides in lithium niobate*, J. Opt. A: Pure Appl. Opt. **2**, 500-503 (2000).

Intermittence spatio-temporelle dans un écoulement de Couette de torsion

A. Cros et P. Le Gal

*Institut de Recherche sur les Phénomènes Hors Equilibre,
UMR 6594, CNRS & Universités d'Aix-Marseille I et II,
49 rue F. Joliot-Curie, BP146
Technopôle de Château-Gombert, 13384 Marseille Cédex 13
cros@irphe.univ-mrs.fr*

Résumé

Cette étude expérimentale porte sur la transition vers la turbulence d'un écoulement confiné entre un disque fixe et un disque tournant. La distance entre les deux disques est plus petite que les épaisseurs des couches limites, de telle sorte que l'écoulement de base est de type "Couette de torsion". Dans cette configuration, lorsqu'on augmente la vitesse de rotation du disque tournant, des régions désordonnées se développent dans le fond laminaire. Dans une première partie, nous décrivons géométriquement ces domaines turbulents. Dans une seconde, bien que ces structures n'envahissent pas complètement l'écoulement, nous présentons une analyse statistique des tailles et des durées de vie des domaines laminaires et turbulents afin de comparer ce processus de transition à l'intermittence spatio-temporelle.

1 Introduction

Par rapport aux systèmes confinés, pour lesquels la transition vers un chaos temporel fut décrite avec détails, la transition dans les systèmes étendus est encore l'objet de nombreuses études. En particulier, un scénario d'intermittence spatio-temporelle (IST) a été révélé, caractérisé par la coexistence de domaines turbulents et laminaires pour les mêmes valeurs du paramètre de contrôle. Pomeau [1] proposa en 1986 que l'IST pouvait être analogue à un processus de percolation dirigée, où l'état désordonné jouait le rôle de la phase active et se propageait par contamination dans l'état laminaire, qui serait alors similaire à la phase "absorbante", ou "passive". Plusieurs études expérimentales décrivent par conséquent la transition par IST dans le cadre des phénomènes critiques [4, 3, 4, 5, 6, 7], et l'analyse statistique dans cette étude est effectuée dans ce même cadre.

Cette expérience présente un scénario d'intermittence spatio-temporelle observé dans un écoulement confiné entre un disque fixe et un disque tournant. Le paramètre de contrôle de l'expérience est Ω , la vitesse de rotation du disque tournant. La distance h entre les deux disques est assez petite pour que les deux couches limites soient jointes : l'écoulement de base est dit de "Couette de torsion". Par conséquent, des analogies pourraient être faites entre notre expérience, le système de Couette plan [8] et celui de Taylor-Couette à petit gap [9]. Notre dispositif expérimental est le même que celui utilisé par L. Schouveiler [10] et L. Schouveiler et al. [11], qui ont tracé dans l'espace (Ω, h) différentes régions correspondant à l'existence de structures particulières. Ainsi, pour $h = 2.1$ mm, valeur pour laquelle cette étude est effectuée, l'augmentation de Ω fait apparaître une première instabilité sous forme de rouleaux périodiques. Au-delà d'un deuxième seuil se développent les spirales

turbulentes (ST), déjà observées dans des expériences précédentes [12, 13, 14]. Cependant, ces ST n’envahissent pas tout l’écoulement. Leur nombre diminue lorsque Ω est augmenté, et à partir d’un deuxième seuil, des petites structures appelées ”spots” apparaissent. Ces ”spots” coexistent d’abord avec les ST, jusqu’à la valeur de Ω pour laquelle les ST disparaissent. Les spots constitueront le mécanisme de transition vers la turbulence. Cependant, ils ne seront pas étudiés ici.

2 Dispositif expérimental

Le dispositif expérimental est constitué d’une cuve cylindrique remplie d’eau dans laquelle le disque tournant est immergé, et dont le couvercle constitue le disque fixe. Le rayon des deux disques est $R = 140$ mm. La surface supérieure du disque tournant est peinte en noir tandis que le couvercle est en plexiglas, ce qui permet de visualiser l’écoulement par le dessus. Une caméra est en effet disposée dans l’axe des deux disques, à 1 mètre au-dessus du dispositif, et peut tourner à une vitesse de rotation fixée par l’opérateur. L’eau estensemencée de particules anisotropes réfléchissantes (Kalliroscope), dont l’orientation dépend des lignes de courant [15, 16]. Un éclairage adéquat permet ainsi de visualiser les structures qui se développent dans la couche de fluide. La position axiale du disque tournant à l’intérieur de la cuve peut varier continuellement, et h est fixé ici à 2.1 mm. Le paramètre de contrôle est la vitesse de rotation du disque tournant Ω , pouvant varier de 0 à 200 trs/min.

Pour cette valeur de h , les spirales turbulentes apparaissent à $\Omega = 42$ trs/min et disparaissent à $\Omega = 74$ trs/min. Cet intervalle est entièrement exploré en augmentant Ω par pas de 2 trs/min, et en rediminuant ce paramètre de la même façon. Aucune hysteresis n’a été observée. Pour chaque valeur de Ω , la vitesse de rotation de la caméra est ajustée de manière à se placer dans le référentiel des spirales turbulentes. On effectue alors des diagrammes spatiotemporels sur des cercles de rayon $0.8R$ avec une fréquence de 25 Hz. Les domaines turbulents y apparaissent sombres à cause du mouvement désordonné des particules les caractérisant, alors que les domaines laminaires apparaissent en clair. Une binarisation de ces diagrammes spatiotemporels est finalement effectuée afin d’extraire les caractéristiques voulues.

3 Description des spirales turbulentes

La figure 1(a) montre une visualisation de l’écoulement au seuil de l’apparition des spirales turbulentes. Elles sont d’angle positif et espacées presque régulièrement sur une circonférence du disque. Cette quasi-périodisation rappelle l’hélice turbulente périodiquement organisée dans le système de Taylor-Couette [9]. Les images déroulées du disque (Figs. 1(b) et 2(b)) permettent de déterminer pour chaque Ω , leur nombre N et leur angle par rapport à la direction azimuthale (Figs. 3), ainsi que le nombre de Reynolds critique auquel elles apparaissent. L’évolution de N avec Ω est présenté sur la Fig. 3(b) : d’une valeur maximale autour de 10 à $\Omega = 53$ trs/min, ce nombre décroît jusqu’à 0 pour $\Omega = 74$ trs/min.

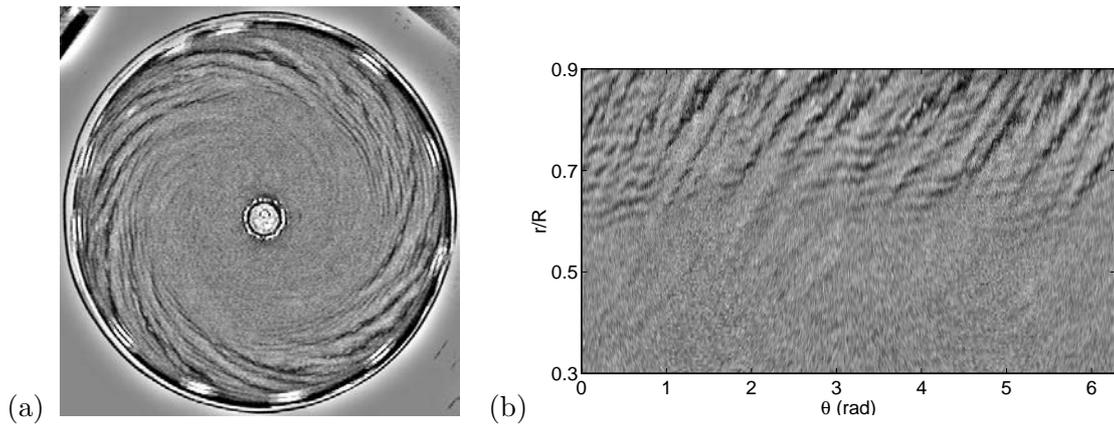


FIG. 1 – (a) Spirales turbulentes pour $h = 1.8$ mm et $\Omega = 54$ trs/min. La rotation du disque se fait dans le sens antitrigonométrique. (b) Image déroulée.

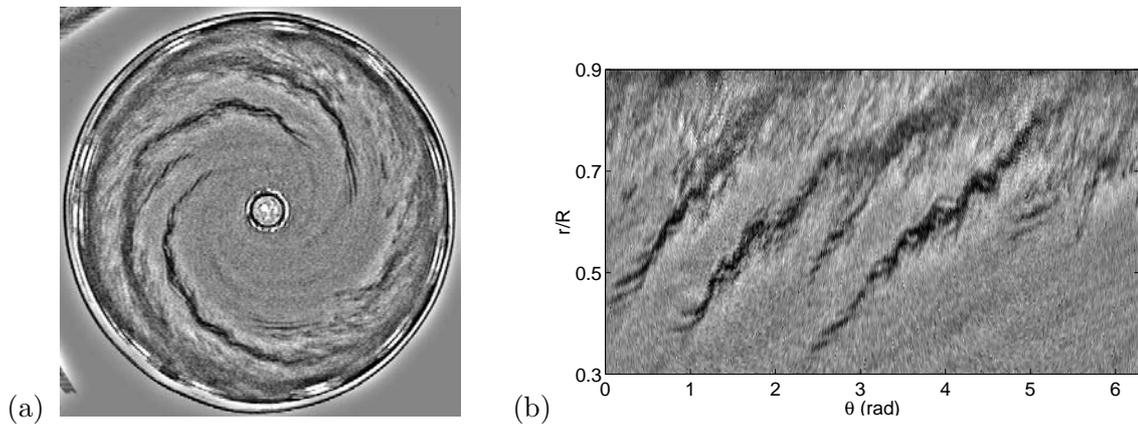


FIG. 2 – (a) Spirales turbulentes pour $h = 1.8$ mm et $\Omega = 98$ trs/min. (b) Image déroulée.

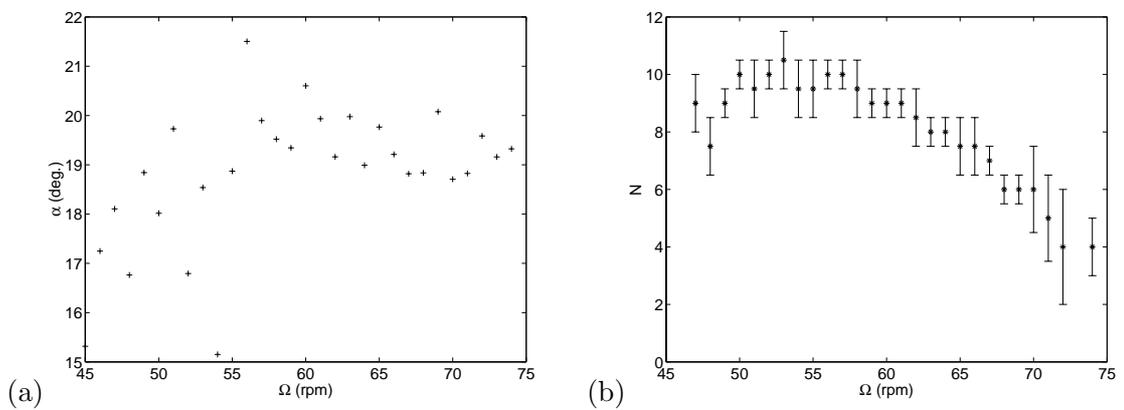


FIG. 3 – (a) Angle des spirales turbulentes. (b) Nombre moyen des spirales turbulentes en fonction de Ω .

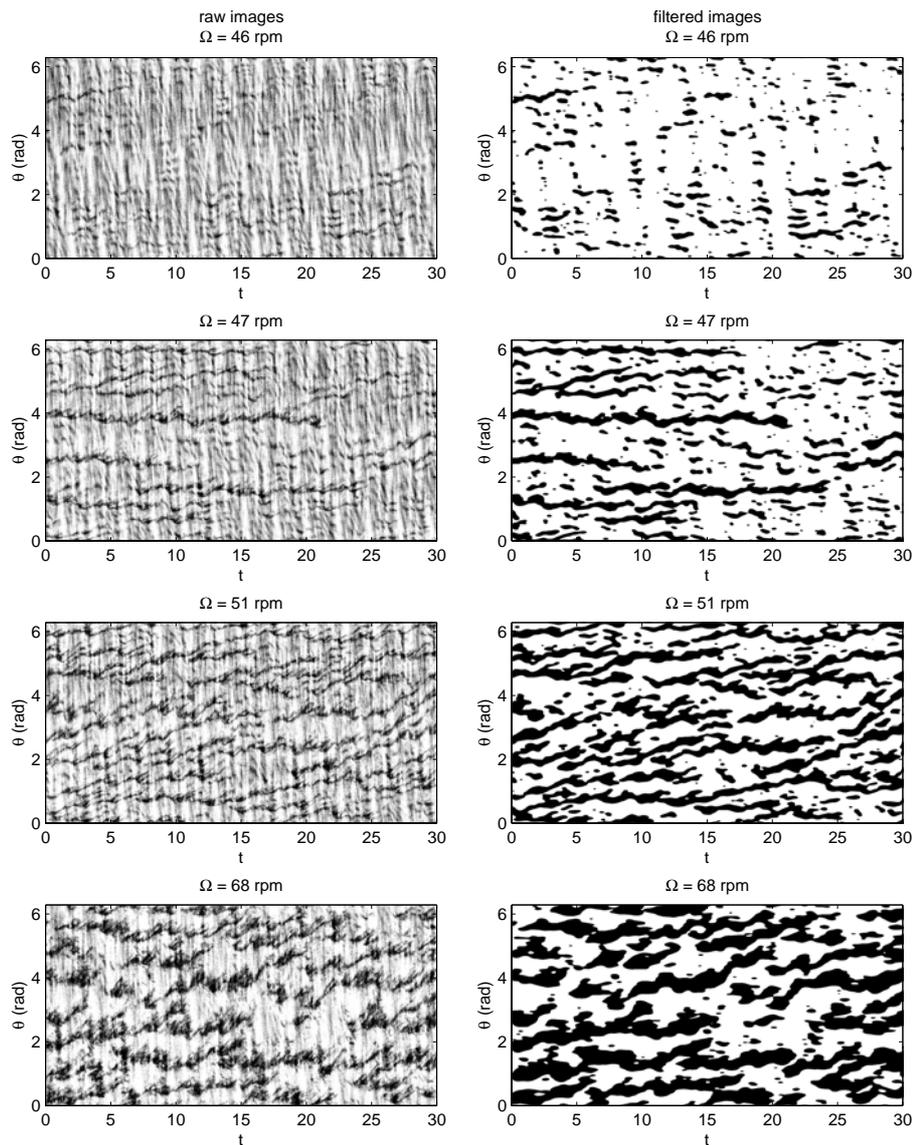


FIG. 4 – Diagrammes spatiotemporels effectués sur des cercles pour différentes valeurs de Ω . En abscisse, le temps est en nombre de tours, en ordonnée, la coordonnée spatiale est en radians.

4 Analyse statistique

L'analyse statistique de l'intermittence spatiotemporelle présentée ici est effectuée à partir des diagrammes spatiotemporels binarisés de la Fig. 4. Comme expliqué précédemment, les bandes noires représentent les régions turbulentes dans leur référentiel de rotation. On remarque des naissances, des extinctions et des arborescences qui contribuent au caractère aléatoire de la dynamique des TS. L'évolution de la fraction turbulente F_t avec Ω est présentée sur la Fig. 5. On observe qu'elle sature à une valeur proche de 0.45, alors qu'une transition complète vers la turbulence donnerait une valeur finale $F_t = 1$. En approximant la partie croissante de la courbe par une loi algébrique du type $F_t = (\Omega - \Omega_0)^\beta$, on trouve

un seuil $\Omega_0 = 45.7 \pm 0.1$ trs/min et un exposant $\beta = 0.30 \pm 0.01$, valeur déjà trouvée dans la convection de Rayleigh-Bénard [4]. La statistique sur la taille des domaines laminaires donne accès à une longueur caractéristique (Fig. 6(a)), dont l'évolution avec Ω sur sa partie décroissante correspond à une loi du type $L_c = (\Omega - \Omega_0)^{-\alpha_s}$, avec $\alpha_s = 0.53 \pm 0.05$ (Fig. 6(b)). Cette valeur est en accord avec la divergence critique d'une longueur caractéristique d'une transition de phase du second ordre.

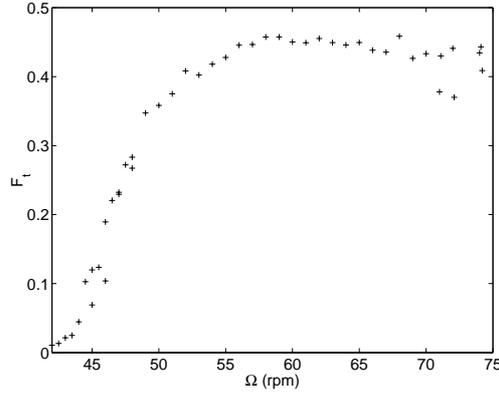


FIG. 5 – Evolution de la fraction turbulente en fonction de Ω .

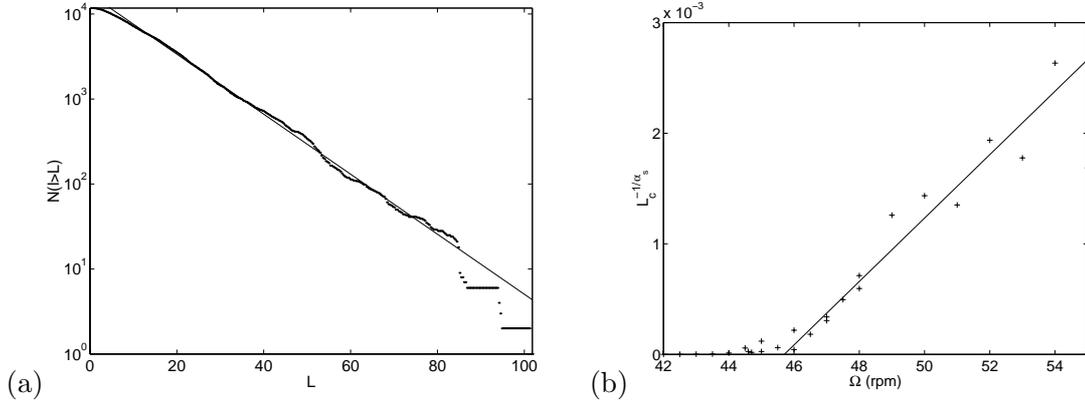


FIG. 6 – (a) Histogramme cumulé en représentation lin-log de la taille des domaines laminaires pour $\Omega = 61$ trs/min. Les longueurs sont en unité de h . La droite correspond à une loi du type $N(l > L) \sim \exp(-L/L_c)$ où L_c est une longueur caractéristique valant ici $L_c(\Omega = 61 \text{ trs/min}) = 36.2h$, soit un dixième de la circonférence. (b) Divergence critique de la longueur caractéristique d'exposant $\alpha_s = 0.53 \pm 0.05$.

5 Conclusion

Dans ce travail, nous avons étudié un processus d'intermittence spatio-temporelle observée dans un écoulement entre un disque fixe et un disque tournant. Lorsque l'écoulement de base est de type "Couette de torsion", l'augmentation de la vitesse de rotation Ω du disque tournant fait apparaître tout d'abord des rouleaux périodiques dans la couche de

fluide ; puis des spirales turbulentes se développent pour de plus grands Ω . Elles sont disposées plus ou moins périodiquement autour d'une circonférence, et bien que leur largeur augmente, leur nombre diminue : la fraction turbulente sature à une valeur proche de 0.45. D'autres types de structures très localisées appelées spots envahissent alors l'écoulement complètement. Une description dans le cadre des phénomènes critiques du développement des spirales turbulentes mène à des exposants critiques cohérents avec ceux trouvés dans les autres systèmes présentant le phénomène d'intermittence spatio-temporelle. Malgré cela, aucune dépendance algébrique des tailles des domaines n'est trouvée au voisinage du seuil de la transition. Ce phénomène pourrait être fortement lié à la périodisation des structures, qui est d'ailleurs observée dans d'autres systèmes comme Taylor-Couette [4] et Couette plan.

Références

- [1] Y. Pomeau, *Front motion, metastability and subcritical bifurcations in hydrodynamics*, Physica D **23**, 3 (1986).
- [2] F. Daviaud, M. Bonetti, M. Dubois, *Transition to turbulence via spatiotemporal intermittency in one-dimensional Rayleigh-Bénard convection*, Phys. Rev. A, **42**, 3388 (1990).
- [3] S. Ciliberto, P. Bigazzi, *Spatiotemporal intermittency in Rayleigh-Bénard convection*, Phys. Rev. Lett. **60**, 286 (1988).
- [4] P. W. Colovas, C. D. Andereck, *Turbulent bursting and spatiotemporal intermittency in the counterrotating Taylor-Couette system*, Phys. Rev. E, **55**, 2736 (1997).
- [5] M. M. Degen, I. Mutabazi, C. D. Andereck, *Transition to weak turbulence via spatiotemporal intermittency in the Taylor-Dean system*, Phys. Rev. E, **53**, 3505 (1996).
- [6] S. Michalland, M. Rabaud, Y. Couder, *Transition to chaos by spatiotemporal intermittency in directional viscous fingering*, Europhys. Lett. **22**, 17 (1993).
- [7] H. Willaime, O. Cardoso, P. Tabeling, *Spatiotemporal intermittency in lines of vortices*, Phys. Rev E, **48**, 288 (1993).
- [8] S. Bottin, H. Chaté, *Statistical analysis of the transition to turbulence in plane Couette flow*, Eur. Phys. J. B **6**, 143 (1998).
- [9] A. Prigent, O. Dauchot, *Spiral turbulence in large aspect ratio Taylor-Couette flow*, submitted to Phys. Rev. Lett.
- [10] L. Schouveiler, *Sur les instabilités des écoulements entre un disque fixe et un disque en rotation*, Thèse de doctorat, Université de la Méditerranée Aix-Marseille I et II, France, 1998.
- [11] L. Schouveiler, P. Le Gal, M. P. Chauve, *Instabilities of the flow between a rotating and a stationary disk*, J. Fluid. Mech. **443**, 329 (2001).
- [12] P. I. San'kov, E. M. Smirnov, *Bifurcation and transition to turbulence in the gap between rotating and stationary parallel disks*, Izv. Akad. Nauk SSSR, Mekh. Zhidk. Gaza **5**, 28 (1984) (in English in Fluid. Dyn. **19** (5),695).
- [13] M. Itoh, *Instability and transition of the flow around a rotating disk in a casing*, Toyota Rep. **36**, 28 (1988) (in Japanese).
- [14] A. Sirivat, *Stability experiment of flow between a stationary and a rotating disk*, Phys. Fluids A **3** (11), 2664 (1991).
- [15] G. Gauthier, P. Gondret, M. Rabaud, *Motion of anisotropic particles : application to visualization of three-dimensional flows*, Phys. Fluid, **10**, 2147 (1998).
- [16] Ö. Savas, *On flow visualization using reflective flakes*, J. Fluid. Mech. **152**, 235 (1985).

Calcul de propriétés d'optique non-linéaire dans les cristaux

Clovis Darrigan et Michel Rérat
Laboratoire de Chimie Structurale
IFR rue Jules Ferry, 64000 Pau
clovis.darrigan@univ-pau.fr

Résumé

Après avoir calculé la fonction d'onde tri périodique d'un système cristallin à l'aide d'une méthode *ab initio* LCAO-SCF, nous appliquons la théorie diagrammatique de la perturbation jusqu'à l'ordre 3 afin de déterminer les susceptibilités électriques $\chi^{(n)}$. Ces propriétés d'optique non-linéaires, intrinsèques à un matériau, sont calculées en fonction des fréquences des champs perturbateurs, nous conduisant ainsi à des spectres des parties réelles et imaginaires que nous pouvons ensuite exploiter.

1 Introduction

Lorsqu'une *contrainte*, mécanique, électrique, ou magnétique, est imposée à un système, il se crée de manière naturelle une *réponse* de la part du système, qui dépend de sa structure propre. Les propriétés intrinsèques qui mesurent ces capacités de réponse sont appelées *susceptibilités*. Mathématiquement, il est possible d'exprimer l'intensité de la réponse en fonction de l'intensité de la contrainte comme une série de Taylor et ainsi décomposer un comportement général en comportement à différents ordres : premier ordre, c'est-à-dire *linéaire*, lorsque la réponse est *proportionnelle* à la contrainte (qui reste faible) ; ordres supérieurs, autrement dit *non-linéaires*, si un écart à la linéarité apparaît (en général lorsque la contrainte devient trop importante).

Pour le sujet qui nous concerne en chimie physique, notre système sera un solide cristallin (covalent, ionique ou moléculaire) et la perturbation appliquée sera constituée d'un ou plusieurs champs électriques d'orientation spatiale bien définie. Les propriétés recherchées s'appellent donc des *susceptibilités électriques* et prennent la forme de tenseurs dont les rangs dépendent de l'ordre de perturbation. Les théoriciens disposent d'un grand nombre de modèles permettant de décrire la matière et d'une large palette de logiciels de simulation et de prévision de propriétés. Dans ce domaine, les physiciens et chimistes ne s'intéressent pas toujours aux mêmes observables et ont des visions bien différentes de la matière et des structures électroniques : description par des ondes planes pour les premiers, ou par des fonctions au caractère localisé pour les seconds.

En tant que chimistes théoriciens, nous cherchons à appliquer nos méthodologies quantiques au calcul de propriétés électriques et optiques de la physique expérimentale.

Nous présenterons très succinctement par quel moyen nous obtenons les fonctions d'ondes de nos systèmes cristallins et quelles sont les observables usuelles que nous pouvons en tirer. Nous développerons ensuite brièvement notre méthode de calcul de susceptibilités électriques, pour les ordres 1, 2 et 3 de perturbation.

2 Calcul de la fonction d'onde

Il s'agit de la première étape que nous devons réaliser avant de pouvoir calculer les propriétés. Cette étape doit être réalisée le plus finement possible, puisque du choix des paramètres de calcul de la fonction d'onde dépendra la qualité des propriétés calculées.

2.1 Une vision par les chimistes

Pour les chimistes de l'état gazeux (molécule ou atome), les fonctions de base qui servent à paver l'espace d'occupation des électrons sont des fonctions centrées sur les noyaux atomiques, au caractère relativement localisé : en général des gaussiennes (nommées GTF pour *Gaussian Type Function*) de la forme

$$g(\mathbf{r}) = x^{n_x} y^{n_y} z^{n_z} e^{-\alpha r^2} \quad (14)$$

dont l'exposant α détermine le caractère plus ou moins diffus de partie radiale et dont le triplet (n_x, n_y, n_z) détermine la symétrie angulaire (*s, p, d, f, etc.*).

Pour décrire l'état solide, nous pouvons utiliser les mêmes logiciels que ceux adaptés à l'étude de l'état moléculaire en construisant des agrégats (*clusters*) de taille variable. Le comportement de ces agrégats tend asymptotiquement, en général, vers celui de l'état cristallin infini. Mais à cause de la lourdeur des calculs et des effets de bords, d'autres outils théoriques, mieux adaptés, doivent être utilisés.

Le code CRYSTAL [1], que nous utilisons depuis plusieurs années, décrit la matière cristalline d'une manière radicalement différente puisqu'il prend en compte, au coeur même de sa conception, le caractère infini et tripériodique si caractéristique de ce type de solide. Ce sont les conditions de Born et von Karman (BVK) qui permettent de traiter le caractère infini du système de manière finie, par cyclisation. Ce traitement tripériodique impose de travailler dans l'espace réciproque, avec un échantillonnage de cet espace en un nombre fini de points (vecteurs) \mathbf{k} appartenant à la zone irréductible de Brillouin (IBZ). Dans cet espace, la matrice de Fock (hamiltonien) est diagonale par blocs (un bloc par point \mathbf{k}), les diagonalisations sont grandement simplifiées et les temps de calcul sont réduits d'autant.

Le chimiste doit alors définir le groupe d'espace (symétrie) du cristal, les dimensions de la cellule de base, et la position des atomes à l'intérieur de cette cellule. Vient ensuite le calcul de la fonction d'onde proprement dit, qui revient à résoudre l'équation de Schrödinger du système. Une méthode *ab initio* de champ autocohérent (SCF pour *Self Consistent Field*) est utilisée, soit en utilisant les équations de Hartree-Fock (HF), soit en utilisant les équations de Kohn-Sham (KS, théorie de la fonctionnelle de la densité, DFT). Les orbitales moléculaires (OM) sont construites comme une combinaison linéaire des OA (LCAO pour *Linear Combination of Atomic Orbitals*). Les coefficients de cette combinaison (vecteurs propres) ainsi que les énergies ϵ_i de ces OM sont obtenus par diagonalisation de la matrice représentative du hamiltonien du système. La contrainte d'orthonormalisation des OM est appliquée et la résolution s'effectue de manière itérative jusqu'à ce que l'énergie totale du système atteigne un minimum (variation d'un cycle à l'autre inférieure à une tolérance donnée).

2.2 Les observables

La première observable que l'on peut extraire de la fonction d'onde est la densité électronique ρ en chaque point du cristal, qui respecte la symétrie translationnelle (périodicité) du cristal. Nous pouvons ainsi tracer des cartes de densité électronique dans un plan donné. En intégrant la densité électronique dans un volume fermé correspondant à un atome, nous atteignons la charge atomique absolue (moment monopolaire q) et, par soustraction de la charge électronique de l'atome neutre isolé, nous calculons l'excès ou le défaut en électron. Les moments dipolaire μ , quadripolaire θ , etc, peuvent être calculés, donnant la possibilité d'analyses plus fines. Le caractère ionique ou covalent d'une structure peut ainsi être déterminé. La transformée de Fourier de la densité nous amène aux facteurs de structure, que l'on peut comparer aux mesures effectuées en diffraction des rayons X. La dérivée première de la densité électronique nous conduit au champ électrique microscopique local. La dérivée seconde, conformément à la loi de Poisson, donne le potentiel électrique microscopique local.

Une autre propriété que nous pouvons atteindre est le profil Compton (ou distribution du moment des électrons), qui nous renseigne sur la répartition énergétique des électrons du système.

En étudiant la variation d'énergie totale en fonction des paramètres de maille, nous pouvons facilement obtenir des renseignements *mécaniques* tels que le *Bulk Modulus* ou le tenseur d'élasticité. La modification du champ électrique en fonction du déplacement des atomes au sein de la cellule peut nous conduire aux constantes piézoélectriques.

Les observables courantes sont nombreuses mais nous n'en dirons pas plus. En revanche, il est possible d'utiliser la fonction d'onde électronique pour calculer de nombreuses propriétés électriques et optiques à l'aide du logiciel PauPol que nous avons élaboré au laboratoire et en collaboration avec le CEA (Le Ripault) durant ces dernières années. C'est le but même du présent article, puisque nous allons pouvoir calculer les susceptibilités électriques qui sont à la base des phénomènes d'optique linéaire et non-linéaire.

3 Calcul des susceptibilités électriques

Considérons une molécule et développons le moment dipolaire microscopique total μ en fonction de l'amplitude d'un champ électrique \mathbf{F} appliqué au système

$$\mu(\mathbf{F}) = \mu_0 + \mu_i(\mathbf{F}) = \mu_0 + \alpha\mathbf{F} + \frac{1}{2!}\beta\mathbf{F}^2 + \frac{1}{3!}\gamma\mathbf{F}^3 + \dots + \frac{1}{n!}\xi\mathbf{F}^n \quad (15)$$

où μ_0 est le moment dipolaire permanent et $\mu_i(\mathbf{F})$ le moment dipolaire induit par le champ électrique, dont l'expression est L'énergie du système isolé E_0 doit être stabilisée par l'interaction entre le champ et le moment dipolaire, d'où l'énergie du système perturbé

$$E(\mathbf{F}) = E_0 - \mu(\mathbf{F})\mathbf{F} = E_0 - \mu_0\mathbf{F} - \alpha\mathbf{F}^2 - \frac{1}{2!}\beta\mathbf{F}^3 - \frac{1}{3!}\gamma\mathbf{F}^4 - \dots - \frac{1}{n!}\xi\mathbf{F}^{n+1} \quad (16)$$

Dans cette expression, nous avons volontairement omis les termes d'interaction entre le champ et les moments multipolaires d'ordres supérieurs, ainsi que les interactions impliquant le gradient du champ électrique [2]. Les tenseurs α , β , γ , etc, sont appelés respectivement polarisabilité, première hyperpolarisabilité, deuxième hyperpolarisabilité, etc.

Pour un solide, le moment dipolaire macroscopique porte le nom de polarisation \mathbf{P} et peut aussi se développer selon une série que l'on a l'habitude d'écrire

$$\mathbf{P}(\mathbf{F}) = \mathbf{P}_0 + \chi^{(1)}\mathbf{F} + \chi^{(2)}\mathbf{F}^2 + \chi^{(3)}\mathbf{F}^3 + \dots + \chi^{(n)}\mathbf{F}^n \quad (17)$$

où, cette fois-ci, les $\chi^{(n)}$ sont les tenseurs appelés susceptibilités d'ordre n et sont directement reliées aux grandeurs microscopiques précédentes. \mathbf{P}_0 est la polarisation permanente.

Or, le champ électrique \mathbf{F} n'est pas forcément statique mais peut être dynamique, c'est-à-dire dépendant du temps. C'est le cas par exemple pour un photon d'énergie

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = hc\bar{\nu} = \frac{h\omega}{2\pi} \quad (18)$$

où ν est la fréquence, λ la longueur d'onde, $\bar{\nu}$ le nombre d'onde et ω la pulsation. (Selon le domaine du spectre électromagnétique, les physico-chimistes préfèrent utiliser l'une ou l'autre de ces variables.) Ainsi, le champ électrique dynamique d'un photon peut s'écrire

$$\mathbf{F}(t) = \mathbf{F}_0 \cos(\omega t) \quad (19)$$

où \mathbf{F}_0 est le vecteur d'amplitude maximale. Introduisons $\mathbf{F}(t)$ dans l'équation (4)

$$\mathbf{P}(\mathbf{F}) = \mathbf{P}_0 + \chi^{(1)}\mathbf{F}_0 \cos(\omega t) + \chi^{(2)}\mathbf{F}_0^2 \cos^2(\omega t) + \chi^{(3)}\mathbf{F}_0^3 \cos^3(\omega t) + \dots \quad (20)$$

Développons (7) pour faire apparaître les termes en $\cos(2\omega t)$ et $\cos(3\omega t)$

$$\mathbf{P}(\mathbf{F}) = \mathbf{P}_0 + \frac{1}{2}\chi^{(2)}\mathbf{F}_0^2 + (\chi^{(1)} + \frac{3}{4}\chi^{(3)}\mathbf{F}_0^2)\mathbf{F}_0 \cos(\omega t) + \frac{1}{2}\chi^{(2)}\mathbf{F}_0^2 \cos(2\omega t) + \frac{1}{4}\chi^{(3)}\mathbf{F}_0^4 \cos(3\omega t) + \dots \quad (21)$$

Dans cette expression, nous voyons apparaître de manière évidente la création de champs aux harmoniques 2ω et 3ω , un champ statique d'amplitude proportionnelle à $\chi^{(2)}\mathbf{F}_0^2$ ainsi qu'une correction de l'indice de réfraction (relié à $\chi^{(1)}$) par $\chi^{(3)}\mathbf{F}_0^2$. Ces phénomènes sont typiquement ceux que l'on s'attend à observer expérimentalement avec des matériaux aux propriétés d'optique non-linéaire. Ces effets (respectivement SHG, THG, OR, IDRI) sont explicités en fin d'article.

Ainsi, nous voyons qu'il est indispensable de connaître les différents tenseurs si l'on veut pouvoir prédire les caractéristiques non-linéaires d'un matériau. Une des manières consiste à utiliser la *théorie diagrammatique de perturbation* [3, 4, 5]: méthode *Sum Over States* (SOS). Nous donnons simplement pour les différents ordres les formules permettant de calculer les composantes de ces tenseurs. Dans ces expressions, on note :

- $\Omega(\mathbf{k})$ le poids géométrique associé au point \mathbf{k} (dans la IBZ)
- V_m le volume de la maille élémentaire du cristal
- Ω_{mg} la pulsation (\propto énergie) de transition entre l'état fondamental $|g\rangle$ et un état excité $|m\rangle$, soit

$$\Omega_{mg} = \Omega_m - \Omega_g = \omega_m - i\frac{\Gamma_m}{2} - \omega_g \quad (22)$$

où Γ_m est l'inverse du temps de vie radiatif de l'état $|m\rangle$

- $\omega_\sigma = \omega_1 + \dots + \omega_n$ la pulsation de la réponse et ω_n les pulsations des champs perturbateurs
- i la composante de la réponse et j, k, ℓ les composantes des champs perturbateurs (pouvant valoir x, y ou z)
- $\hat{P}_{-\sigma,1,\dots,3}$ l'opérateur qui prend la moyenne de toutes les permutations des couples $\{\omega_\sigma, i\}, \{\omega_1, j\}, \dots, \{\omega_3, \ell\}$...

3.1 Ordre 1 : tenseur $\chi^{(1)}$ de rang 2 (9 composantes)

$$\chi_{ij}^{(1)}(-\omega_\sigma; \omega_1) = \frac{1}{V_m} \sum_{\mathbf{k} \in IBZ} \Omega(\mathbf{k}) \alpha_{ij}^{\mathbf{k}}(-\omega_\sigma; \omega_1) \quad (23)$$

avec la polarisabilité

$$\alpha_{ij}^{\mathbf{k}}(-\omega_\sigma; \omega_1) = \frac{1}{\hbar} 2\hat{P}_{-\sigma,1} \sum_{m \neq g} \left\{ \frac{\langle g|i|m\rangle \langle m|j|g\rangle}{(\Omega_{mg} - \omega_\sigma)} \right\} \quad (24)$$

3.2 Ordre 2 : tenseur $\chi^{(2)}$ de rang 3 (27 composantes)

$$\chi_{ijk}^{(2)}(-\omega_\sigma; \omega_1, \omega_2) = \frac{1}{V_m} \sum_{\mathbf{k} \in IBZ} \Omega(\mathbf{k}) \beta_{ijk}^{\mathbf{k}}(-\omega_\sigma; \omega_1, \omega_2) \quad (25)$$

avec la première hyperpolarisabilité

$$\beta_{ijk}^{\mathbf{k}}(-\omega_\sigma; \omega_1, \omega_2) = \frac{1}{\hbar^2} 3K(-\omega_\sigma; \omega_1, \omega_2) \hat{P}_{-\sigma,1,2} \sum_{m \neq g} \sum_{n \neq g} \left\{ \frac{\langle g|i|m\rangle \overline{\langle m|k|n\rangle} \langle n|j|g\rangle}{(\Omega_{mg} - \omega_\sigma)(\Omega_{ng} - \omega_1)} \right\} \quad (26)$$

La notation $\overline{\langle m|k|n\rangle}$ signifie une correction dipolaire de l'état fondamental $|g\rangle$ lorsque $|m\rangle$ et $|n\rangle$ sont identiques

$$\overline{\langle m|k|n\rangle} = \langle m|k|n\rangle - \langle g|k|g\rangle \delta_{mn} \quad (27)$$

La constante $K(-\omega_\sigma; \omega_1, \omega_2)$ dépend de l'effet calculé [3, 5].

3.3 Ordre 3 : tenseur $\chi^{(3)}$ de rang 4 (81 composantes)

$$\chi_{ijkl}^{(3)}(-\omega_\sigma; \omega_1, \omega_2, \omega_3) = \frac{1}{V_m} \sum_{\mathbf{k} \in IBZ} \Omega(\mathbf{k}) \gamma_{ijkl}^{\mathbf{k}}(-\omega_\sigma; \omega_1, \omega_2, \omega_3) \quad (28)$$

avec la deuxième hyperpolarisabilité

$$\gamma_{ijkl}^{\mathbf{k}}(-\omega_\sigma; \omega_1, \omega_2, \omega_3) = \frac{1}{\hbar^3} 4K(-\omega_\sigma; \omega_1, \omega_2, \omega_3) \hat{P}_{-\sigma,1,2,3} [t_3 - t_2] \quad (29)$$

avec

$$t_3 = \sum_{m \neq g} \sum_{n \neq g} \sum_{p \neq g} \left\{ \frac{\langle g|i|m\rangle \overline{\langle m|\ell|n\rangle} \overline{\langle n|k|p\rangle} \langle p|j|g\rangle}{(\Omega_{mg} - \omega_\sigma)(\Omega_{ng} - (\omega_1 + \omega_2))(\Omega_{pg} - \omega_1)} \right\} \quad (30)$$

$$t_2 = \sum_{m \neq g} \sum_{p \neq g} \left\{ \frac{\langle g|i|m\rangle \langle m|\ell|g\rangle \langle g|k|p\rangle \langle p|j|g\rangle}{(\Omega_{mg} - \omega_\sigma)(\Omega_{mg} - \omega_3)(\Omega_{pg} - \omega_1)} \right\} \quad (31)$$

La constante $K(-\omega_\sigma; \omega_1, \omega_2, \omega_3)$ dépend de l'effet calculé [3, 5].

4 Conclusion

Si la fonction d'onde du cristal est connue, l'application de ces formules, au travers du logiciel PauPol permet d'obtenir les composantes (parties réelles et imaginaires) de ces différents tenseurs en fonction des fréquences des champs (tracé de spectres). Selon la symétrie du système, de nombreuses composantes peuvent être nulles ou liées les unes aux autres.

Parmi les effet calculables de $\chi^{(2)}$, nous pouvons citer :

- $\chi^{(2)}(0; -\omega, \omega)$ *Optical Rectification (OR)*
- $\chi^{(2)}(-\omega; 0, \omega)$ *Electro-Optic Pöckel effect (EOPE)*
- $\chi^{(2)}(-2\omega; \omega, \omega)$ *Second Harmonic Generation (SHG)*
- $\chi^{(2)}(-\omega_1 - \omega_2; \omega_1, \omega_2)$ *General Three Wave Mixing (G3WM)*

Pour les effets de $\chi^{(3)}$, les plus courants sont :

- $\chi^{(3)}(-\omega; 0, 0, \omega)$ *Optical Kerr Effect (OKE)*
- $\chi^{(3)}(-2\omega; 0, \omega, \omega)$ *DC-induced SHG (DC-SHG)*
- $\chi^{(3)}(-\omega; \omega, \omega, -\omega)$ *Intensity Dependent Refractive Index (IDRI), Degenerate Four Wave Mixing (D4WM), Self-focusing/Self-phase/Cross-phase modulation, Self-induced/Cross-induced birefringence*
- $\chi^{(3)}(-3\omega; \omega, \omega, \omega)$ *Third Harmonic Generation (THG)*
- $\chi^{(3)}(-\omega_1; \omega_1, -\omega_2, \omega_2)$ *Two Photon Absorption (TPA)*
- $\chi^{(3)}(-\omega_1 - \omega_2 - \omega_3; \omega_1, \omega_2, \omega_3)$ *General Four Wave Mixing (G4WM)*

Deux applications numériques [5] sont montrées sur le poster.

Références

- [1] V.R. Saunders, R. Dovesi, C. Roetti, M. Causà, N.M. Harrison, R. Orlando, C.M. Zicovich-Wilson, *CRYSTAL98 User's Manual*, University of Torino, Torino, 1998.
- [2] D.M. Bishop, *Molecular vibrational and rotational motion in static and dynamic electric fields*, *Reviews of Modern Physics*, **62**, 2 (1990).
- [3] J.F. Ward, *Calculation of Nonlinear Optical Susceptibilities Using Diagrammatic Perturbation Theory*, *Reviews of Modern Physics*, **37**, 1 (1965).
- [4] M. Rérat, W.-D. Cheng, R. Pandey, *First-principles calculations of nonlinear optical susceptibility of inorganic materials*, *Journal of Physics: Condensed Matter*, **13** (2001).
- [5] C. Darrigan, *Calcul quantique de susceptibilités électriques dans les solides cristallins*, thèse, Université de Pau et des Pays de l'Adour, 2001.

Études théoriques de chaos sur le Laser à Électrons libres de Super-ACO

M.E. Couprie^{1,2}, G. De Ninno^{1,2}, D. Fanelli³, D. Garzella^{1,2}

1) LURE, Bât. 209D, Université Paris Sud, BP34, 91 898 Orsay cedex, France

2) CEA-SPAM, bat 522, 91191 Gif-sur-Yvette, France

3) NADA, KTH, SE10044 Stockholm, Sweden

marie-emmanuelle.couprie@lure.u-psud.fr

Résumé

Des études théoriques de chaos menées sur le laser à électrons libres (LEL) installé sur l'anneau de stockage Super-ACO (Orsay) sont présentées. Le modèle présenté ici permet d'étudier le comportement du laser en réponse à une modulation de gain extérieure (modulation de l'accord longitudinal entre l'onde optique et les paquets d'électrons). L'analyse théorique permet de reproduire les résultats expérimentaux du LEL de Super-ACO.

1 Introduction

1.1 Principe

Un laser à électrons libres résulte de l'interaction entre un faisceau d'électrons relativistes d'énergie normalisée γ et une onde optique [1]. Les électrons circulant dans un champ magnétique permanent sinusoïdal dans le plan vertical, d'amplitude B_0 et de période λ_0 subissent une courbure de trajectoire dans le plan horizontal. Ils émettent alors du rayonnement synchrotron à la longueur d'onde λ et à ses harmoniques selon :

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{2\gamma^2} \left(1 + \frac{K^2}{2} \right) \quad (32)$$

K , le paramètre de déflexion de l'onduleur, vaut $K = 0.94 \lambda_0 B_0$. Lorsque ce rayonnement spontané est stocké dans une cavité optique permettant une interaction entre l'onde lumineuse et le paquet d'électrons, l'onde de lumière peut, sous certaines conditions, être amplifiée au détriment de l'énergie cinétique des électrons. La longueur de la cavité optique est choisie de façon à être un sous-multiple de la circonférence de l'anneau, afin d'assurer le recouvrement temporel des impulsions de lumière et des paquets d'électrons à chaque passage dans le milieu amplificateur. Un LEL est donc continuellement accordable par simple modification du champ magnétique de l'onduleur, la gamme spectrale couverte étant déterminée par l'énergie des électrons relativistes, elle-même conditionnée par l'accélérateur choisi. Les LELs sur anneaux de stockage, dont l'énergie se situe typiquement entre 0.5 et 1.5 GeV (0.8 GeV à Super-ACO), couvrent le domaine Ultra-Violet et Ultra-Violet à vide (600-300 nm à Super-ACO). Le gain du système est proportionnel à la densité électronique du paquet d'électrons, inversement proportionnel au cube de l'énergie des électrons relativistes et il dépend de la longueur d'interaction. En général, on emploie pour un LEL sur anneau de stockage un système modifié d'onduleur, appelé klystron optique. L'émission du klystron optique résulte de l'interférence du rayonnement des deux onduleurs [2] [3], et conduit à un gain plus élevé pour des longueurs disponibles

limitées. L'équivalent du contraste de franges est ici donné par le taux de modulation du klystron optique, qui vaut : $f = f_0 e^{-8\pi^2(N+N_d)^2\sigma_\gamma^2}$, où f_0 est une constante, N désigne le nombre de périodes de l'onduleur, N_d l'ordre d'interférence du à la section dispersive, σ_γ la dispersion en énergie du faisceau d'électrons (i.e. l'écart quadratique moyen de la distribution en énergie des électrons). Sur anneau de stockage, la dispersion en énergie et la longueur temporelle du paquet d'électrons sont en général proportionnelles [4]. Lorsque le LEL fonctionne avec un klystron optique, le gain est lui-même proportionnel au taux de modulation f . Lorsque l'onde de lumière est amplifiée au détriment de l'énergie cinétique des électrons, la dispersion en énergie augmente ("chauffage" du paquet induit par le laser), le taux de modulation diminue, le gain baisse alors et atteint le niveau des pertes du résonateur optique, conduisant à la saturation du laser.

1.2 Caractéristiques des LELs sur anneau de stockage (AS).

Le laser est composé d'une série de micro-impulsions séparées par la période de révolution. La première oscillation sur AS sur ACO en 1983 présentait une structure macro-temporelle à l'échelle de la milliseconde, qui n'avait pas été prévue [5]. Peu après, elle fut expliquée [6] par une théorie rendant compte de la croissance de l'intensité laser et de la saturation par augmentation de dispersion en énergie. Puis, l'oscillation laser sur Super-ACO en 1989 a montré que le laser était "cw" pour la synchronisation parfaite [7]. Une analyse plus fine de la structure temporelle a montré que des régimes pulsés se produisaient systématiquement pour certaines conditions de synchronisation entre les électrons circulant dans l'anneau et les impulsions de lumière stockées dans la cavité optique. La courbe d'accord présente toujours la même allure, avec ses deux zones pulsées de part et d'autre de la zone centrale "cw" [8]. Le paramètre d'accord Δ est défini par : $\Delta = T_{el} - T_{ph}$, T_{el} désignant le temps de révolution des électrons, et T_{ph} le temps d'aller-et-retour des photons dans la cavité optique. [9].

2 Modélisation d'un Laser à Électrons Libres sur AS

Nous présentons ici un modèle temporel d'onde monochromatique de LEL sur anneau de stockage, qui permet de décrire différents comportements temporels du laser.

2.1 Présentation du modèle.

L'émission spontanée i_s est assimilée à une onde monochromatique et l'onde optique à un pic de Dirac centré sur la longueur d'onde de résonance donnée par l'équation (32). Le modèle suit passage par passage l'évolution de l'intensité laser : terme de gain $g(t)$ conduisant à l'amplification, réflexion sur les mirrors de réflectivité R et addition de l'émission spontanée à chaque passage. Il vient [9]:

$$y_{n+1}(\tau) = R^2 y_n(\tau - \Delta)[1 + g_n(\tau)] + i_s(\tau), \quad (33)$$

y_n représentant le profil longitudinal de la micro-impulsion laser. L'intensité laser au passage n est donnée par $I_n = (\frac{1}{I_e}) \int y(\tau) d\tau$ où I_e est définie comme l'intensité à l'équilibre. La dispersion en énergie normalisée au passage n du paquet d'électrons évolue comme:

$$\Sigma_{n+1} = \Sigma_n + \frac{2 T_{el}}{\tau_s} (I_n - \Sigma_n) \quad (34)$$

où τ_s désigne le taux d' amortissement synchrotron, temps caractéristique d' amortissement des oscillations longitudinales du paquet d' électrons (8.5 ms à Super-ACO), et $\Sigma_n = \left(\frac{\sigma_{\gamma_n}^2 - \sigma_{\gamma_{off}}^2}{\sigma_{\gamma_{eq}}^2 - \sigma_{\gamma_{off}}^2} \right)$, σ_{γ_n} étant la dispersion en énergie au passage n , $\sigma_{\gamma_{off}}$ celle en absence de laser et $\sigma_{\gamma_{eq}}$ celle correspondant au laser à l' équilibre ($\Sigma = I = 1$). Ces équations représentent l' augmentation d' intensité laser et de dispersion en énergie qui en résulte, correspondant au processus de saturation par "chauffage du paquet", permettant aussi de déterminer la puissance laser moyenne, selon la "Limite de Renieri" [10]. En assimilant la distribution des électrons à une gaussienne d' écart quadratique moyen σ_l , la distribution temporelle du gain $g(\tau)$ peut donc s' écrire en fonction du gain maximum g_0 selon : $g(\tau) = g_0 e^{-\frac{\tau^2}{2\sigma_{ln,\tau}^2}}$ La saturation du laser résulte de la combinaison du chauffage du paquet et du désaccord du laser, conduisant à une réduction de gain jusqu' au niveau des pertes P , selon :

$$g_{n,0} = g_{off} \left(\frac{\sigma_{\gamma_{off}}}{\sigma_{\gamma_n}} \right) \left(\frac{P\sigma_{\gamma_{eq}}}{g_{off}\sigma_{\gamma_{off}}} \right)^{\Sigma_{\gamma_n}} \tag{35}$$

2.2 Structure macrotemporelle

À la synchronisation parfaite, l' intensité laser "cw" et la dispersion en énergie normalisées valent à saturation $I = 1$ et $\Sigma = 1$. Pour de faibles perturbations de cet état d' équilibre $\Delta I = I + 1$ et $\Delta \Sigma = 1 + \sigma$, l' évolution de l' intensité laser résultant de (33) et de l' équation intégrale par passage est $\frac{dI}{dt} = I \left(\frac{g-P}{T_{el}} \right)$ qui, combinée à (34) , conduit à un système d' équations, pouvant être linéarisé par une équation différentielle linéaire du second ordre $\frac{d^2\sigma}{dt^2} - \frac{2}{\tau_s} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{2}{\tau_s\tau_0} = 0$ où τ_0 désigne le temps de montée du laser $\tau_0 = \frac{T_{ph}}{g-P}$. La solution générale de cette équation est de type oscillatoire amorti avec un temps caractéristique d' amortissement τ_s et une fréquence $F_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{\tau_0\tau_s}}$. La réponse amplitude - phase, schématisée sur la fig. 1 [11], montre que toute perturbation autour de cette fréquence entraînant une instabilité sur le gain peut produire une oscillation importante de l' intensité du laser, de type périodique stable ou instable, donnant une structure dite macro-temporelle pulsée à l' échelle de la milliseconde (environ 3 ms). Par exemple, la fréquence naturelle du laser sur Super-ACO se situe autour de 300 Hz, ce qui correspond à l' harmonique 6 de la fréquence du secteur et rend toujours très probable la présence de ce type de perturbations.

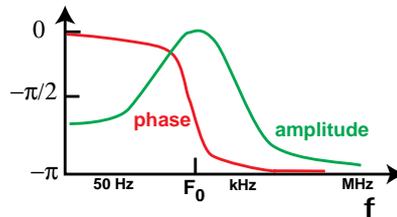


FIG. 1 – Réponse phase-amplitude du LEL de Super-ACO

2.3 Effet du désaccord

Selon l'accord et les valeurs relatives de τ_0 et τ_s , la réponse du laser peut conduire à un oscillateur amorti conduisant à un régime "cw" ou à un régime d'oscillations de relaxation (correspondant aux zones pulsées). Dans le cas d'un laser désaccordé, la dispersion en énergie induite par le chauffage du paquet est moindre. L'émission stockée interagit avec un endroit différent de la distribution de densité électronique d'un passage à l'autre dans la cavité optique, (glissement des électrons par rapport aux photons stockés) et le gain est de plus en plus faible. Ainsi, le laser se stabilise sur une position différente du maximum de densité électronique telle que le système sature, sans nécessiter de grosse augmentation de dispersion en énergie. Les simulations numériques font apparaître les zones pulsées du laser pour des désaccords intermédiaires. Plus précisément, la période de la structure pulsée du laser dépend elle-même du désaccord [12].

3 Modélisation du chaos

3.1 Présentation du modèle

Une modulation externe de la condition de synchronisation est ajoutée au modèle précédent, par $\delta = a \sin(2\pi ft) + b$, avec t le temps, f la fréquence de la modulation appliquée, a son amplitude et b le désaccord autour duquel la modulation est effectuée. Varier la valeur de b permet d'explorer les effets induits par la modulation pour les différentes zones, et de rendre compte d'un très faible désaccord pouvant se produire lors de prises de données expérimentales.

3.2 Évolution du système sans tenir compte du désaccord

Lorsque les régimes pulsés systématiques n'étaient pas clairement compris, et que les zones pulsées du laser s'expliquaient à l'aide d'une modification du système (laser-dispersion en énergie du faisceau) suite à une petite perturbation, un premier modèle fut élaboré [13]. Il permettait de rendre compte grosso-modo des observations effectuées, comme l'indique la figure 2. Néanmoins, ce modèle ne s'appliquait qu'aux modulations de très faible amplitude, pour lesquelles la variation de la condition d'accord peut être négligée. C'est pourquoi un modèle plus complet fut élaboré, afin de tenir compte du désaccord dans la modélisation du LEL, ainsi que de l'augmentation de la longueur du paquet associée à l'augmentation de dispersion en énergie par chauffage laser [14].

3.3 Évolution du système en tenant compte du désaccord

Lorsque $b = 0$ et que l'amplitude a reste faible (correspondant à la zone centrale "cw"), le système adopte un régime (1T) stable. Au-delà de cette zone centrale, le système répond généralement de façon chaotique.

Le laser, lorsque la valeur de b est faible, mais non nulle, adopte un comportement assez différent. Selon les valeurs de a et f , des situations variées se présentent. La figure 3a présente l'évolution de l'intensité du laser en fonction de l'amplitude a . De façon générale, tant que l'amplitude de la modulation ne dépasse pas la zone centrale, le laser répond par un régime 1T à la modulation externe. Ce n'est que lorsque l'amplitude de la modulation dépasse les valeurs d'accord définissant cette zone centrale qu'il semble que les cascades se produisent. De plus, les bifurcations se produisent simultanément pour l'intensité laser et

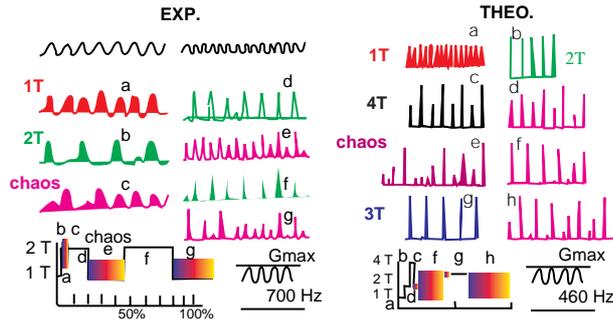
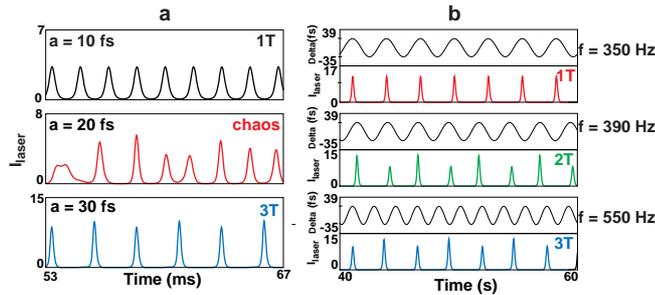
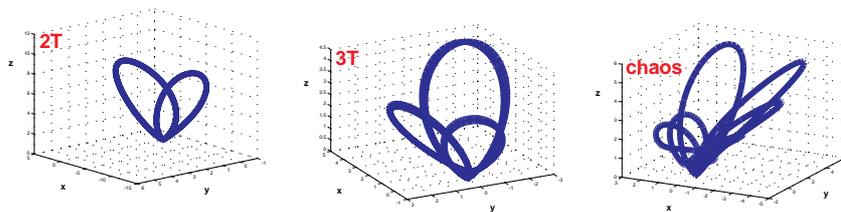


FIG. 2 – Evolution du laser en réponse à une modulation de gain

pour la position de la micro-impulsion, ce qui a pu être aussi observé expérimentalement [15]. La figure 3b présente des simulations effectuées en modifiant la fréquence f de la modulation et permettant de voir différents régimes, tels que des transitions $1T$, $2T$, $3T$.


 FIG. 3 – Comportement du laser en fonction du temps pour une modulation $f = 400\text{Hz}$, $b = 2\text{fs}$ en fonction de (a) l'amplitude et de (b) la fréquence de modulation.

 FIG. 4 – Attracteurs obtenus par simulations numériques : régime $2T$, $3T$ et chaotique.

3.4 Attracteurs

Le nouveau modèle permet aussi de tracer des attracteurs étranges, comme ceux présentés sur la figure 4. Ils reproduisent qualitativement les observations expérimentales présentées en [15].

4 Conclusion

Le modèle proposé ici permet une avancée significative dans la compréhension du comportement d'un laser à électrons libres sur anneau de stockage en réponse à une modulation de la condition de synchronisation. La prise en compte de l'influence du désaccord est essentielle pour décrire précisément l'évolution du laser. D'après les simulations, il apparaît que les transitions au-delà du régime 1T nécessitent de s'écarter de la zone centrale continue du laser. Il reste à comparer de façon systématique avec des mesures. Néanmoins, ceci ouvre des perspectives intéressantes quant au contrôle des zones pulsées [16].

Références

- [1] J.M.J. Madey, *Stimulated Emission of Bremsstrahlung in a Periodic Magnetic Field*, J. Appl. Phys., **42**, 1906 (1971).
- [2] N. Vinokurov, A. Skrinsky *The Optical Klystron*, Preprint INP77.59 Novossibirsk (1977).
- [3] P. Elleaume, *Optical Klystron*, J. Phys. (Paris) , **44**, C1-353 (1983).
- [4] M. Sands, *The Physics of Electron Storage Rings: an introduction*, SLAC Rep.121, 1970; also, Proc. Int. Sch. Phys. "Enrico Fermi" **46**, 257-411, (1971).
- [5] M. E. Couprie, M. Billardon, P. Elleaume, J.M. Ortega, C. Bazin, M. Bergher, M. Velghe, Y. Petroff, D.A. Deacon, K.E. Robinson, J.M.J. Madey, *First Operation of a Storage Ring Free Electron Laser*, Phys. Rev. Lett. **51**, 1652 (1983).
- [6] P. Elleaume, *Macrotemporal structure of Storage Ring Free Electron Lasers*, J. Phys. (Paris) , **45**, 997-1001 (1984).
- [7] M. E. Couprie, M. Velghe, R. Prazeres, D. Jaroszynski, M. Billardon, *Free Electron Laser Oscillation on the Super-ACO Storage Ring at Orsay*, Phys. Rev. A. **44**(2), 1301-1315 (1991).
- [8] M.E. Couprie, V. Litvinenko, D. Garzella, A. Delboulbé, M. Velghe, M. Billardon, *Dynamical Study of the Super-ACO Free Electron Laser with a dissector*, Nucl. Instr. and Meth. **A331**, 37-41, (1993).
- [9] M. Billardon, D. Garzella, M.E. Couprie, *Saturation mechanism for a storage ring Free Electron Laser*, Couprie Phys. Rev. Lett. **69**, n° 16, 2368-2371, (1992).
- [10] G. Dattoli et A. Renieri, *Storage Ring Operation of the Free Electron Laser: the Oscillator* Nuovo Cimento **B59**, 1-39, (1980).
- [11] M. E. Couprie, *Laser à électrons libres ultra-violet sur anneau de stockage*, thèse d'habilitation à diriger des recherches de l' université Paris-Sud (1997).
- [12] G. De Ninno, D. Fanelli et M.E. Couprie, *Detuned dynamics of a Storage-Ring Free-Electron Laser*, à paraître dans Nucl. Inst. Met. A.
- [13] M. Billardon, *Storage ring Free Electron laser and chaos*, Phys. Rev. Lett. **65**, 713 (1990)
- [14] G. De Ninno, D. Fanelli, M.E. Couprie, *Dynamics of a Storage-Ring Free-Electron Laser*, soumis à Eur. J. Phys. D.
- [15] C. Bruni, G. L. Orlandi, D. Garzella, M. E. Couprie, *Étude expérimentale de chaos sur le laser à électrons libres de Super ACO*, Comptes-Rendus des cinquièmes journées du non-linéaire.
- [16] S. Bielawski, M. Bouazaoui, D. Derozier, and P. Glorieux *Stabilization and characterization of unstable steady states in a laser*, Phys. Rev. A, **47**, R2492(1993).

Estimation d'Attracteurs Etranges Application à l'Attracteur de Rössler

Sara Derivière & M.A. Aziz-Alaoui

*Laboratoire de Mathématiques Appliquées, Université du Havre,
Faculté des Sciences et Techniques, BP 540, 76058 Le Havre cedex, France.*
sara.deriviere@univ-lehavre.fr, aziz@univ-lehavre.fr

Résumé

On donne des résultats théoriques sur la stabilité globale des solutions de systèmes différentiels et sur l'estimation d'attracteurs. A cet effet, une extension du principe d'invariance de LaSalle nécessitant des conditions moins restrictives que celles du principe d'invariance classique est donnée. Des applications pour les estimations d'attracteurs étranges sont présentées ; en particulier on donne une estimation théorique de l'attracteur de Rössler, puis on démontre que, pour les paramètres usuels, cet attracteur ne pénètre jamais dans un voisinage de l'axe Oz et que la variable z est toujours strictement positive.

1 Introduction, principe d'invariance et extension

Le principe d'invariance de LaSalle est un outil très utilisé pour étudier le comportement asymptotique des solutions d'équations différentielles, voir [1, 2].

L'objet de cet article est de présenter une version plus générale du principe d'invariance de LaSalle, permettant d'obtenir des estimations concrètes pour les attracteurs de systèmes d'équations différentielles, car pour beaucoup de systèmes présentant un comportement compliqué ou chaotique, il n'est pas évident de trouver une fonction de Lyapunov à dérivée orbitale positive, voir [3].

Rappelons tout d'abord le principe d'invariance de LaSalle classique. Considérons l'équation différentielle ordinaire et autonome suivante:

$$\frac{dX}{dt} = F(X, \lambda) \tag{36}$$

où $X \in \mathbb{R}^n$, $F \in C^1(\mathbb{R}^n)$, λ représente les paramètres du système.

Théorème 1. *Principe d'invariance globale*

Soient $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ et $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ des fonctions de classe C^1 . Supposons que la dérivée orbitale vérifie $\frac{d}{dt}V(X) \leq 0$ pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, et définissons $E := \{X \in \mathbb{R}^n : \frac{d}{dt}V(X) = 0\}$. Posons B le plus grand ensemble invariant inclus dans E.

Alors toutes les solutions de (104), bornées pour $t \geq 0$, convergent vers B quand $t \rightarrow \infty$.

Dans ce papier, deux résultats plus généraux sont présentés. Ils requièrent des hypothèses moins fortes que pour le principe d'invariance classique dans le sens où les fonctions de Lyapunov choisies peuvent être de dérivée orbitale positive sur certaines régions. Ainsi la recherche de telles fonctions s'avérera plus facile et, comme nous le verrons, de nouvelles applications seront possibles.

Théorème 2. *Extension du principe d'invariance* (voir [4, 5])

Soient $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $V_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions C^1 et $c_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que: $L_t V_1(X) \leq -c_1(X)$, pour tout $X \in \mathbb{R}^n$.

Soit $A_1 := \{X \in \mathbb{R}^n : c_1(X) < 0\}$.

Supposons que $\sup_{X \in A_1} V_1(X) = M \in \mathbb{R}$ et que $\bar{\Omega}_M := \{X \in \mathbb{R}^n : V_1(X) \leq M\}$ soit borné.

Définissons $E_1 := \{X \in \mathbb{R}^n : L_t V_1(X) = 0\} \cup \bar{\Omega}_M$, et soit B_1 le plus grand sous-ensemble invariant par F inclus dans E_1 .

Alors toutes les solutions de (104), bornées pour $t \geq 0$, convergent vers B_1 quand $t \rightarrow \infty$. De plus, si $X_0 \in \bar{\Omega}_M$, alors $\varphi_1(t, X_0)$ est définie pour tout $t \geq 0$, $\varphi_1(t, X_0) \in \bar{\Omega}_M$ pour tout $t \geq 0$ et $\varphi_1(t, X_0)$ tend vers le plus grand sous-ensemble invariant inclus dans $\bar{\Omega}_M$, quand $t \rightarrow \infty$.

Théorème 3. *Variance de l'extension du principe d'invariance*

Soient $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $V_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions C^1 et soit $c_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que: $L_t V_2(X) \geq -c_2(X)$, pour tout $X \in \mathbb{R}^n$.

Soit $A_2 := \{X \in \mathbb{R}^n : c_2(X) > 0\}$.

Posons $m := \inf_{X \in A_2} V_2(X)$ et $\bar{\Omega}_m := \{X \in \mathbb{R}^n : m \leq V_2(X)\}$.

Définissons $E_2 := \{X \in \mathbb{R}^n : L_t V_2(X) = 0\} \cup \bar{\Omega}_m$, et soit B_2 le plus grand sous-ensemble invariant par F inclus dans E_2 .

Alors toutes les solutions de (104), bornées pour $t \geq 0$, convergent vers B_2 quand $t \rightarrow \infty$. De plus, si $X_0 \in \bar{\Omega}_m$, alors $\varphi_2(t, X_0)$ est définie pour tout $t \geq 0$, $\varphi_2(t, X_0) \in \bar{\Omega}_m$ pour tout $t \geq 0$ et $\varphi_2(t, X_0)$ tend vers le plus grand sous-ensemble invariant inclus dans $\bar{\Omega}_m$, quand $t \rightarrow \infty$.

Pour la démonstration, voir [6].

Remarques :

Si on suppose $V_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ et $L_t V_1 \leq 0$ sur \mathbb{R}^n dans le théorème 1, alors les ensembles A_1 et $\bar{\Omega}_M$ sont vides, et le résultat obtenu est celui du principe d'invariance classique, le théorème 1 est donc bien une extension du principe d'invariance.

Il est important de noter que dans cet article, l'expression "fonction de Lyapunov" devra être comprise dans un sens large qui inclus le cas des fonctions dont la dérivée orbitale peut aussi être positive.

2 Estimation de l'attracteur de Rössler

Le système de Rössler est le suivant :

$$\frac{dx}{dt} = -(y + z), \quad \frac{dy}{dt} = x + ay, \quad \frac{dz}{dt} = b + xz - cz.$$

où a , b et c sont les paramètres du système. Dans ce papier, nous utilisons les valeurs usuelles suivantes :

$$a = b = 0.2, \quad c = 14.0.$$

2.1 Détermination de l'ensemble $\bar{\Omega}_M$

Nous cherchons à présent une estimation théorique de l'attracteur de Rössler. Pour cela posons:

$$V_1(x, y, z) = cx^2 + cy^2 + az^2.$$

Alors

$$L_t V_1(x, y, z) = -2(-acy^2 + acz^2 - abz + cxz - axz^2) \text{ et} \\ A_1 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -acy^2 + acz^2 - abz + cxz - axz^2 < 0\},$$

c'est à dire que la fonction c_1 du théorème d'extension est donnée par:

$$\Phi(x, y, z) = 2(-acy^2 + acz^2 - abz + cxz - axz^2).$$

Cherchons la valeur de $M := \sup_{X \in A_1} V_1(X)$. La fonction V_1 est convexe, mais la contrainte: $-acy^2 + acz^2 - abz + cxz - axz^2$ ne l'est pas, donc on ne peut appliquer de méthodes classiques comme la technique des multiplicateurs de Lagrange.

On utilise pour cela l'algorithme d'optimisation Knitro, voir [7] (qui est basée sur une méthode de points intérieurs). On trouve alors:

$$\sup_{X \in A_1} V_1(X) = 9,8.10^7.$$

Ainsi, $\bar{\Omega}_M$ est l'ellipsoïde définie par:

$$\bar{\Omega}_M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : cx^2 + cy^2 + az^2 \leq 9,8.10^7\}$$

Toutes les solutions bornées du système de Rössler, pour les paramètres fixés auparavant, convergent dans cette ellipsoïde (selon le principe d'invariance étendu). Ce résultat peut être affiné (on peut trouver une autre fonction V_2 conduisant à un rayon plus petit).

2.2 Détermination d'un ensemble $\bar{\Omega}_m$:

L' attracteur de Rössler se situe dans le demi-espace $z > 0$

Nous allons démontrer que, pour l'attracteur classique de Rössler, les solutions (asymptotiquement) sont toujours strictement au dessus du plan $z = 0$. Nous utiliserons pour cela la variance du Principe d'Invariance de LaSalle pour montrer que les solutions bornées de l'attracteur convergent dans le demi-espace $z > 0$.

Considérons donc la fonction de Lyapunov suivante:

$$V_2(x, y, z) = z.$$

On a: $L_t V_2(x, y, z) = xz - cz + b$, d'où, par définition,

$$A_2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -xz + cz - b > 0\}.$$

On cherche la valeur de $m := \inf_{(x,y,z) \in A} V_2(x, y, z)$; on la calcule comme précédemment grâce au programme d'optimisation Knitro, et on obtient numériquement:

$$m := \inf_{(x,y,z) \in A} V_2(x, y, z) = 6,5.10^{-7}.$$

Définissons alors: $\bar{\Omega}_m = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq 6,5.10^{-7}\}$.

On en conclut donc, d'après le théorème 3, que l'attracteur de Rössler est dans

$$\bar{\Omega}_m = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq 6,5.10^{-7}\}.$$

Par ailleurs, pour affiner au maximum notre ensemble $\bar{\Omega}_m$, on peut démontrer que les solutions de l'attracteur de Rössler ne rentrent jamais dans une région située le long du demi-axe positif, en prenant par exemple comme fonction de Lyapunov une paraboloïde elliptique orientée selon l'axe Oz contenant l'origine et en montrant que les solutions ne rentrent jamais à l'intérieur (voir Figure 1).

2.3 Récapitulatif:

D'après les extensions du principe d'invariance de LaSalle, toutes les solutions bornées du système de Rössler convergent dans:

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : cx^2 + cy^2 + az^2 \leq 9,8.10^7\} \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq 6,5.10^{-7}\}$$

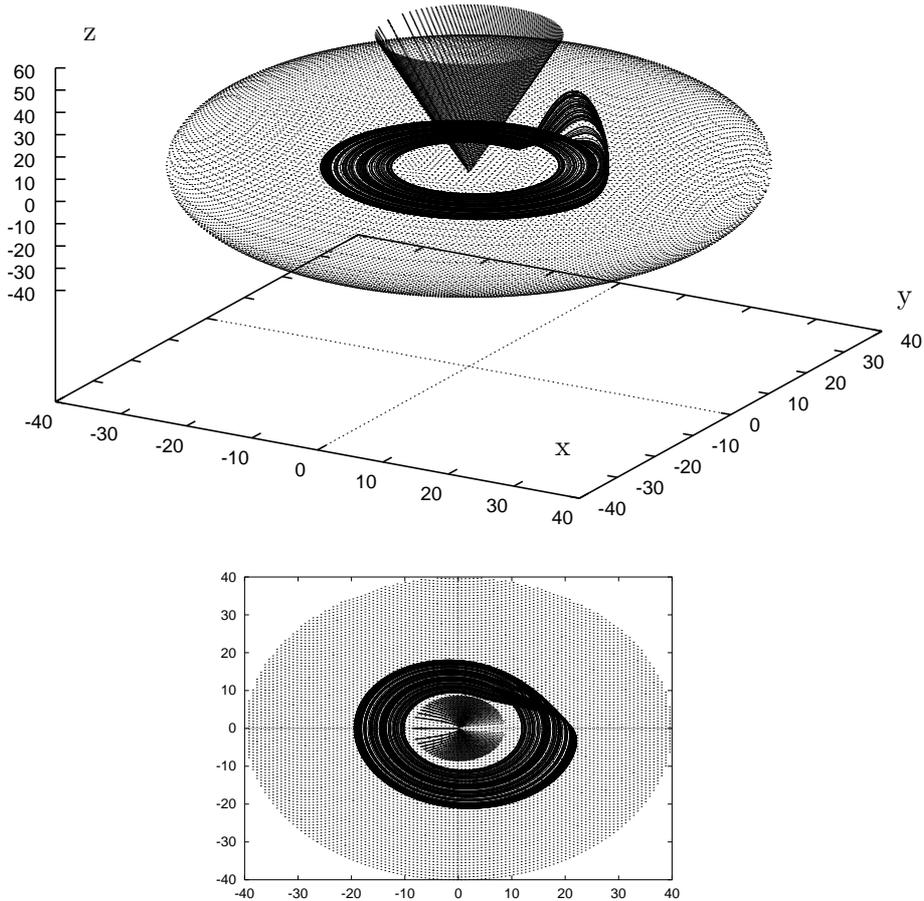


Fig. 1. Illustration numérique de l'estimation de l'attracteur de Rössler, et du 'trou' le long du demi axe positif oz , pour les paramètres $a = 0.2 = b$ et $c = 14$ du système. (a) Vue tridimensionnelle, (b) projection sur le plan xy . L'attracteur (en noir foncé) est strictement contenu dans l'ellipsoïde et à l'extérieur de l'hyperboloïde infini d'axe de révolution oz , et vérifie $z > 0$.

3 Conclusion

Dans ce article, une version plus générale (et une variante) du principe d'invariance, utile dans l'étude de la stabilité des solutions de systèmes d'équations différentielles, est présentée. Dans cette version, des conditions moins restrictives que les conditions du principe classique sont utilisées, ce qui permet de l'appliquer pour une plus large classe de problèmes.

Ces extensions du principe d'invariance de LaSalle nous ont permis d'étudier l'attracteur de Rössler et de démontrer un résultat important : l'attracteur de Rössler est toujours dans le demi-espace $z > 0$.

Remarquons que les estimations données par ces théorèmes dépendent du choix des fonctions de Lyapunov, l'estimation de l'attracteur de Rössler donnée par l'extension du principe d'invariance de LaSalle peut être affinée par le choix d'une autre fonction de Lyapunov.

Références

- [1] J.P. LaSalle, *The stability of Dynamical Systems*, Z.Artstein (1976).
- [2] J.P. LaSalle, *Some extensions of Lyapunov's second method*, IRE Trans. Circuit Theory, Vol. **CT-7**, pp. 520-527 (1960).
- [3] S. Derivière & M.A. Aziz-Alaoui, *Principe d'Invariance Uniforme et Estimation d'Attracteurs Etranges dans \mathbb{R}^3* , 3^{ème} colloque sur le Chaos temporel et le Chaos spatio-temporel, pp. 65-70, Le Havre, (Septembre 2001).
- [4] H.M. Rodrigues, L.F.C.A Alberto & N.G. Bretas, *On the Invariance Principle: Generalizations and Applications to Synchronization*, IEEE, **47**, pp. 730-739 (2000).
- [5] H.M. Rodrigues, L.F.C.A Alberto & N.G. Bretas, *Uniform Invariance Principle and Synchronization. Robustness with respect to Parameter Variation*, JDE **Vol 169**, pp. 228-254 (2001).
- [6] S. Derivière & M.A. Aziz-Alaoui, *Sur une extension du principe d'invariance de LaSalle*, Preprint, Le Havre, à soumettre, (2002).
- [7] R.A. Waltz & J. Nocedal, *KNITRO.2.0*, <http://www.ece.northwestern.edu/nocedal/knitro/obtaininstall.htm>

Instabilités spatio-temporelles dans un laser

J. Plumecoq, C. Szwaj, M. Lefranc, D. Derozier, T. Erneux et S. Bielawski
*Laboratoire de Physiques des Lasers, Atomes et Molécules, UMR 8523, Centre
d'Études et de Recherches Lasers et Applications, Université des Sciences et
Technologies de Lille*
F-59655 Villeneuve d'Ascq
`Serge.Bielawski@univ-lille1.fr`

La modulation d'un laser multimode peut, sous certaines conditions, induire une instabilité paramétrique. Cette dernière se caractérise par l'apparition, pour une valeur critique de l'amplitude de modulation, d'une onde stationnaire dans le spectre du laser [1]. Nous montrons, théoriquement et expérimentalement, que cette onde stationnaire se déstabilise sous l'action de deux mécanismes : (i) une cascade d'instabilités paramétriques (chacune des deux ondes apparaissant lors de l'instabilité primaire excite paramétriquement deux nouvelles ondes progressives [2]); (ii) une instabilité d'Eckhaus induite par les non-uniformités du système [3] (forme gaussienne du spectre), qui engendre des dislocations spatio-temporelles [4]. Des régimes de chaos spatio-temporels sont induits par les deux mécanismes. L'étude analytique est menée sur des équations d'amplitudes prenant en compte le couplage non-local et les variations spatiales, et qui sont directement dérivées des équations physiques du laser. Les prédictions théoriques sont confirmées par des simulations numériques du modèle physique du laser et par des résultats expérimentaux obtenus sur des lasers à fibre dopée Néodyme et Ytterbium.

Références

- [1] C. Szwaj, S. Bielawski, D. Derozier and T. Erneux, *Faraday instability in a multimode laser*, Phys. Rev. Lett. **80**, 3968 (1998).
- [2] T.C. Carr, T. Erneux, C. Szwaj, M. Lefranc, D. Derozier and S. Bielawski, *Cascade of parametric instabilities in a multimode laser*, Phys. Rev. A **64**, 053808 (2001).
- [3] H. Riecke and H.-G. Paap, *Perfect wavenumber selection and drifting patterns in ramped Taylor-vortex flows*, Phys. Rev. Lett. **59**, 2570 (1987).
- [4] J. Plumecoq, C. Szwaj, D. Derozier, M. Lefranc and S. Bielawski, *Eckhaus instability induced by nonuniformities in a laser*, Phys. Rev. A **64**, 061801(R) (2001).

Accord de phase et gain des interactions paramétriques optiques $\chi^{(3)}$, spécificités par rapport aux processus $\chi^{(2)}$.

J. Douady, J.P. Fève et B. Boulanger

*Laboratoire de Spectrométrie Physique, UMR CNRS 5588,
140, avenue de la Physique, BP 87, 38402 SAINT MARTIN D'HERES CEDEX
benoit.boulanger@ujf-grenoble.fr*

Résumé

Les interactions paramétriques optiques cubiques suscitent un fort intérêt théorique pour l'étude des corrélations quantiques particulières aux photons générés. Nous présentons ici une étude théorique des propriétés d'accord de phase et de gain paramétrique des couplages $\chi^{(3)}$. Elle met en évidence plusieurs spécificités par rapport aux interactions à 3 photons, et démontre un large choix de cristaux et de configurations de polarisation envisageables. Ces considérations fournissent des données essentielles pour la conception des expériences et permettent de définir plusieurs stratégies pertinentes en vue de réaliser les premières interactions efficaces purement cubiques.

1 Introduction

L'étude des processus cubiques (gouvernés par le tenseur de susceptibilité d'ordre 3, $\chi^{(3)}$) est principalement motivée par leurs propriétés en optique quantique: les trois photons issus d'une interaction paramétrique $\chi^{(3)}$ naissent d'un même photon père. Cette situation est analogue à celle bien connue de la génération de photons jumeaux par fluorescence, amplification ou oscillation paramétriques quadratiques (gouvernés par le tenseur de susceptibilité d'ordre 2, $\chi^{(2)}$). Dans le cas des interactions cubiques, les photons sont générés sous formes de triplets, usuellement dénommés états GHZ (Greenberger-Horne-Zeilinger [1]), qui possèdent des corrélations quantiques spécifiques. Ainsi, contrairement au cas des photons jumeaux, les triplets présentent la particularité d'avoir une fonction de quasi-probabilités fortement non-Gaussienne [1, 2], ce qui constitue un nouvel état de la lumière. Outre l'étude *per se* de ce phénomène, la manipulation des états triplets serait un réel atout dans des domaines comme la cryptographie quantique.

Les corrélations liant les trois photons d'un triplet ont fait l'objet de nombreuses études théoriques [1, 2, 3]; cependant, la faiblesse des éléments du tenseur $\chi^{(3)}$ n'a pas encore permis la réalisation d'une source efficace de photons triplets, et ces derniers n'ont donc jamais été étudiés expérimentalement. Les seules expériences d'interactions $\chi^{(3)}$ efficaces publiées concernent la génération de tierce harmonique (THG), pour laquelle un rendement d'interaction élevé a été obtenu en régime picoseconde: 5 % dans $\beta\text{BaB}_2\text{O}_4$ (BBO) [4] et 2,4 % dans KTiOPO_4 (KTP) [5]. Mais ces expériences utilisent des cristaux non centrosymétriques, où des interactions $\chi^{(2)}$ en cascade parasitent le processus purement cubique; ainsi dans BBO, le processus $\chi^{(3)}$ reste minoritaire dans la production de photons à la pulsation tierce harmonique. D'autre part, des états triplets ont été créés à partir de deux paires de photons jumeaux [6], mais l'efficacité du procédé reste très faible et le tri des photons triplets générés entraîne leur destruction, ce qui interdit leur manipulation ultérieure. La source idéale de photons triplets que constituerait un oscillateur paramétrique optique (OPO) basé sur une interaction $\chi^{(3)}$ reste donc encore à réaliser.

Nous présentons ici une étude théorique détaillée des processus $\chi^{(3)}$, dans le but de définir les schémas d'expériences pouvant conduire à des interactions paramétriques purement cubiques, qui soient efficaces et compatibles avec les sources lasers et les matériaux non-linéaires existants. Ce travail met en évidence les spécificités des propriétés d'accord de phase et de gain paramétrique $\chi^{(3)}$ par rapport aux processus quadratiques.

2 Obtention d'interactions cubiques pures

2.1 Différents schémas de couplage

Contrairement au cas des interactions paramétriques à 3 ondes, qui peuvent toujours se ramener à un schéma du type $\omega_3 \rightarrow \omega_1 + \omega_2$, les interactions cubiques peuvent exister sous deux formes différentes :

$\omega_4 \rightarrow \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$, appelé schéma {A}, similaire au cas des interactions à 3 ondes, et $\omega_4 + \omega_1 \rightarrow \omega_2 + \omega_3$, noté schéma {B}, qui n'a pas d'équivalent à 3 ondes.

Dans un processus paramétrique optique, les pulsations des ondes en interaction vérifient la loi de conservation de l'énergie ($\omega_4 = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$ (schéma {A}) ou $\omega_4 + \omega_1 = \omega_2 + \omega_3$ (schéma {B})). De plus, pour que les ondes interagissent de manière constructive tout au long de leur propagation dans le milieu non-linéaire, les vecteurs d'onde doivent satisfaire à la relation d'accord de phase qui traduit la conservation de l'impulsion des photons en interaction, soit dans le cas de vecteurs d'ondes colinéaires :

$$n_4\omega_4 = n_1\omega_1 + n_2\omega_2 + n_3\omega_3 \text{ (schéma \{A\}) ou } n_4\omega_4 + n_1\omega_1 = n_2\omega_2 + n_3\omega_3 \text{ (schéma \{B\}).}$$

Les propriétés d'accord de phase du schéma {A} présentent des similitudes avec celles des interactions à 3 ondes : la dispersion des indices de réfraction en fonction de la longueur d'onde interdit l'utilisation de matériaux isotropes. L'accord de phase peut en revanche être réalisé dans des matériaux anisotropes, pour lesquels la biréfringence permet de compenser la dispersion. Les indices correspondent alors, selon la direction de polarisation choisie, à l'une ou l'autre des deux nappes de la surface des indices du matériau : $n^+(\theta, \phi)$ ou $n^-(\theta, \phi)$, θ et ϕ représentant la direction de propagation en coordonnées sphériques. Si la dispersion observée est normale ($n(\omega_i) < n(\omega_j)$ si $\omega_i < \omega_j$), seules 7 des 16 configurations de polarisation possibles autorisent l'accord de phase [7].

En revanche, la relation d'accord de phase correspondant au schéma {B} n'est pas aussi contraignante. Elle autorise d'une part l'accord de phase dans les milieux isotropes [8], ce qui permet d'envisager l'utilisation de verres à forte non-linéarité cubique, pour lesquels le tenseur $\chi^{(2)}$ est nul. D'autre part, dans les milieux anisotropes, l'ensemble des 16 configurations de polarisation peut permettre un accord de phase. Ceci étend considérablement le domaine d'utilisation des cristaux ; il apparaît notamment des directions permettant un accord de phase sollicitant le plus fort élément du tenseur $\chi^{(3)}$ et pour lesquelles les éléments correspondants du tenseur $\chi^{(2)}$ sont nuls. C'est par exemple le cas de l'accord de phase selon l'axe Z de KTP, où l'élément maximal du tenseur $\chi^{(3)}$, $\chi_{111}^{(3)}$, peut être sollicité, alors que les coefficients $\chi^{(2)}$ associés sont nuls. Une recherche systématique de ces situations montre qu'elles existent dans 16 des 21 classes de symétrie d'orientation non centrosymétriques. Les possibilités de choix des matériaux pour la réalisation d'interactions purement cubiques sont donc largement étendues. Il faut remarquer que le schéma {B} ne mène pas rigoureusement à des états triplets, puisqu'il nécessite deux photons incidents et ne génère que deux photons. Cependant, il n'en est pas moins intéressant pour l'étude des interactions $\chi^{(3)}$ dans leur généralité ; ainsi l'étude théorique des corrélations quantiques pour ce type de couplage n'a encore jamais été menée.

Dans la perspective de générer des états triplets, le schéma {A} s'impose donc, mais aucun accord de phase n'a encore été trouvé dans un matériau centrosymétrique. Les paragraphes suivants proposent donc deux approches alternatives, ayant pour objectif commun la réalisation d'interactions majoritairement cubiques menant à la génération de triplets.

2.2 Suppression des processus $\chi^{(2)}$ en cascade

Considérons la génération de tierce harmonique $\omega^{(+)} + \omega^{(+)} + \omega^{(-)} \rightarrow 3\omega^{(-)}$, en accord de phase selon l'axe X dans KTP pour une longueur d'onde fondamentale de 1620 nm. Deux cascades d'interactions quadratiques génèrent simultanément des photons parasites à la pulsation 3ω :

$$\begin{aligned} \omega^{(-)} + \omega^{(+)} &\rightarrow 2\omega^{(-)} \text{ puis } 2\omega^{(-)} + \omega^{(+)} \rightarrow 3\omega^{(-)} ; \\ \omega^{(+)} + \omega^{(+)} &\rightarrow 2\omega^{(+)} \text{ puis } 2\omega^{(+)} + \omega^{(-)} \rightarrow 3\omega^{(-)}. \end{aligned}$$

Chaque interaction quadratique est hors accord de phase, mais l'écart entre les valeurs des coefficients $\chi^{(2)}$ et $\chi^{(3)}$, respectivement de l'ordre de 10^{-12} pm/V et de 10^{-22} (pm/V)², est tel

que les intensités générées par le processus cubique et les interactions quadratiques peuvent être du même ordre de grandeur. Il est cependant possible de diminuer fortement la contribution des cascades en réalisant l'interaction dans un cristal de KTP dont l'axe Z est périodiquement renversé. La figure 1 montre que cette inversion périodique modifie par exemple $\chi_{zzz}^{(2)} = \chi_{33}^{(2)}$ et $\chi_{yyz}^{(2)} = \chi_{24}^{(2)}$, mais laisse indifférents $\chi_{yyzz}^{(3)} = \chi_{24}^{(3)}$ et $\chi_{zzzz}^{(3)} = \chi_{33}^{(3)}$, qui sont les coefficients sollicités lors de la propagation selon l'axe X. Ainsi, l'utilisation d'un échantillon à domaines ferroélectriques alternés peut être envisagée non plus pour améliorer le rendement d'une interaction quadratique, mais au contraire pour l'annihiler [9]. Comme cela n'influence pas le processus cubique, qui reste en accord de phase, la contribution des interactions quadratiques en cascade au rendement de conversion total est fortement diminuée.

La résolution du système d'équations différentielles couplées décrivant l'évolution des amplitudes complexes des champs en interaction permet de calculer les contributions respectives des interactions quadratiques en cascade et du processus cubique à la génération de tierce harmonique. Le taux de cascade r , défini par $r = I_{3\omega}^{casc} / I_{3\omega}^{cubic}$, est illustré sur la figure 2 en fonction de la longueur des domaines ferroélectriques; r est maximal lorsque cette longueur est égale à un multiple impair de la longueur de cohérence d'une des interactions $\chi^{(2)}$ impliquées: c'est le cas classique du quasi-accord de phase. Au contraire, la figure 2 montre qu'un choix judicieux de la période de renversement des domaines permet de réduire considérablement les contributions quadratiques: pour $d=37 \mu\text{m}$, r n'est plus que de 0,019 %, alors qu'il est de 13 % dans le cas d'un monocristal.

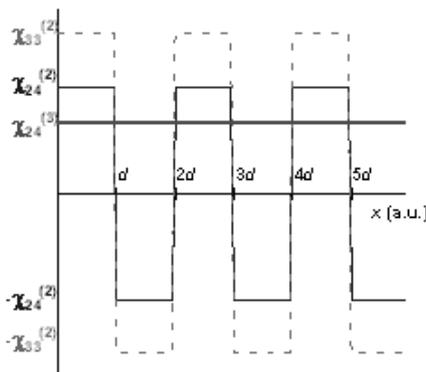


FIG. 1 – Effet du renversement périodique de l'axe Z de KTP sur les coefficients $\chi_{24}^{(2)}$, $\chi_{33}^{(2)}$ et $\chi_{24}^{(3)}$; d est la longueur d'un domaine ferroélectrique.

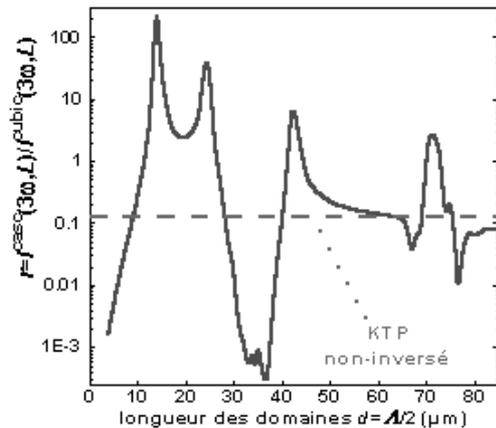


FIG. 2 – Taux de cascade r en fonction de la longueur des domaines ferroélectriques pour la THG selon l'axe X d'un cristal de ppKTP.

2.3 Accord de phase dans un milieu isotrope sous contrainte mécanique

La réalisation d'interactions en accord de phase dans un milieu isotrope n'est possible que dans le cas d'un schéma de couplage de type {B}. Pour le cas du schéma {A}, une alternative consiste à appliquer une contrainte mécanique, ce qui induit une biréfringence par effet piézo-optique. Ceci permet d'envisager par exemple des interactions $\chi^{(3)}$ dans des verres de chalcogénure, qui présentent les non-linéarités cubiques les plus élevées connues à ce jour (jusqu'à 1000 fois celles de KTP) [10]. Les éléments du tenseur $\chi^{(2)}$ étant nuls dans les matériaux centrosymétriques, la pureté du processus cubique est garantie. L'application d'une contrainte pour s'approcher de l'accord de phase doit permettre de rendre le processus efficace.

Considérons une contrainte uniaxiale appliquée en compression selon Z ; le seul élément non nul du tenseur des contraintes est négatif : $S_{zz} < 0$. Le tenseur piézo-optique d'un matériau isotrope n'a que deux éléments indépendants : P_{11} et P_{12} . Le comportement optique du verre s'apparente alors à celui d'un uniaxe, dont la biréfringence est $\Delta n = \gamma \cdot S_{zz}$, avec $\gamma = \frac{1}{2}n^3(P_{12} - P_{11})$, où n est l'indice de réfraction du verre sans contrainte appliquée.

Pour la réalisation d'une génération de tierce harmonique en accord de phase sous contrainte, trois configurations de polarisation sont envisageables : $\omega^{(+)} + \omega^{(+)} + \omega^{(+)} = 3\omega^{(-)}$ pour le type I, $\omega^{(+)} + \omega^{(+)} + \omega^{(-)} = 3\omega^{(-)}$ pour le type II et $\omega^{(+)} + \omega^{(-)} + \omega^{(-)} = 3\omega^{(-)}$ pour le type III. Selon la configuration de polarisation choisie et selon le signe de γ , la contrainte S_{zz}^{AP} à appliquer pour parvenir à l'accord de phase s'exprime sous la forme suivante :

$$S_{zz}^{AP} = 2 \frac{n_{(3\omega)} - n_{(\omega)}}{\alpha \cdot n_{(3\omega)}^3 - \beta \cdot n_{(\omega)}^3}.$$

Les coefficients α et β sont donnés dans le tableau suivant en fonction des polarisations considérées et du signe de γ .

| | Type I | Type II | Type III |
|--------------|---------------------------------------|--|--|
| $\gamma < 0$ | $\alpha = P_{12}$ $\beta = P_{11}$ | $\alpha = P_{12}$ $\beta = \frac{1}{3}(2P_{11} + P_{12})$ | $\alpha = P_{12}$ $\beta = \frac{1}{3}(P_{11} + 2P_{12})$ |
| $\gamma > 0$ | $\alpha = P_{11}$ $\beta = P_{12}$ | $\alpha = P_{11}$ $\beta = \frac{1}{3}(P_{11} + 2P_{12})$ | $\alpha = P_{11}$ $\beta = \frac{1}{3}(2P_{11} + P_{12})$ |

Considérons l'exemple de la génération de tierce harmonique de longueur d'onde fondamentale $8,1 \mu\text{m}$, dans le verre $Ge_{33}As_{12}Se_{55}$ (commerciallement dénommé AMTIR-1), qui est transparent de $1,5$ à $10 \mu\text{m}$ et pour lequel $\gamma = -3,3 \text{ TPa}^{-1}$ [11]. Les valeurs calculées des contraintes à appliquer pour atteindre l'accord de phase sont les suivantes :

$$S_{zz}^{AP-I} = -54 \text{ t/cm}^2, S_{zz}^{AP-II} = -80 \text{ t/cm}^2 \text{ et } S_{zz}^{AP-III} = -158 \text{ t/cm}^2.$$

Les tolérances associées varient selon le type entre 250 et 735 kg/cm^2 (largeur totale du pic d'intensité générée à $0,405$ du maximum). Ces contraintes sont bien au-delà de la limite de rupture mécanique des échantillons, qui est de l'ordre de quelques tonnes/cm² ! Cependant, pour les verres $GeSe_4$ et $GeAsSe_8$ que nous envisageons d'étudier (fabriqués par F. Smektala au Laboratoire Verres et Céramiques de Rennes), la dispersion de l'indice de réfraction n'est pas connue avec la précision nécessaire au calcul des contraintes correspondantes. De plus, même s'il s'avérait qu'il est impossible d'atteindre l'accord de phase avant destruction de l'échantillon, l'étude aux faibles compressions devrait néanmoins permettre de réduire le désaccord de phase Δk , et de gagner ainsi quelques ordres de grandeurs sur le rendement de conversion.

3 Amplification et oscillation paramétriques $\chi^{(3)}$

3.1 Courbes d'accord de phase pour une interaction $\chi^{(3)}$

Pour une interaction quadratique $\omega_3 \rightarrow \omega_1 + \omega_2$, la recherche des conditions d'accord de phase consiste à résoudre un système de 2 équations (conservation de l'énergie et conservation de l'impulsion) à 2 inconnues (les pulsations des ondes générées). Suivant la dispersion des indices de réfraction, il existe 0, 1 voire exceptionnellement 2 doublets de pulsations qui sont solutions. En revanche, pour un processus cubique, il y a une inconnue supplémentaire avec toujours deux équations : la solution, lorsqu'elle existe, n'est pas unique (hormis à la dégénérescence), mais constitue un continuum. Ceci est illustré sur la figure 3, dans l'exemple de KTP, pour une direction de propagation selon X et un laser de pompe émettant à $\lambda_4=532 \text{ nm}$.

L'accord de phase pour une interaction de type $\omega_4 \rightarrow \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$ est obtenu pour un continuum de longueurs d'onde comprises entre $0,95$ et $4,3 \mu\text{m}$. Cette spécificité est à prendre en compte pour la réalisation d'un futur OPO $\chi^{(3)}$: les miroirs devront servir de filtre spectral assez sélectif pour ne pas diluer l'énergie de pompe sur une plage trop large de triplets $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$.

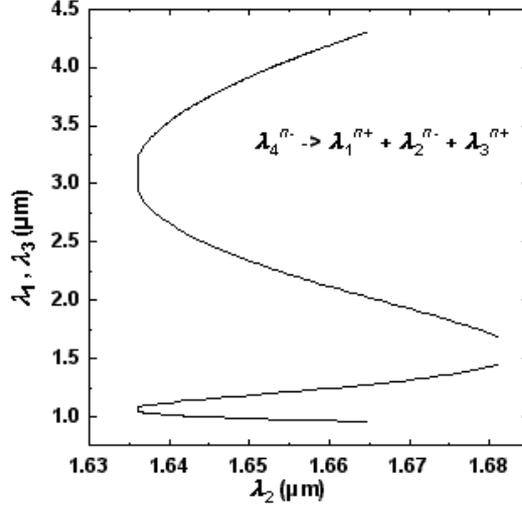


FIG. 3 – Courbe d'accord de phase d'une interaction de type $\omega_4^{(-)} \rightarrow \omega_3^{(+)} + \omega_2^{(-)} + \omega_1^{(+)}$, avec $\lambda_4=532$ nm et une propagation selon l'axe X dans KTP.

3.2 Gain paramétrique

Pour une interaction $\chi^{(3)}$ en accord de phase, le système régissant l'évolution des amplitudes complexes des champs électriques le long de l'axe de propagation est bien connu [12]. Nous avons intégré ce système d'équations différentielles couplées, ce qui conduit par exemple à l'équation suivante qui permet de calculer $E_3(L)$:

$$2L \sqrt{\frac{\kappa_1 \kappa_2 \kappa_4}{\kappa_3}} = \int_{E_3^2(0)}^{E_3^2(L)} \frac{d(E_3^2)}{\sqrt{E_3^2 \left(\frac{\kappa_3}{\kappa_1} E_1^2(0) - \varepsilon E_3^2(0) + \varepsilon E_3^2 \right) \left(\frac{\kappa_3}{\kappa_2} E_2^2(0) - E_3^2(0) + E_3^2 \right) \left(\frac{\kappa_3}{\kappa_4} E_4^2(0) - E_3^2(0) + E_3^2 \right)}}$$

où $\kappa_i = \frac{\pi \chi_{eff}^{(3)}}{\lambda_i n_i}$, L est la longueur d'interaction, E_i est l'amplitude du champ à la pulsation ω_i , $\omega_4 = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$ est la pulsation de l'onde pompe, $\varepsilon = +1$ dans le cas d'un couplage de type {A} et $\varepsilon = -1$ pour un couplage de type {B}. Les solutions s'expriment alors à l'aide de fonctions elliptiques de Jacobi, comme pour les interactions quadratiques. Toutefois, cette intégrale ne converge que si au moins 3 des 4 champs initiaux $E_i(0)$ sont non nuls. Cette particularité est très importante pour la conception des futures expériences d'amplification paramétrique $\chi^{(3)}$: hormis pour une interaction dégénérée en longueur d'onde, 3 lasers incidents sont requis. Le cas $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ sera donc préférable ici. L'intégrale précédente permet de calculer des valeurs de gain paramétrique. Dans l'exemple de KTP, avec une intensité de l'onde pompe ($\lambda_4=532$ nm) de 20 GW/cm² et une intensité de l'onde signal (à $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3=1596$ nm) de 2 GW/cm², le gain attendu est de 2,1 pour un cristal de 2 cm de long, ce qui constitue une valeur vraisemblablement suffisante pour envisager de futures mesures de propriétés optiques quantiques.

3.3 Seuil d'oscillation paramétrique

À partir de l'expression du gain paramétrique, il est possible de calculer le seuil d'oscillation d'un OPO basé sur une interaction $\chi^{(3)}$. Il suffit pour cela de considérer l'amplification acquise par l'onde signal lors d'un aller-retour dans la cavité, et de la comparer aux pertes subies lors de

ce même aller-retour. Le seuil d'oscillation correspond à l'égalité de ces deux termes et s'exprime par :

$$\left(E_4^2(0) \cdot E_1^2(0)\right)_{\text{seuil}} = \frac{\arg \cosh^2 \left(\frac{1+T_2^2 T_3^2 \sqrt{R_2^{OC} R_2^M R_3^{OC} R_3^M}}{T_2^2 \sqrt{R_2^{OC} R_2^M} + T_3^2 \sqrt{R_3^{OC} R_3^M}} \right)}{\kappa_2 \kappa_3 (1 - R_1^M)(1 - R_4^M) T_1 T_4 L^2}$$

où T_i , R_i^M et R_i^{OC} sont respectivement la transmission de Fresnel à l'interface air-cristal et les coefficients de réflexion en intensité des miroirs d'entrée et de sortie de cavité à la pulsation ω_i considérée ; L est la longueur du cristal.

Il apparaît clairement que, contrairement au cas d'un OPO $\chi^{(2)}$, le seuil d'oscillation d'un OPO $\chi^{(3)}$ n'est pas indépendant de la fluorescence paramétrique $E_1(0)$. Ainsi, seul le seuil d'un OPO injecté peut être calculé analytiquement. La relation précédente permet de calculer la valeur du seuil dans l'exemple d'un accord de phase selon l'axe X de KTP. Ainsi, en considérant l'interaction {532 nm \rightarrow 1540 nm + 1572 nm + 1683 nm}, avec une longueur de cristal de 25 mm et un coefficient de réflexion du miroir de sortie de 95 % à ω_2 et ω_3 , le seuil calculé correspond à des intensités de 1 GW/cm² et 24 MW/cm² aux longueurs d'onde pompe ($\lambda_4=532$ nm) et signal ($\lambda_1=1572$ nm) respectivement. Ces valeurs sont compatibles avec des impulsions d'une durée proche de la nanoseconde.

4 Conclusion

Ces calculs montrent plusieurs spécificités des interactions paramétriques cubiques, dont les propriétés d'accord de phase et de gain paramétrique ne peuvent être déduites par simple analogie avec les couplages $\chi^{(2)}$. Ainsi, l'existence de deux schémas de combinaison des pulsations étend largement le choix des matériaux et des configurations de polarisation. Nous envisageons également deux approches alternatives permettant d'obtenir des interactions efficaces et majoritairement cubiques : l'utilisation de matériaux à domaines ferroélectriques alternés pour supprimer les interactions quadratiques en cascade dans des cristaux non centrosymétriques, et l'application d'une contrainte mécanique pour induire une biréfringence permettant d'obtenir un accord de phase dans des verres à forte non-linéarité cubique. Enfin, le calcul des propriétés d'accord de phase et de gain pour les interactions d'amplification paramétrique fournit des données essentielles pour la conception de futures expériences. Tous les exemples considérés montrent que des efficacités notables devraient être obtenues avec des matériaux existants et pour des conditions expérimentales réalistes.

Références

- [1] Greenberger D.M., Horne M. A. *et al.*, Am. J. Phys. **58**, 1131 (1990).
- [2] Banaszek K. and Knight P.L., Phys. Rev. A **55** (3), 2368-2375 (1997).
- [3] Braunstein S. L. and McLachlan R. I., Phys. Rev. A **35** (4), 1659-1667 (1987).
- [4] Banks P. S., Feit M. D. *et al.*, Opt. Lett. **24** (1), 4-6 (1999).
- [5] Fève J. P., Boulanger B. *et al.*, Opt. Lett. **25** (18), 1373-1375 (2000).
- [6] Bouwmeester D., Pan J. W. *et al.*, Phys. Rev. Lett. **82** (7), 1345-1349 (1999).
- [7] Boulanger B., Fève J. P. *et al.*, Phys. Rev. E **48** (6), 4730-4751 (1993).
- [8] Okamoto H. and Tasumi M., Opt. Commun. **121**, 63-68 (1995).
- [9] Fève J. P. and Boulanger B., CLEO'2001, Baltimore, May 06-11, CThL21 (2001).
- [10] Cerqua-Richarson K.A., McKinley J. M. *et al.*, Opt. Mat. **10**, 155-159 (1998).
- [11] Anderson P. C. and Varshneya A. K., J. of Non-Cryst. Solids **168**, 125-131 (1994).
- [12] Armstrong J. A., Bloembergen N. *et al.*, Phys. Rev. **117** (6), 1918-1939 (1962).

Dispersion modale de polarisation et instabilité de modulation vectorielle dans les fibres à cristaux photoniques

Laurent Provino, John M. Dudley, Alexandre Sauter † et Guy Millot †

*Laboratoire d'Optique P. M. Duffieux
U.M.R. CNRS/Université de Franche-Comté n° 6603
25030 Besançon cedex, France.*

`john.dudley@univ-fcomte.fr`

† *Laboratoire de Physique de l'Université de Bourgogne, UMR 5027
21078 Dijon, France.*

`guy.millot@u-bourgogne.fr`

`benoit.boulangier@ujf-grenoble.fr`

Résumé

La biréfringence d'une fibre à cristaux photoniques a été étudiée au moyen de mesures de sa dispersion modale de polarisation sur le domaine spectral 545-640 nm. Les résultats expérimentaux sont en bon accord avec les résultats obtenus par simulation numérique vectorielle d'une fibre photonique modélisée avec un coeur de forme elliptique d'excentricité 7 %. Nous présentons également des expériences d'instabilité de modulation vectorielle non-linéaire dans cette fibre. Le décalage de 3,90 THz observé entre la pompe et les bandes latérales d'instabilité concorde avec les prédictions théoriques basées sur les calculs de la dispersion de vitesse de groupe de la fibre ainsi que ses caractéristiques de dispersion modale de polarisation.

1 Introduction

En raison de nombreuses potentialités d'applications nécessitant le maintien de la polarisation, l'introduction d'une biréfringence contrôlée dans les nouvelles fibres microstructurées dites à cristaux photoniques (PCF) fait l'objet actuellement de recherches intensives [1-5]. Partant de la structure idéale d'une PCF, ayant une symétrie de rotation parfaite, la biréfringence peut néanmoins être facilement introduite en utilisant, soit des trous d'air circulaires de diamètre non-uniforme [1, 2], soit des trous elliptiques [3], soit encore des trous de diamètre uniforme distribués autour d'un coeur non-circulaire [5]. De fait, dans la première démonstration d'une génération de supercontinuum dans une PCF fabriquée par Lucent Technologies (Lucent RW-1) le maintien de polarisation était assuré en raison du coeur légèrement elliptique de cette fibre [6].

Bien que cette PCF particulière ait été par la suite utilisée dans de nombreuses expériences [7-10], ses propriétés de biréfringence n'ont pas fait l'objet d'études détaillées, hormis la mise en évidence d'un accord de phase biréfringent dans les résultats expérimentaux de la référence [10]. Dans ce travail, nous étudions la biréfringence de cette même fibre en caractérisant sa dispersion modale de dispersion (PMD) à partir d'une source lumineuse large bande accordable sur l'intervalle de longueurs d'onde 545-640 nm. Cette PCF modélisée, avec un coeur elliptique présentant une excentricité de l'ordre de 7 %, permet d'obtenir des résultats numériques, à partir de l'équation d'Helmoltz vectorielle, en bon accord avec les mesures expérimentales. La biréfringence de la PCF a ensuite été exploitée

dans une expérience d'optique non-linéaire destinée à mettre en évidence l'instabilité de modulation vectorielle dans cette fibre [11]. En raison du fort coefficient non-linéaire de la PCF, des puissances crêtes injectées de seulement 90 W sont suffisantes pour générer des bandes latérales d'instabilité de modulation. Leur décalage spectral mesuré, par rapport à la pompe, est en excellent accord avec la courbe théorique de gain paramétrique calculée à partir des caractéristiques de la PMD et des calculs de dispersion de vitesse de groupe de la fibre.

2 Dispersion modale de polarisation

Une fibre unimodale conventionnelle fortement biréfringente est caractérisée par sa longueur de battement $2\pi/\Delta\beta$ où $\Delta\beta = \beta_y - \beta_x$ est la différence entre les constantes de propagation des deux modes propres polarisés orthogonalement. Bien que les mesures de la longueur de battement basées sur l'observation de la lumière diffuse sont simples et directes dans les fibres conventionnelles, elles deviennent difficiles dans le cas des PCF à cause des multiples diffusions par les trous d'air entourant le coeur central [1]. Une alternative pour mesurer la biréfringence repose sur l'interferométrie dans le domaine fréquentiel [12]. Dans cette méthode, la mesure de la PMD, caractérisée par le désaccord de vitesse de groupe $d\Delta\beta/d\omega$ entre les deux modes propres, se fait au moyen d'une source lumineuse large bande injectée à faible puissance de manière équilibrée sur les deux axes propres de polarisation d'une fibre de longueur L . En sortie de fibre, le spectre de la lumière est modulé par l'interférence spectrale entre les deux modes. La PMD peut alors être facilement déterminée à partir de la mesure de la fréquence spectrale de modulation $\Delta\nu = (Ld\Delta\beta/d\omega)^{-1}$.

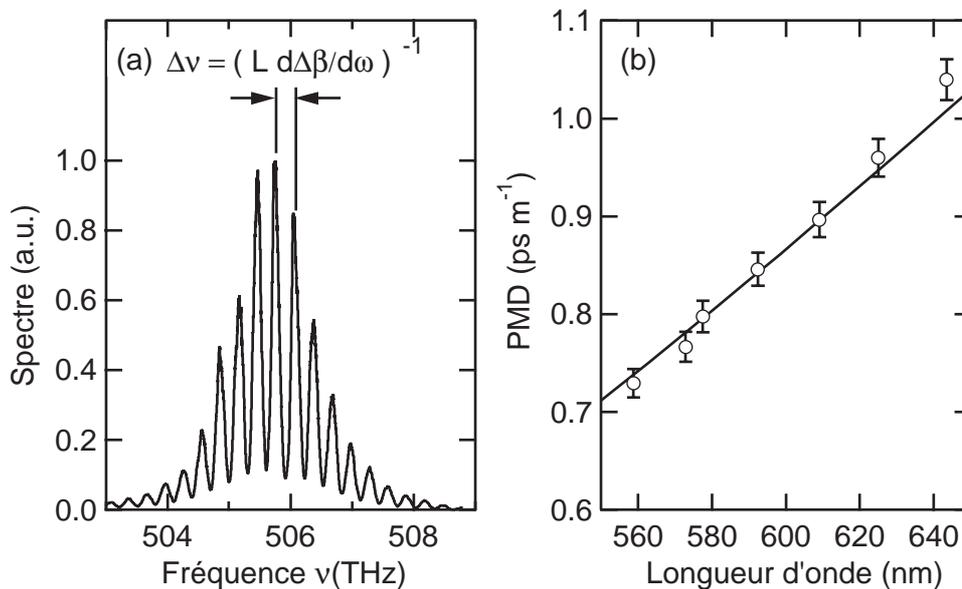


FIG. 1 – (a) Spectre de sortie de la PCF, modulé par l'interférence entre les deux modes de polarisation orthogonale. (b) PMD mesurée en fonction de la longueur d'onde (cercles) comparée aux calculs numériques basés sur un coeur de forme elliptique (ligne continue).

Dans toutes nos expériences, l'échantillon de PCF Lucent RW-1 est de longueur

$L = (3,93 \pm 0,01)$ m. Dans un premier temps, nous avons vérifié que la fibre maintenait la polarisation et déterminé que ses axes propres de biréfringence étaient bien définis et séparés par un angle de $(90 \pm 1)^\circ$. La source lumineuse large bande servant à mesurer la PMD, accordable sur 545-640 nm, est basée sur la génération d'ordres Stokes Raman multiples en injectant une source laser nanoseconde de forte puissance dans une fibre standard unimodale [11]. Les ordres Raman générés sont linéairement polarisés et ont une largeur de bande $\Delta\lambda \approx 3$ nm. L'injection équilibrée sur chaque axe propre de polarisation de la PCF est ajustée au moyen d'une lame demi-onde. La figure 1(a) montre un spectre cannelé typique obtenu pour une longueur d'onde d'entrée de 593 nm (506 THz). La mesure de la PMD $d\Delta\beta/d\omega$ à partir de ce spectre présente une précision meilleure que 2 %. Dans la figure 1(b), les cercles représentent l'ensemble des mesures de PMD, effectuées sur la plage spectrale 545-640 nm.

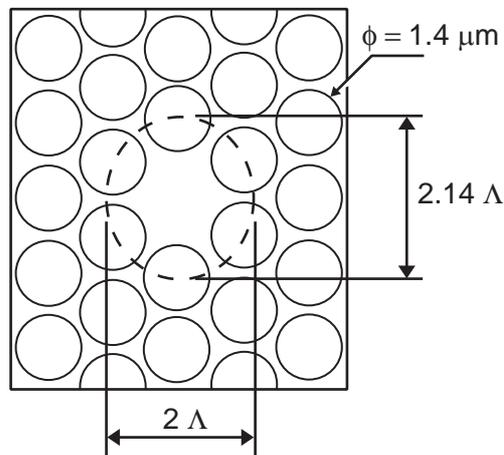


FIG. 2 – Structure photonique utilisée pour les calculs numériques. Le cœur de la PCF est de forme légèrement elliptique.

Ces mesures peuvent être utilisées pour tester la modélisation numérique des propriétés vectorielles de la PCF. Dans notre modèle, la méthode de *Galerkin* a été appliquée à l'équation d'Helmoltz vectorielle pour déterminer le champ électrique des modes guidés de la PCF ainsi que leur constante de propagation à partir de la structure représentée en figure 2. Cette structure est caractérisée par des trous d'air de diamètre $\phi = 1,4 \mu\text{m}$ et un paramètre $\Lambda = 1,6 \mu\text{m}$. Dans une précédente modélisation [7], le premier hexagone de trous d'air était inscrit sur un cœur circulaire ; dans ce cas, Λ était l'espacement périodique entre les trous. Cependant, l'observation minutieuse d'images de la PCF Lucent RW-1 obtenues au microscope électronique montre que la fibre se modélise de manière plus exacte en inscrivant le premier hexagone de trous d'air à l'intérieur d'un cœur elliptique d'excentricité comprise entre 5 et 10 %. En général, la biréfringence dans les fibres à cœur elliptique provient aussi bien de la forme non circulaire du guide que des contraintes asymétriques introduites. En raison de la grande quantité d'air dans la structure de la PCF, nous supposons en revanche que ces contraintes procurent un effet négligeable par rapport à la forme du guide d'onde. Nous négligeons également les variations de la taille et de la forme des trous d'air le long de la fibre. Bien que dans une analyse complète tous ces effets devraient être inclus, nous trouvons que le modèle simple présenté ici, supposant

que la biréfringence provient uniquement de l'ellipticité du coeur avec une excentricité de 7 %, reproduit avec succès les résultats expérimentaux.

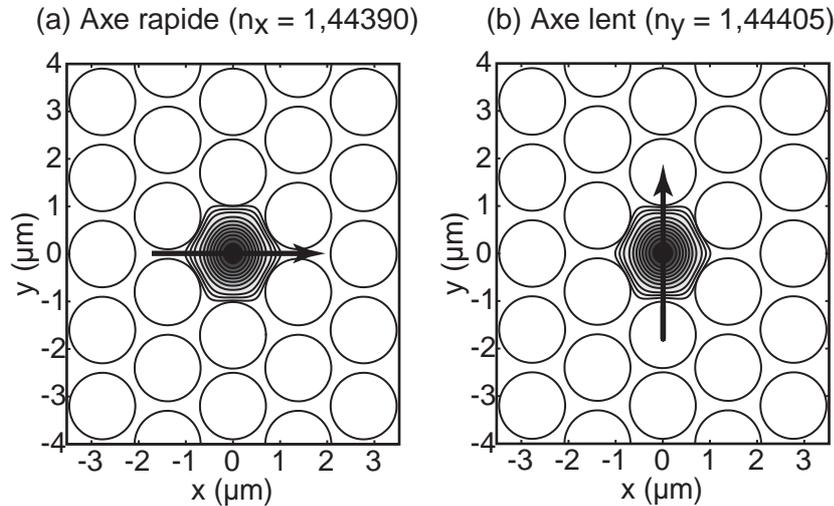


FIG. 3 – (a) et (b) représentent les profils de modes à 585 nm pour les axes rapide et lent et les directions de polarisation respectives.

Les calculs numériques ont été effectués pour caractériser les deux modes propres polarisés perpendiculairement sur l'intervalle de longueurs d'onde 545-640 nm. Les figures 3(a) et (b) représentent la distribution du champ électrique de ces deux modes à 580 nm. La biréfringence théorique $\Delta n \sim 10^{-4}$ sur ce domaine spectral est comparable à celle des fibres standards fortement biréfringentes et, comme pour les fibres conventionnelles à coeur elliptique, le mode d'indice de réfraction le plus élevé est celui dont la polarisation est parallèle au grand axe de l'ellipse. Il faut noter que, bien que les méthodes numériques sont connues pour introduire des effets de biréfringence numérique [3], l'utilisation d'un minimum de 2^{12} fonctions de base dans nos simulations nous permet de minimiser cette biréfringence numérique, dont la valeur de l'ordre de 10^{-6} est négligeable par rapport à la biréfringence introduite par le coeur elliptique. A partir des constantes de propagation calculées des modes propres de polarisation, la PMD théorique $d\Delta\beta/d\omega$, représentée sur la figure 1(b) par une courbe en trait continu, est facilement calculable. La comparaison des valeurs théoriques et expérimentales montre un très bon accord entre les caractéristiques mesurées et calculées de la PMD et confirme la validité du modèle à coeur elliptique pour la structure de la PCF.

3 Instabilité de modulation vectorielle

Une confirmation supplémentaire de la modélisation correcte de la fibre est obtenue par l'étude de l'instabilité de modulation vectorielle non-linéaire. Ce phénomène est observé quand une source de pompage continue intense est injectée de façon équilibrée le long des axes lent et rapide d'une fibre fortement biréfringente. Il provoque une modulation temporelle de l'amplitude de la pompe, caractérisée par l'apparition de bandes spectrales latérales [11]. Le décalage en fréquence des bandes latérales par rapport à la fréquence de la

pompe dépend de la non-linéarité de la fibre, de sa dispersion de vitesse de groupe moyenne sur chacun des deux axes, et de sa PMD. Ainsi, la validité des propriétés calculées de la PCF peut être testée par comparaison des résultats théoriques et expérimentaux. Dans notre montage, la pompe quasi-continue est en fait une source délivrant des impulsions nanoseconde de puissance crête 90 W à la longueur d'onde de 624,5 nm ($\Delta\lambda \approx 10^{-3}\text{nm}$) à un taux de répétition de 25 Hz [13]. Ces impulsions sont injectées de manière équilibrée le long des axes rapide et lent. La figure 4(a) montre le spectre de sortie obtenu, illustrant clairement la génération paramétrique des deux bandes latérales décalées spectralement de 3,90 THz par rapport à la pompe. Ces bandes latérales sont polarisées orthogonalement et leurs directions de polarisation sont parallèles aux axes propres de la PCF comme prévu par la théorie.

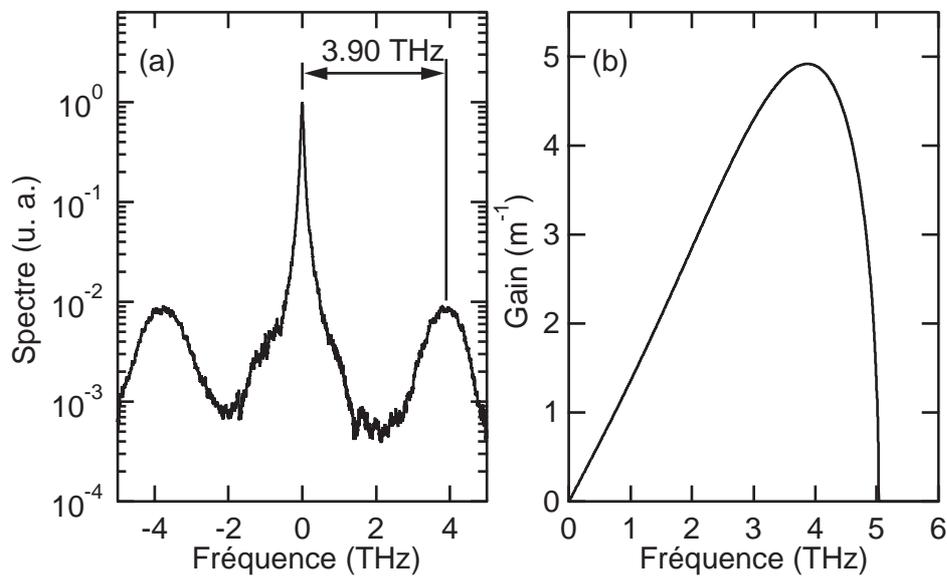


FIG. 4 – (a) Spectre mesuré à 624,54 nm en sortie de la PCF, montrant l'apparition de bandes latérales d'instabilité de modulation décalées de 3,90 THz. (b) Courbe de gain d'instabilité de modulation vectorielle obtenue à partir des paramètres calculés de la biréfringence de la PCF.

Ces résultats expérimentaux ont été comparés avec le calcul théorique du gain paramétrique d'instabilité de modulation, calculé à partir de la relation vectorielle de dispersion [11]. Pour ces calculs, nous avons supposé que le cœur de la PCF avait une aire effective $A_{eff} = 1,8 \mu\text{m}^2$ et un indice de réfraction non-linéaire $n_2 = 3 \times 10^{-20} \text{m}^2 \cdot \text{W}^{-1}$, identique à celui de la silice. Les valeurs calculées de la dispersion de vitesse de groupe moyenne et de la PMD à la longueur d'onde de la pompe sont respectivement $\beta_2 = 0,0265 \text{ps}^2 \cdot \text{m}^{-1}$ et $d\Delta\beta/d\omega = 0,947 \text{ps} \cdot \text{m}^{-1}$. Cette valeur de β_2 est en très bon accord avec des mesures récentes effectuées sur cette même PCF [9]. La courbe spectrale de gain théorique, représentée en figure 4(b), prédit un gain maximum à 3,95 THz en excellent accord avec les mesures expérimentales. Dans les fibres conventionnelles, de fortes puissances de pompe sont nécessaires pour observer un si grand décalage spectral des bandes d'instabilité de modulation. Ce décalage est observé à relativement faible puissance dans la PCF à cause du fort confinement du mode fondamental, procurant un coefficient non-linéaire élevé.

4 Conclusion

Bien que la plupart des études expérimentales sur les fibres microstructurées ont portés jusqu'à présent sur leurs caractéristiques scalaires de propagation, l'étude complète de leurs propriétés biréfringentes devient maintenant nécessaire car ces fibres commencent à être utilisées dans des applications pratiques diverses. Les résultats présentés ici montrent qu'un modèle simple supposant des trous d'air circulaires inscrits dans un coeur faiblement elliptique permet de décrire correctement les effets de propagation linéaire et non-linéaire qui dépendent spécifiquement de la biréfringence de la PCF. Les techniques expérimentales décrites dans ce travail peuvent être utilisées pour caractériser la biréfringence d'autres types de fibres microstructurés.

Références

- [1] A. Ortigosa-Blanch, J. C. Knight, W. J. Wadsworth, J. Arriaga, B. J. Mangan, T. A. Birks, P. St. J. Russell, *Opt. Lett.* **25**, 1325-1327 (2000).
- [2] A. Bjarklev, J. Broeng, S. E. Barkou, E. Knudsen, T. Søndergard, T. W. Berg, M. G. Dyndgaard, *J. Opt. A: Pure and Applied Optics* **2**, 584-588 (2000).
- [3] M. J. Steel and R. M. Osgood, *Opt. Lett.* **26**, 229-231 (2001).
- [4] M. J. Steel, T. P. White, C. Martijn de Sterke, R. C. McPhedran, L. C. Botten, *Opt. Lett.* **26**, 488-490 (2001).
- [5] T. P. Hansen, J. Broeng, S. E. B. Libori, E. Knudsen, A. Bjarklev, J. R. Jensen, H. Simonsen, *IEEE Photon. Technol. Lett.* **13**, 588-590 (2001).
- [6] J. K. Ranka, R. S. Windeler, A. J. Stentz, *Opt. Lett.* **25**, 25-27 (2000).
- [7] L. Provino, J. M. Dudley, H. Maillotte, N. Grossard, R. S. Windeler, B. J. Eggleton, *Elect. Lett.* **37**, 558-560 (2001).
- [8] I. Hartl, X. D. Li, C. Chudoba, R. K. Ghanta, T. H. Ko, J. G. Fujimoto, J. K. Ranka, R. S. Windeler, *Opt. Lett.* **26**, 608-610 (2001).
- [9] J. E. Sharping, M. Fiorentino, A. Coker, P. Kumar, R. S. Windeler, *Opt. Lett.* **26**, 1048-1050 (2001).
- [10] J. K. Ranka, R. S. Windeler, A. J. Stentz, *Opt. Lett.* **25**, 796-798 (2000).
- [11] G. P. Agrawal, *Nonlinear Fiber Optics* (3rd Edition), Academic Press, New York (2001).
- [12] X. D. Cao, D. D. Meyerhofer, *Opt. Lett.* **19**, 1837-1839 (1994).
- [13] S. Pitois, G. Millot, P. Grellu, M. Haelterman, *Phys. Rev. E* **60**, 994-1000 (1999).

Un exemple d'autofocalisation en optique non-linéaire?

Éric Dumas

*Université de Tours,
Laboratoire de Mathématiques et Physique Théorique,
Parc de Grandmont,
37200 Tours
dumas@gargan.math.univ-tours.fr*

Résumé

En optique non-linéaire, l'approximation de l'enveloppe lentement variable permet d'approcher (lorsque la longueur d'onde ε tend vers zéro) les champs, solutions des équations de Maxwell, par des profils solutions d'une équation de Schrödinger non-linéaire (NLS). Selon le modèle de départ, cette équation peut être critique et focalisante, *i.e.* admettre des solutions explosives. Mais même dans ce cas, à ε fixé, les champs peuvent être définis pour tout temps, et réguliers (par exemple dans le cas des modèles de Maxwell-Bloch [6] et de l'oscillateur anharmonique à non-linéarité saturée [9]).

On analyse ici finement le phénomène d'autofocalisation sur un exemple d'équation d'ondes en dimension 2 d'espace –ces techniques se généralisant aux modèles usuels en dimension plus grande. On donne une nouvelle représentation des champs sous forme de profils oscillants mettant en évidence des rayons focalisants, et on évalue le temps pendant lequel l'approximation par la solution explosive de NLS est valide, soit jusqu'à un temps de l'ordre d'une puissance négative de $\ln(1/\varepsilon)$ avant l'explosion (lorsque la non-linéarité n'est pas saturée).

1 Introduction

Un modèle standard décrivant la propagation d'une onde électromagnétique consiste à coupler les équations de Maxwell avec un oscillateur anharmonique (*cf.* [3], [2]):

$$\partial_t E = -\operatorname{rot} B - \partial_t P \quad (37)$$

$$\partial_t B = \operatorname{rot} E \quad (38)$$

$$\varepsilon^2 \partial_t^2 P + \nabla_P V(P) = \gamma E. \quad (39)$$

Ici, (E, B) est le champ électromagnétique, et P est la polarisation du milieu. Les champs physiquement pertinents vérifient également $\operatorname{div}(E + P) = \operatorname{div} B = 0$, annulation satisfaite pour tout temps dès qu'elle l'est à un instant. La réponse de la matière correspond à un oscillateur, de même fréquence $1/\varepsilon$ que l'onde.

L'approximation de l'enveloppe lentement variable (voir [4], [10]) mène à une équation de *Schrödinger non-linéaire* (NLS). Le potentiel V est remplacé par son développement de Taylor à l'origine,

$$V(P) \simeq \alpha |P|^2 - \beta |P|^4,$$

et le vecteur $u = (E, B, P, \varepsilon \partial_t P)$ est approché par $u_{app} = \varepsilon \mathcal{U}(\varepsilon t, y_1, y_2) e^{i \frac{y_3 + t}{\varepsilon}}$, $\mathcal{U} = (\mathcal{E}, \mathcal{B}, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$. Les champs doivent être polarisés,

$$\mathcal{E} = (K, L, 0), \quad \mathcal{B} = c_1(L, -K, 0), \quad \mathcal{P} = c_2(K, L, 0), \quad \mathcal{Q} = ic_3(K, L, 0),$$

et les amplitudes $K(T, y_1, y_2), L(T, y_1, y_2)$ sont solutions de :

$$i \partial_t(K, L) - C_1 \Delta_{y_1, y_2}(K, L) - C_2(|K|^2 + |L|^2)(K, L) = 0. \quad (40)$$

C'est une équation de Schrödinger critique en dimension 2 d'espace, éventuellement *focalisante* (lorsque $C_1 C_2 > 0$), selon la valeur des coefficients du modèle.

Cette approximation peut être justifiée rigoureusement (voir [5]), pour ε assez petit, sur tout intervalle de temps $[0, T_1/\varepsilon]$ si la solution de (40) est régulière sur $[0, T_1]$. De plus, on considère généralement un temps T_* d'explosion de la solution de (40) comme un indice d'*autofocalisation* : une variation de l'indice de réfraction du milieu courbe les rayons lumineux qui se concentre vers la région d'indice maximal.

Pourtant, l'hypothèse qui permet d'obtenir (40) n'est plus vérifiée dans cette région, où l'amplitude devient trop importante. Le champ électromagnétique peut même être défini pour tout temps (et régulier), même si le profil \mathcal{U} explose en temps fini : dans [6], Donnat et Rauch considèrent les équations de Maxwell-Bloch. Dans [9], Joly, Métivier et Rauch traitent le cas de (37)-(39), quand le potentiel V est *saturé* : si les dérivées secondes et troisièmes de V sont bornées, toutes données initiales dans $H^2(\mathbb{R}^3)$ engendrent des solutions globales de (37)-(39).

On se propose d'étudier le mécanisme d'autofocalisation, en évaluant plus précisément le temps pendant lequel l'approximation par l'équation de Schrödinger est valide. On considère un modèle plus simple, une équation d'onde en dimension 2 d'espace :

$$\square u + iF(\partial_t u) = 0, \quad \text{with } F(z) = |z|^4 z. \quad (41)$$

Théorème 1.1 *Soit $t_* > 0$. On pose*

$$a_0(t, Y) := (t_* - t)^{-1/2} e^{i \frac{Y^2 - 1}{2(t_* - t)}} R \left(\frac{Y}{t_* - t} \right), \quad \text{with } R(Y) = \frac{3^{1/4}}{\sqrt{\text{ch}(2Y)}}. \quad (42)$$

Il existe $\varepsilon_0, C > 0$ tels que pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$, le problème de Cauchy associé à (41), avec pour données initiales

$$u_{|t=0}^\varepsilon = \varepsilon a_0(0, y_2/\sqrt{\varepsilon}) e^{i y_1/\varepsilon}, \quad (43)$$

$$\partial_t u_{|t=0}^\varepsilon = \frac{i}{\varepsilon} u_{|t=0}^\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon) \text{ dans } \mathcal{S}(\mathbb{T}_\varepsilon \times \mathbb{R}), \text{ avec } \mathbb{T}_\varepsilon \text{ le tore } \mathbb{R}/(2\pi\varepsilon), \quad (44)$$

admet une unique solution régulière $u^\varepsilon \in C^1(\mathcal{S}(\mathbb{T}_\varepsilon \times \mathbb{R}))$ for $t \in [0, t_ - C(\ln 1/\varepsilon)^{-1/3}]$. De plus, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, on a l'approximation :*

$$\left\| \partial_t u^\varepsilon - i a_0(t, y_2/\sqrt{\varepsilon}) e^{i \frac{y_1 + t}{\varepsilon}} \right\|_{L_y^\infty} = o(\|a_0(t)\|_{L^\infty}).$$

Le lien avec (37)-(39) ci-dessus sera plus clair après quelques remarques :

i) Le même type de résultat est valide en dimension plus grande, pour des systèmes tels que (37)-(39), avec des non-linéarités plus générales : voir la remarque 2.1.

ii) À partir du profil $a_0(t, Y)e^{i\theta}$, dans lequel on substitue $Y = y_2/\sqrt{\varepsilon}$, $\theta = (y_1 + t)/\varepsilon$, on retrouve la formulation "en temps long" menant à (40) après un changement d'échelle : on remplace (t, y) par $\sqrt{\varepsilon}(t, y)$, et $\sqrt{\varepsilon}$ par ε . On a préféré ce formalisme ici afin de donner une autre description de u^ε , en termes de phases courbes et de rayons focalisants. Voir le paragraphe 3, ainsi que [7].

iii) L'équation (41) ne preserve que $\|u\|_{L^2}$. Ce n'est pas suffisant pour garantir l'existence globale de u . Quand le temps d'existence maximal t^* d'une solution régulière u est fini, on a $\|u(t)\|_{L^\infty} \xrightarrow{t \rightarrow t^*} 0$. Le théorème ne prouve pas que u^ε explose à $t = t_*$ (à ε fixé), mais montre une amplification de $\|u\|_{L^\infty}$ par un facteur $(\ln 1/\varepsilon)^{-1/6}$ entre $t = 0$ et $t = t_* - C(\ln 1/\varepsilon)^{-1/3}$. Cela élimine les méthodes standard pour prouver l'existence globale, comme celles utilisées dans le cas de données petites (voir [11]).

iv) On a existence globale dans l'autre limite : ε fixé, $t_* \rightarrow 0$, qui correspond à des données initiales petites. La saturation des non-linéarités, obtenue en remplaçant $F(z)$ par $G^\varepsilon(z) = \frac{|z|^4 z}{1 + \varepsilon z^3}$, assure également l'existence globale de u^ε , comme dans [9]. Le mécanisme semble être le suivant : tout d'abord, une concentration due à la focalisation linéaire des rayons ; puis, l'activation des effets non-linéaires par cette amplification. L'explosion dépendra alors de la force de la non-linéarité.

2 Construction du profil explosif

Pour avoir une solution u de (41) sous la forme $u^\varepsilon(x) = \varepsilon a(t, y_2/\sqrt{\varepsilon})e^{i(y_1+t)/\varepsilon}$, on impose :

$$[2i\partial_t - \partial_Y^2]a + \varepsilon\partial_t^2 a + i|ia + \varepsilon\partial_t a|^4(ia + \varepsilon\partial_t a) = 0. \quad (45)$$

Afin de satisfaire cette équation au premier ordre, on cherche alors $a_0(t, Y)$ tel que :

$$[2i\partial_t - \partial_Y^2]a_0 - |a_0|^4 a_0 = 0. \quad (46)$$

C'est l'équation de Schrödinger 1-d critique et focalisante, qui a une solution explicite $b(t, Y) = e^{-it/2}R(Y)$, avec $R(Y) = 3^{1/4}(\operatorname{ch}(2Y))^{-1/2}$.

Mais (46) a une propriété d'invariance pseudo-conforme (voir [8]) :

$$a(t, Y) := \left(t^{1/2}e^{iY^2/2t}b\right) \left(\frac{1}{t_* - t}, \frac{Y}{t_* - t}\right) = (t_* - t)^{-1/2}e^{iY^2/2(t_* - t)}b \left(\frac{1}{t_* - t}, \frac{Y}{t_* - t}\right)$$

est alors une autre solution de (46), qui donne (42).

Remarque 2.1 On a la même construction en dimension N : la transformation pseudo-conforme est $u(t, x) \mapsto t^{-N/2}e^{-i|x|^2/2t}\bar{u}(1/t, x/t)$. L'équation $-\Delta R + R - R^{1+4/N} = 0$ a aussi une solution dans \mathcal{S} , de même que l'équation $-\Delta R + mR + g(R) = 0$, $m = cst$, sous certaines hypothèses sur le comportement de g à l'origine et à l'infini (voir [1]).

3 Focalisation des rayons

On a une autre description des données de (55) :

$$u^\varepsilon|_{t=0} = \varepsilon\tilde{a}_0^0 \left(\frac{y_2}{\sqrt{\varepsilon}}\right) e^{i(y_1 + y_2^2/2t_*)/\varepsilon}, \text{ où } \tilde{a}_0^0(Y, \theta) = t_*^{-1/2}e^{-i/2t_*}R\left(\frac{Y}{t_*}\right).$$

On obtient de même une représentation de $\partial_t u^\varepsilon|_{t=0}$ faisant intervenir la phase *courbe* $y_1 + y_2^2/2t_\star$. Les résultats de [5] donnent alors sur tout intervalle de temps $[0, \underline{t}]$, $\underline{t} < t_\star$, une approximation de u^ε par v^ε :

$$\square v^\varepsilon + iF(\partial_t v^\varepsilon) = 0, \quad (47)$$

$$v^\varepsilon|_{t=0} = u^\varepsilon|_{t=0}, \quad \partial_t v^\varepsilon|_{t=0} = i\sqrt{1 + (y_2/t_\star)^2} v^\varepsilon|_{t=0}. \quad (48)$$

D'autre part, [7] montre que $v^\varepsilon = \varepsilon \tilde{\mathcal{V}}^\varepsilon \left(t, \frac{y_2}{\sqrt{\varepsilon}}, \frac{\phi}{\varepsilon} \right)$, où la phase ϕ est caractéristique pour le d'Alembertien :

$$\partial_t \phi = |\partial_y \phi|, \quad \text{and } \phi|_{t=0} = y_1 + y_2^2/2t_\star.$$

Elle est déterminée implicitement par la méthode de “tracé de rayons” illustrée figure 3. Ces rayons focalisent exactement au temps $t = t_\star$ (engendrant une caustique, où ϕ n'est plus régulière).

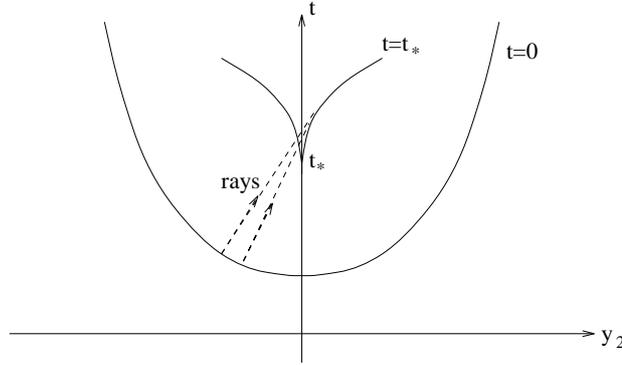


FIG. 1 – Le graphe de $\phi(t, y_1, \cdot)$ à $t = 0$ et à $t = t_\star$.

4 Étapes de la preuve

On va “suivre” la solution approchée explosive (construite au paragraphe 2) jusqu’à une couche limite avant t_\star . Cette couche limite apparaît d’une part pour conserver la cohérence de l’Ansatz (paragraphe 4.4), et ensuite dans l’argument de bootstrap prouvant l’approximation (paragraphe 4.5).

4.1 Développement Brillouin-Kramers-Wentzel

Pour obtenir l’existence d’une solution exacte de (41), on doit d’abord construire une solution approchée de (45) à un ordre plus élevé que le premier profil u_0 . C’est pourquoi l’on introduit un correcteur :

$$u_{app}^\varepsilon(x) = \varepsilon \mathcal{U}_{app}^\varepsilon(t, y_2/\sqrt{\varepsilon}, (y_1 + t)/\varepsilon), \quad \mathcal{U}_{app}^\varepsilon = u_0 + \varepsilon u_c = (a_0 + \varepsilon a_c)(t, Y) e^{i\theta}.$$

Proposition 4.1 *On a le développement BKW (formel) :*

$$\square u_{app}^\varepsilon + i|\partial_t u_{app}^\varepsilon| \partial_t u_{app}^\varepsilon = (\mathcal{E}_0 + \varepsilon \mathcal{E}_1 + \mathcal{R}^\varepsilon)(t, y_2) e^{i \frac{y_1+t}{\varepsilon}}, \quad (49)$$

avec :

$$\mathcal{E}_0(t, Y) = 2i\partial_t a_0 - \partial_Y^2 a_0 - |a_0|^4 a_0, \quad (50)$$

$$\mathcal{E}_1(t, Y) = 2i\partial_t a_c - \partial_Y^2 a_c + \partial_t^2 a_0 + G(a_0, a_c), \quad (51)$$

$$G(a_0, a_c) = -|a_0|^4(\partial_t a_0 + ia_c) + 4ia_0|a_0|^2\Re(a_0(\partial_t \bar{a}_0 + i\bar{a}_c)), \quad (52)$$

$$\mathcal{R}^\varepsilon(t, Y) = \varepsilon^2 \partial_t^2 a_c + iF((i + \varepsilon\partial_t)(a_0 + \varepsilon a_c)) + F(a_0) - \varepsilon G(a_0, a_1). \quad (53)$$

Il existe a_0 et a_c tels que $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}_1 = 0$: $a_0 \in C^\infty([0, t_*[\times \mathbb{R})$ est donné par (42), et $\mathcal{E}_1 = 0$ est une équation de Schrödinger linéaire, qui a une unique solution pour tout $a_c|_{t=0} \in L^2(\mathbb{R})$.

Pour obtenir une solution exacte de (41) proche de $\varepsilon u_0(t, y_2/\sqrt{\varepsilon}, (y_1+t)/\varepsilon)$, on choisit :

$$a_c|_{t=0} = 0, \quad (54)$$

et les données les plus simples pour u^ε :

$$u^\varepsilon|_{t=0} = u_{app}^\varepsilon|_{t=0}, \quad \partial_t u^\varepsilon|_{t=0} = \partial_t u_{app}^\varepsilon|_{t=0}. \quad (55)$$

4.2 Changement d'échelle

On cherche à évaluer les temps pour lesquels $\|\partial_t u^\varepsilon\|_{L^\infty}$ est finie. Pour donner une approximation de u^ε , on pose $v^\varepsilon := u^\varepsilon - u_{app}^\varepsilon$, et on essaie de satisfaire $\|\partial_t v^\varepsilon\|_{L^\infty} \ll \|\partial_t u_{app}^\varepsilon\|_{L^\infty}$.

L'équation d'ondes dont v^ε est solution donne des estimations d'énergie pour $\partial_{t,y} v^\varepsilon$, qui contrôle $\|\partial_t v^\varepsilon\|_{L^\infty}$, par injection de Sobolev. Cependant, puisque les données initiales sont $2\pi\varepsilon$ -périodiques en y_1 , u^ε , u_{app}^ε et v^ε aussi. Ainsi, en estimant $\|\partial_t v^\varepsilon\|_{L^\infty}$ par $\|\partial_t v^\varepsilon\|_{H^s}$, on perd un facteur ε^s . On pose donc

$$(V^\varepsilon, U^\varepsilon, U_{app}^\varepsilon, R^\varepsilon)(t, y) := (v^\varepsilon, u^\varepsilon, u_{app}^\varepsilon, r^\varepsilon)(t, \varepsilon y_1, \sqrt{\varepsilon} y_2)$$

(où $r^\varepsilon(x) = \mathcal{R}^\varepsilon(t, y_2/\sqrt{\varepsilon})e^{i\frac{y_1+t}{\varepsilon}}$, Proposition 4.1).

Notation 4.1 On écrira $a \preceq b$ s'il existe une constante C telle que $a \leq Cb$.

4.3 Estimations d'énergie pour l'erreur $\partial_t V^\varepsilon$

En soustrayant les équations (41) et (49), et en utilisant la formule de Taylor $F(z) = |z|^4 z$ (en tant que fonction différentiable sur \mathbb{R}^2), on a :

$$(\partial_t^2 - \varepsilon^{-2}\partial_{y_1}^2 - \varepsilon^{-1}\partial_{y_2}^2)V^\varepsilon = -i \left(\int_0^1 dF(\partial_t U_{app}^\varepsilon + r\partial_t V^\varepsilon) dr \right) \cdot \partial_t V^\varepsilon - R^\varepsilon. \quad (56)$$

On obtient, par $\int_{(-\pi \times \pi) \times \mathbb{R}} 2\Re(\partial^2(56) \times \partial_t \partial^2 \bar{V}^\varepsilon) dy$, où ∂^2 est l'ensemble des dérivations en y d'ordre inférieur ou égal à 2, puis par le lemme de Gronwall :

$$\|\partial_t V^\varepsilon\|_{L^\infty} \preceq N(V^\varepsilon, \partial_y V^\varepsilon, \partial_y^2 V^\varepsilon) \preceq e^{CJ(t)} \int_0^t \|R^\varepsilon\|_{W^{2,\infty}} dt', \quad (57)$$

où $J(t) = \int_0^t \left[I_4 + I_3 \left(\|\partial_t \partial_y U_{app}^\varepsilon\|_{L^2} + \|\partial_t \partial_y^2 U_{app}^\varepsilon\|_{L^2} + \|\partial_t \partial_y U_{app}^\varepsilon\|_{L^2} \right) \right] dt'$,

et $I_k := \|\partial_t U_{app}^\varepsilon\|_{L^\infty}^k + \|\partial_t V^\varepsilon\|_{L^\infty}^k$.

4.4 Couche limite pour le correcteur

On s'assure tout d'abord que dans les expressions ci-dessus, U_c^ε peut être négligé devant U_0^ε (et, donc, U_{app}^ε remplacé par U_0^ε). Cela est à nouveau obtenu par estimations d'énergie, pour a_c , donné par $\mathcal{E}_1 = 0$. On contrôle $\|a_c\|_{H_Y^s}$ et $\|\partial_t a_c\|_{H_Y^s}$, $s = 1, 2$ par les normes de a_0 , connues explicitement : il existe $C > 0$, $\mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$\|a_c, \partial_t a_c\|_{H_Y^2} \leq (t_\star - t)^\mu e^{C(t_\star - t)^{-3}}, \quad (58)$$

ce qui donne la couche limite $t_\star - t \leq C(\ln 1/\varepsilon)^{-1/3}$ (avec C assez grand).

4.5 Obtention de l'approximation

On obtient une relation $\varphi \leq \psi e^{\varphi^4}$ pour $\varphi(t) := C\|\partial_t V^\varepsilon\|_{L^\infty((0,t) \times \mathbb{R}^2)}$, et ψ de la forme $\varepsilon^2(t_\star - t)^\mu e^{C(t_\star - t)^{-2}}$. Comme $\varphi = 0$ à $t = 0$, $\|\partial_t V^\varepsilon\|_{L^\infty} \leq \|\partial_t U_0^\varepsilon\|_{L^\infty}$ est satisfait dès que $t_\star - t \leq C'(\ln 1/\varepsilon)^{-1/2}$, qui est une couche limite "plus fine" que la précédente.

Références

- [1] Berestycki and P.-L. Lions. Existence d'ondes solitaires dans des problèmes non-linéaires du type Klein-Gordon. *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences, Série A*, 287:503–506, 1978.
- [2] N. Bloembergen. *Nonlinear optics*. W.A. Benjamin Inc., New York, 1965.
- [3] R. Boyd. *Nonlinear optics*. Academic Press, 1992.
- [4] P. Donnat. Quelques contributions mathématiques en optique non linéaire. Thèse de l'École Polytechnique, 1994.
- [5] P. Donnat, J.L. Joly, G. Métivier, and J. Rauch. Diffractive nonlinear geometric optics. *Séminaire Equations aux Dérivées Partielles, Ecole Polytechnique, Palaiseau*, 1995-1996.
- [6] P. Donnat and J. Rauch. Global solvability of the Maxwell-Bloch equations from nonlinear optics. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 136(3), 1995.
- [7] E. Dumas. Nonlinear diffractive optics with curved phases: Beam dispersion and transitions between light and shadow. *To appear*.
- [8] J. Ginibre and G. Velo. On a class of nonlinear Schrödinger equations. I: The Cauchy problem. *Journal of Functional Analysis*, 32, 1979.
- [9] J.L. Joly, G. Métivier, and J. Rauch. Global solvability of the anharmonic oscillator model from nonlinear optics. *SIAM J. Math. Anal.*, 227(4), 1996.
- [10] Alan C. Newell and Jerome V. Moloney. *Nonlinear optics*. Addison-Wesley Publishing Company Advanced Book Program, Redwood City, CA, 1992.
- [11] W. Strauss. *Nonlinear wave equations*. Am. Math. Soc., Providence, 1989.

Mise en œuvre d'un générateur de chaos opto-électronique haute fréquence pour les télécommunications optiques sécurisées

É. Genin, L. Larger et J.P. Goedgebuer

*Laboratoire d'Optique P.M. Duffieux, UMR 6603
Institut des Microtechniques de Franche-Comté, Université de Franche-Comté,
16, route de Gray, 25030 Besançon
ericgenin@yahoo.fr*

Résumé

Dans cet article sont présentés deux systèmes dynamiques non-linéaires à retard dédiés à la génération contrôlée d'un chaos de grande dimension. L'intérêt des systèmes présentés est prouvé théoriquement par des simulations numériques. Ensuite, on donne les considérations expérimentales nécessaires pour la réalisation du générateur de chaos choisi, ainsi que les premiers résultats expérimentaux obtenus.

1 Introduction

Du fait du développement actuel des télécommunications et plus particulièrement de l'internet, on a de plus en plus besoin de sécuriser les données transmises.

Ces dernières années ont connu un essor important dans le domaine de la cryptographie, c'est ainsi que sont apparus les systèmes de cryptage par chaos basés sur des dynamiques non-linéaires. De tels systèmes ont prouvé leur viabilité que ce soit en optique [1], [2] ou en électronique.

Les dispositifs de cryptage actuels ont permis d'effectuer des opérations de codage/décodage de quelques dizaines de kHz à plusieurs centaines de MHz . Le but du système qui va être présenté dans la suite est de réaliser un générateur de chaos pouvant travailler jusqu'à des fréquences d'une dizaine de GHz permettant de masquer des signaux de quelques $Gbit/s$. Tout d'abord, nous allons présenter les modèles proposés pouvant satisfaire le cahier des charges, puis nous donnerons les modèles théoriques associés débouchant sur des simulations numériques. Enfin, nous étudierons les conditions nécessaires à la réalisation expérimentale du générateur de chaos et nous donnerons les premiers résultats expérimentaux.

2 Les systèmes proposés

Le but de ce travail de recherche est de mettre au point un générateur de chaos opto-électronique permettant de disposer d'une dynamique à large spectre sur plusieurs GHz .

2.1 Etude théorique

Le système dynamique choisi pour cette étude est de type non-linéaire à retard, ce qui garantit la possibilité de générer un hyperchaos. Cette classe particulière de dynamique a de plus déjà fait ses preuves au laboratoire [1] [2]. Une des premières solutions étudiée a été le NALM(Non-linear Amplifying Loop Mirror)[3] qui, lorsqu'il est soumis à une

rétroaction optique, permet d'atteindre un régime chaotique. Ce dispositif a l'avantage d'être tout optique (large bande), néanmoins il reste difficile à réaliser expérimentalement car il est nécessaire d'utiliser un amplificateur optique ayant une puissance de saturation minimum de 30 dBm (difficile à atteindre pour les longueurs d'onde télécom). De ce fait, les systèmes présentés dans la suite sont des générateurs de chaos opto-électroniques et présentent une double contre-réaction retardée, une optique et une électronique comme dans la référence [4].

Dans un premier temps, le laser utilisé sera fortement cohérent de telle sorte que la contre-réaction optique génère des interférences. Les deux architectures proposées sont présentées sur la figure 1. Ensuite, nous utiliserons un laser moins cohérent de manière à ce que la longueur de cohérence L_C de celui-ci soit inférieure à la longueur de la boucle optique L ($L_C \ll L$) suivant le schéma de la figure 2, faisant alors disparaître les interférences de la contre-réaction optique.

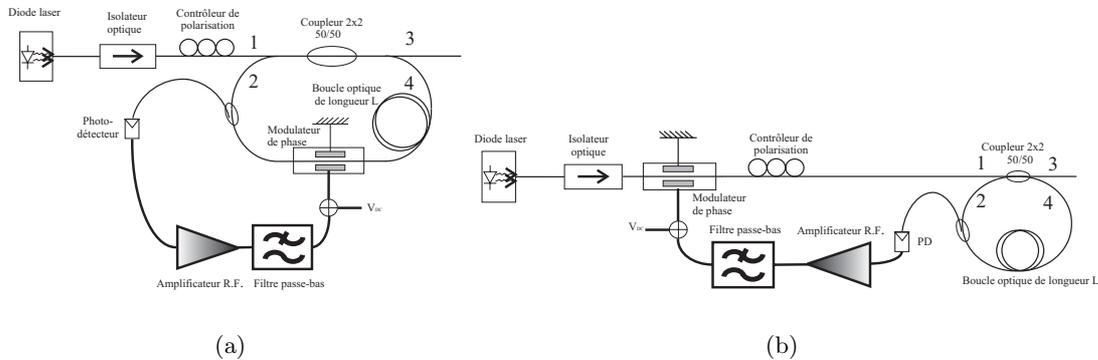


FIG. 1 – (a). Première configuration, (b). Seconde configuration.

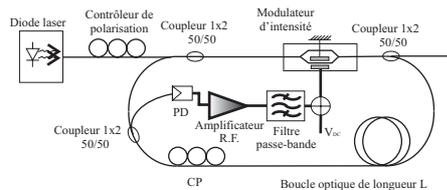


FIG. 2 – Schéma de l'expérience en incohérent.

2.1.1 Système cohérent

Dans ce cas, la non-linéarité optique est réalisée au moyen d'un modulateur de phase comme on peut le voir sur les figures 1.a et 1.b. Cette non-linéarité est produite par une interférence (contre-réaction optique cohérente), dont le déphasage est défini par la tension appliquée à un modulateur de phase (contre-réaction opto-électronique et électro-optique). Ces deux architectures restent très proches.

En ce qui concerne le générateur de la figure 1.a, on a placé le modulateur à l'intérieur de la boucle optique et dans le second cas, à l'extérieur de celle-ci afin de limiter sa longueur

et d'éviter les problèmes de fluctuation de la puissance de sortie due à l'environnement de la fibre (variations de la biréfringence induites par les variations de température ou les vibrations extérieures). Dans ce cas, on est en présence d'un Fabry-pérot en régime transitoire lorsque la modulation est plus rapide que le retard temporel T . Dans un premier temps, une modélisation du système étudié va être donnée. Ces équations sont issues de la théorie décrite par Ikeda dans la référence [5]. Dans la suite, E_i représentera le champ électrique sur le port i du coupleur 2X2.

Intéressons-nous au cas où le modulateur de phase est placé dans la boucle. Si on considère que la partie électronique d'amplification et de filtrage est du premier ordre, on a dans le domaine de Laplace:

$$\mathcal{V}(p) = \frac{H_0}{1 + \tau p} I_{PD}(p) \quad (59)$$

Quand on passe dans le domaine temporel, on obtient:

$$\tau \frac{dV}{dt}(t) + V(t) = H_0 P_4 \quad (60)$$

où V est la tension en sortie de la chaîne d'amplification et de filtrage, τ , la constante de temps du dispositif électronique, H_0 , le gain et P_4 , la puissance optique détectée par le photodétecteur.

Etant donné que $P_4 = P_3$ et que $P_3 \propto |E_3|^2$, sachant que $\phi = \pi V/V_\pi$ et en prenant $E_{in} = \sqrt{\beta}$ (β est le paramètre de bifurcation du système) $\phi_0 = \pi V_{DC}/V_\pi$ et $\phi_L = kL$,

$$E_3(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\beta} + i \frac{1}{\sqrt{2}} E_3(t-T) \exp \left[i \left(\frac{\pi V(t-T)}{V_\pi} - \phi_L - \phi_0 \right) \right] \quad (61)$$

On obtient finalement les deux équations caractéristiques du système qui sont:

$$E_3(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\beta} + i \frac{1}{\sqrt{2}} E_3(t-T) \exp \left[i \left(\frac{\pi V(t-T)}{V_\pi} - \phi_L - \phi_0 \right) \right] \quad (62)$$

$$\tau \frac{dV}{dt}(t) = -V(t) + \alpha H_0 |E_3(t-T)|^2 \quad (63)$$

T est le retard temporel induit par la longueur de fibre composant la cavité optique et α , la sensibilité de la photodétection.

De même, dans le cas où le modulateur est à l'extérieur de la boucle, on a:

$$E_4(t) = i \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\beta} \exp \left[-i \frac{\pi V(t-T)}{V_\pi} \right] + \frac{1}{\sqrt{2}} E_4(t-T) \exp(-i(\phi_L - \phi_0)) \quad (64)$$

$$\tau \frac{dV}{dt}(t) = -V(t) + \alpha H_0 |E_3(t-T)|^2 \quad (65)$$

2.1.2 Système incohérent

On considérera ici que le circuit électronique se comporte comme un filtre passe-bande de constantes de temps caractéristiques τ_1 et τ_2 . Compte tenu de la description du système présenté sur la figure 2, le modèle dynamique correspondant à l'oscillateur chaotique s'exprime de la manière suivante:

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1 \tau_2} V(t) - \frac{1}{\tau_1 \tau_2} U(t) + \frac{\alpha H_0}{\tau_1 \tau_2} |E_2(t - T)|^2 \quad (66)$$

$$\frac{dU}{dt} = V(t) \quad (67)$$

$$|E_2(t)|^2 = (\beta + |E_2(t - T)|^2) \sin^2 \left(\frac{\pi V(t - T)}{V_\pi} + \phi_0 \right) \quad (68)$$

3 Simulations numériques

Les simulations relatives au système étudié ont été effectuées en intégrant les modèles dynamiques donnés dans les équations (63)-(65) et (66)-(68) par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 et programmées en langage C pour des raisons de gain de temps.

Un outil important dans la compréhension de la route vers le chaos est le diagramme de bifurcation qui permet de voir rapidement quels sont les régimes dynamiques obtenus pour différentes valeurs de bifurcation β . Il est important de noter que, dans notre étude, le paramètre de bifurcation correspond en fait à la puissance du laser utilisé dans le générateur de chaos ou encore au gain de la contre-réaction opto-électronique.

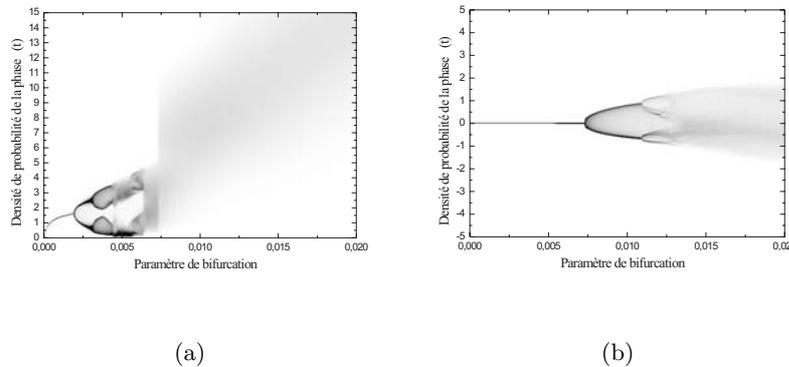


FIG. 3 – (a). Diagramme de bifurcation pour le modulateur de phase dans la boucle optique pour $\phi_0=1,5$ rad, (b). Diagramme de bifurcation pour $\phi_0=0,5$ rad en incoherent.

Sur les figures 3.a et 3.b, on a représenté les diagrammes de bifurcation obtenus respectivement dans le cas des systèmes présentés sur les figures 1 et 2. On remarque sur ces diagrammes l'évolution de la dynamique du système jusqu'au chaos selon une route de type "cascade par dédoublements".

Pour ces simulations, on a pris un pas d'échantillonnage constant $\delta t = 20$ ps ($T=10$ ns) supposé assez petit par rapport à la constante de temps $\tau=159$ ps. Le rapport T/τ élevé garantit la génération d'un hyperchaos ($T/\tau = 62,89 \gg 1$).

En ce qui concerne le résultat donné sur la figure sur la figure 3.b, il a été obtenu pour $\phi_0=0,5$ rad et $V_\pi=8$ V. Sur ce diagramme, on remarque les régimes périodiques d'ordre 2, 4, 8 ainsi que le régime chaotique.

4 Considérations expérimentales et résultats

Dans cette partie, on va tout d'abord étudier les conditions nécessaires à la réalisation du générateur chaotique présenté sur la figure 1, puis les résultats expérimentaux obtenus dans le cas du dispositif de la figure 2.

4.1 1er cas

En faisant une étude détaillée du système proposé, on a remarqué que la stabilité en longueur d'onde du système est très importante du fait du déphasage existant entre les ondes qui interfèrent au niveau du coupleur (ce déphasage dépend de la longueur L de fibre constituant la boucle optique).

Dans cette partie, on va étudier l'impact des fluctuations de la longueur d'onde centrale d'émission du laser utilisé sur la puissance de sortie de la boucle. Pour cela, on a recours à un calcul qui, à partir de fluctuations aléatoires de la longueur d'onde, estime les variations d'intensité en sortie de boucle.

Les résultats sont donnés pour différentes amplitudes de fluctuations de longueur d'onde (cf. figure 4).

Les résultats des simulations nous montrent que pour une fluctuation de 10 MHz autour de la longueur d'onde centrale, c'est-à-dire, une variation de $0,08\text{ pm}$, une variation de 90% de la puissance de sortie en découle, les variations d'intensité obtenues ne sont alors plus déterministes (dues à la dynamique chaotique souhaitée), mais aléatoires, fonction des instabilités du laser. Le système tel qu'il a été présenté nécessite donc une source d'une très grande stabilité ($< 1\text{ MHz}$) et d'une largeur de raie fine ($< 100\text{ kHz}$).

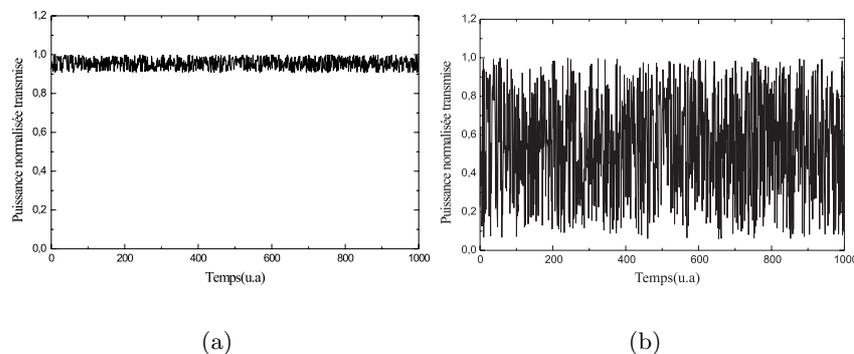


FIG. 4 – Puissance transmise au cours du temps pour des fluctuations de fréquence $\delta\nu$. (a). $\delta\nu=1\text{ MHz}$; (b). $\delta\nu=10\text{ MHz}$.

4.2 2ème cas : résultats expérimentaux

Dans le cas où $L_C \ll L$ (i.e. l'instabilité de la longueur d'onde ne peut plus générer des interférences incontrôlées), on a obtenu des résultats expérimentaux. On présente ici une série temporelle expérimentale, une FFT des signaux ainsi qu'un diagramme de bifurcation sur la figure 5.

On peut noter que la bande de fréquence occupée par le chaos généré atteint plus de 500 MHz . Ce résultat nous permet d'envisager avec optimisme l'objectif que nous nous

sommes fixé, c'est-à-dire, un spectre chaotique de quelques GHz . La figure 5.b nous montre un diagramme de bifurcation expérimental qui se révèle être très proche de celui simulé (cf.figure 3.b). Ceci nous permet de valider le modèle théorique proposé dans cet article, et donc de supposer une bonne maîtrise expérimentale du chaos généré.

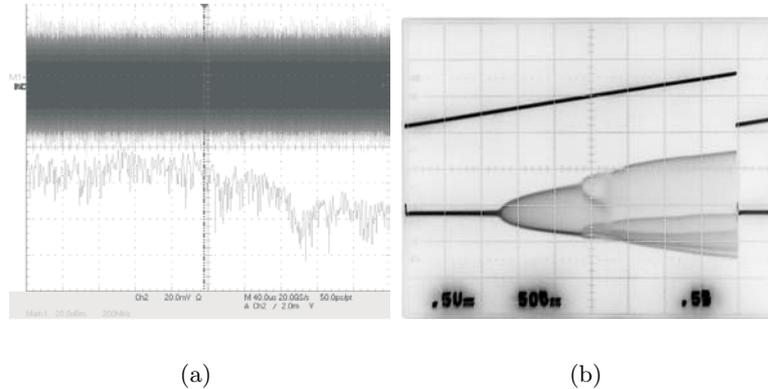


FIG. 5 – (a). FFT et série temporelle ; (b). Diagramme de bifurcation expérimental.

5 Conclusion et perspectives

Dans cet article, on a pu voir l'étude de deux générateurs de chaos opto-électronique dont les performances en terme de bande passante semblent pouvoir atteindre l'objectif que nous nous sommes fixés puisqu'on a déjà obtenu un spectre chaotique dans une bande de fréquence légèrement supérieure à 500 MHz .

Le travail va désormais se poursuivre sur la réalisation expérimentale du générateur chaotique en cohérent puis du système global de cryptographie par chaos comprenant un codeur et un décodeur.

Références

- [1] J.P. Goedgebuer, L. Larger, H. Porte, *Optical cryptosystem based on synchronization of hyperchaos generated by a delayed feedback tunable laser diode*, Phys. Rev. Lett., **80**, 2249 (1998).
- [2] L. Larger, M.W. Lee, J.P. Goedgebuer and Wilhelm Elflein, *Chaos in coherence modulation: bifurcation of an oscillator generating optical delay fluctuations*, J. Opt. Soc. Am. B, **vol. 18**, no. 8, pp. 1063-1068 (2001).
- [3] A.L. Steele, S. Lynch, J.E. Hoad, *Analysis of optical instabilities and bistability in a nonlinear optical fibre loop mirror*, Opt. Comm., **vol. 137**, pp. 136-142 (1997).
- [4] S. Tang and J.M. Liu, *Chaotic pulsing and quasi-periodic route to chaos in a semiconductor laser with delayed opto-electronic feedback*, IEEE Journal of quant. elec., **vol. 37**, no. 3, pp. 329-336 (2001).
- [5] K.Ikeda and H.Daido, *Optical turbulence: Chaotic behavior of transmitted light from a ring cavity*, Phys. rev. lett., **vol. 45**, no. 9, pp.709-712 (1980).

Structures Optiques non-linéaires et fluctuations quantiques dans un Oscillateur Paramétrique Optique

S. Gigan, N. Treps, S. Ducci, M. Martinelli, A. Maitre and C. Fabre
Laboratoire Kastler-Brossel, UPMC, 4 Pl Jussieu case 74, PARIS
 gigan@spectro.jussieu.fr

Résumé

Nous étudions ici expérimentalement la formation de motifs dans un Oscillateur Paramétrique Optique (OPO):

- d'un point de vue classique, nous caractérisons les motifs apparaissant dans différentes configurations géométriques de l'OPO.
- à travers l'étude des corrélations spatiales des faisceaux produits par l'OPO, nous montrons que ces structures sont multimodes d'un point de vue quantique.

Le phénomène de formation spontanée de structures spatiales ou motifs est commun à de nombreux domaines de la physique comme l'hydrodynamique ou l'optique, ainsi qu'en biologie ou en chimie. Les motifs sont des structures autoorganisées qui apparaissent dans les systèmes non-linéaires instables. En Optique, ce phénomène est étudié depuis plus de 20 ans en particulier dans les milieux non-linéaires d'ordre 3 comme les cristaux liquides, les cristaux photoréfractifs, les vapeurs atomiques ou les milieux laser. C'est plus récemment qu'on s'est intéressé à l'apparition de motifs [1, 2] dus à des effets non-linéaires du second ordre comme le doublage de fréquence ou la conversion paramétrique. Dans ces milieux non-linéaires d'ordre 2, des effets quantiques ont été prédits, en particulier des corrélations au niveau quantique entre des parties de faisceaux spatialement séparées [3, 4], ou encore des effets de réduction locale de bruit en dessous du shot noise.

1 Formation des motifs

Une cavité est constituée de deux miroirs de rayon de courbure R séparés par une certaine longueur L . À cette cavité correspond une base de modes propres gaussiens TEM_{pq} . Cependant en général ces modes ne sont pas simultanément résonnants. En particulier lorsqu'on balaye la cavité en longueur, les différents mode TEM_{pq} correspondants à une même fréquence ω ne résonnent pas pour les mêmes longueurs de cavité. Un Oscillateur Paramétrique Optique (OPO) est constitué d'un cristal $\chi^{(2)}$ placé dans une cavité optique. A partir d'un faisceau pompe à ω_0 , l'OPO crée deux faisceaux, le signal et le complémentaire, de fréquences ω_s et ω_p vérifiant la relation $\omega_s + \omega_p = \omega_0$. Le signal et le complémentaire ne peuvent être émis que selon un mode proche de la résonance de la cavité, et ils sont en général monomodes TEM_{00} . Néanmoins, pour certaines géométries de cavité, tous les modes transverses TEM_{pq} sont simultanément résonnants pour une même longueur de cavité et l'OPO est susceptible de générer des faisceaux multimodes qui sont une superposition de modes TEM_{pq} . Ces configurations intéressantes sont dites dégénérées en mode transverses. Nous avons étudié les cavités planes, confocales ($L = R$) et concentriques ($L = 2R$). Aucun effet n'a été observé jusqu'à présent dans la cavité plane.

La formation de motifs dans les OPOs a été largement étudiée théoriquement, tout d'abord dans le cas le plus simple d'un OPO de type I dégénéré en fréquence à miroirs plans pompé par onde plane, puis les modèles ont été raffinés: la double réfraction (ou walk-off) dans les cristaux de type II, la biréfringence de la cavité, la polarisation, le dichroïsme, la propagation dans le cristal ont été pris en compte pour se rapprocher de l'OPO réel.

Experimentalement, des motifs ont été observés et étudiés dans les Amplificateurs Paramétriques Optiques (OPA), c'est-à-dire après un simple passage dans un milieu paramétrique. C'est plus récemment que les premiers motifs ont été observés dans des OPOs opérants en régime multimode transverse.

1.1 L'OPO confocal

L'OPO confocal (figure 1) est constitué de 2 miroirs courbes de même rayon de courbure ($R = 50mm$), séparés par une distance d'environ R . On y introduit un cristal KTP (type II) stabilisé en température. On injecte notre cavité par un TEM_{00} produit par un Laser Nd:YAG doublé à 532 nm. Un des miroirs est monté sur une cale piezo-electrique qui nous permet d'asservir la cavité et de la balayer en longueur à l'échelle de quelques micromètres. La position de la confocalité est différente pour une cavité chaude (injectée

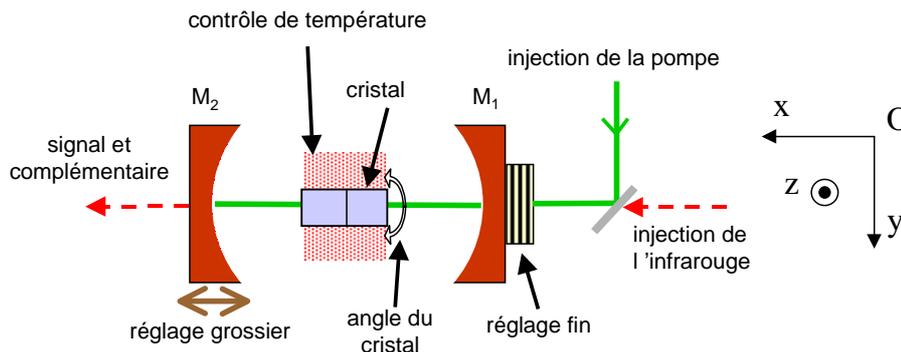


FIG. 1 – schéma de principe de l'OPO

par une pompe puissante) et pour une cavité froide (injectée à faible puissance). En effet la pompe induit des effets de lentille thermique dans le cristal qui modifient la géométrie de la cavité. Ces effets thermiques dépendent fortement de la puissance de la pompe et ont plusieurs effets:

- pour une cavité plus courte que la confocalité, ils permettent en rallongeant la longueur apparente de la cavité de la rapprocher de la confocalité. On élargit ainsi la plage de confocalité.

- Une meilleure stabilité Les résultats sont réunis sur la figure 2. Pour une cavité plus longue que la position de confocalité froide, le faisceau signal est un faisceau TEM_{00} identique à la pompe, monomode. Quand on atteint et qu'on dépasse la confocalité, des motifs apparaissent. Les champs proches et lointains ont alors des structures très différentes, ce qui signifie que le faisceau est multimode transverse. L'OPO oscille donc dans une superposition cohérente de plusieurs modes transverses TEM_{pq} . Des simulations nous ont permis d'évaluer à environ 25 le nombre de modes oscillant simultanément.

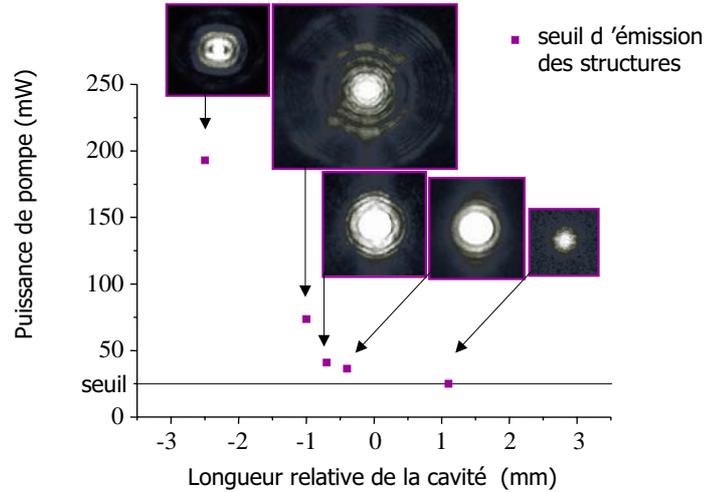


FIG. 2 – Seuil de la cavité confocale, en fonction de la longueur relative à la longueur de dégénérescence. Les carrés représentent le seuil d'émission des structures optiques.

1.2 OPO concentrique

Nous avons travaillé sur un OPO concentrique de longueur 100 mm constitué de deux miroirs de rayon de courbure de 50 mm, et sur un OPO semi-concentrique, exacte moitié géométrique du premier et au comportement similaire. A l'approche de la concentricité tout d'abord, nous avons noté une forte augmentation du seuil de la cavité. Cela est dû principalement au fait que le waist du mode TEM_{00} de la cavité concentrique est extrêmement petit. A l'approche de la concentricité, le faisceau pompe, de taille fixe, recouvre de moins en moins bien le mode de la cavité, d'où une forte augmentation du seuil. De plus la cavité devient instable. En ce qui concerne l'apparition de motifs, les résultats

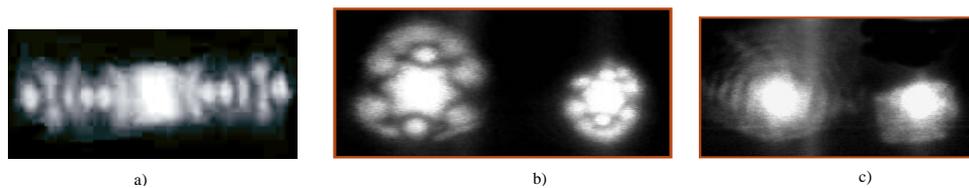


FIG. 3 – champs proche et champs lointains du signal d'une cavité semi-concentrique à 500 (a) , 200 (b) et 50 (c) microns de la concentricité

sont regroupés dans la figure 3. “Loin” de la concentricité (500microns), on observe que la pompe et le complémentaire restent monomode TEM_{00} , alors que le signal, lui, exhibe une structure allongée, qui reste toujours perpendiculaire à la direction du walk-off. Lorsqu'on se rapproche de la concentricité (200 microns), le complémentaire lui aussi commence à se démarquer d'un TEM_{00} avec l'apparition de taches circulaires. Bien que des motifs apparaissent, les champs proches et lointains, tant du signal que du complémentaire, ont la même structure. Cela signifie qu'ils restent monomode transverses. Lorsque l'on se rapproche encore de la concentricité (50 microns), la structure du complémentaire devient

encore plus large et diffuse. La pompe reste TEM_{00} dans ces deux derniers cas. C'est donc les effets non-linéaires qui sont responsables de la formation des motifs car ces structures n'existaient pas dans le faisceau pompe dont les faisceaux signal et complémentaires sont issus. La structure très diffuse ne permet pas de comparer la structure transverse dans les champs proches et lointains, mais la grande extension spatiale des faisceaux semble indiquer que nous avons affaire à de nombreux modes.

2 distribution spatiale du bruit

Nous avons montré dans la partie précédente qu'à partir d'une pompe TEM_{00} , dans certaines configurations, on obtient en sortie des faisceaux multimodes exhibant des motifs caractéristiques de l'interaction paramétrique. Cependant, une superposition de modes TEM_{pq} peut, si elle est cohérente, être considérée comme un nouveau mode bien déterminé. L'optique quantique nous apporte des outils pour déterminer si ces faisceaux sont effectivement multimodes. On peut montrer [4] qu'un faisceau quantiquement monomode, même dans un mode de forme complexe, sera caractérisé par une répartition transverse uniforme de ses fluctuations, car les photons sont aléatoirement répartis transversalement. Une répartition non-uniforme de ces fluctuations ne pourra être observé que dans un faisceau quantiquement multimode. Ces faisceaux multimodes quantiques peuvent avoir de nombreuses applications, en particulier dans l'amélioration de la résolution optique d'un faisceau, ou dans la mesure de petits déplacements [5].

Lorsque l'on regarde l'évolution des fluctuations en intensité d'un faisceau dont on coupe une partie (à l'aide d'un diaphragme par exemple), on accède à la répartition spatiale des fluctuations. Pour un faisceau monomode, couper une partie du faisceau est équivalent à l'atténuer d'un même facteur à l'aide d'un filtre neutre, et se traduit par une évolution linéaire en intensité des fluctuations. A l'inverse, une répartition non-uniforme des fluctuations sera caractéristique d'un faisceau non-monomode.

On définit l'opérateur photocourant \hat{i}_n qui est mesuré sur les photodiodes. On peut ensuite décomposer cet opérateur en la somme de sa valeur moyenne et de ses fluctuations (de valeur moyenne nulle) $\hat{i} = \bar{i} + \delta\hat{i}$. Lorsque l'on étudie les corrélations d'intensité entre deux faisceaux, on introduit le bruit quantique standard correspondant. C'est le bruit sur la différence d'intensité de deux faisceaux issus d'un faisceau incident sur une lame séparatrice. Or classiquement, une lame séparatrice nous donne les corrélations maximales entre deux faisceaux. Meilleure est la corrélation en intensité, plus le bruit sur la différence est bas, le bruit quantique standard est donc une limite inférieure aux fluctuations de deux faisceaux corrélés classiquement.

On définit le Bruit normalisé sur la différence d'intensité par:

$$N = \frac{\langle (\delta\hat{i}_1 - \delta\hat{i}_2)^2 \rangle}{\langle \bar{i}_1 + \bar{i}_2 \rangle} \quad (69)$$

Ce bruit est normalisé au Bruit Quantique Standard, et vaudrait donc 1 pour un faisceau incident sur une lame séparatrice. Une valeur inférieure à 1 n'est possible que pour deux faisceaux présentant une corrélation d'intensité d'origine quantique.

2.1 Experience

L'expérience a été réalisée sur l'OPO proche de la confocalité, triplement résonnant, quasi-dégénéré ($\omega_s = \omega_p$). À la sortie de l'OPO on place un diaphragme dans le plan du

champ proche des faisceaux. On sépare sur un cube les faisceaux signal et complémentaires. En manoeuvrant le diaphragme on fait varier continuellement la partie transmise du signal et du complémentaire en même temps, depuis une intensité quasi nulle correspondant à une toute petite partie du centre du faisceau (diaphragme fermé) à la totalité du faisceau (diaphragme ouvert). On sépare ensuite le signal et le complémentaire à l'aide d'un cube. Les faisceaux coupés sont alors focalisés sur deux photodecteurs de grande efficacité quantique où le bruit est analysé pour des ouvertures variables des diaphragmes. On a ainsi accès à la répartition spatiale du bruit et des corrélations. Les résultats sont réunis sur les

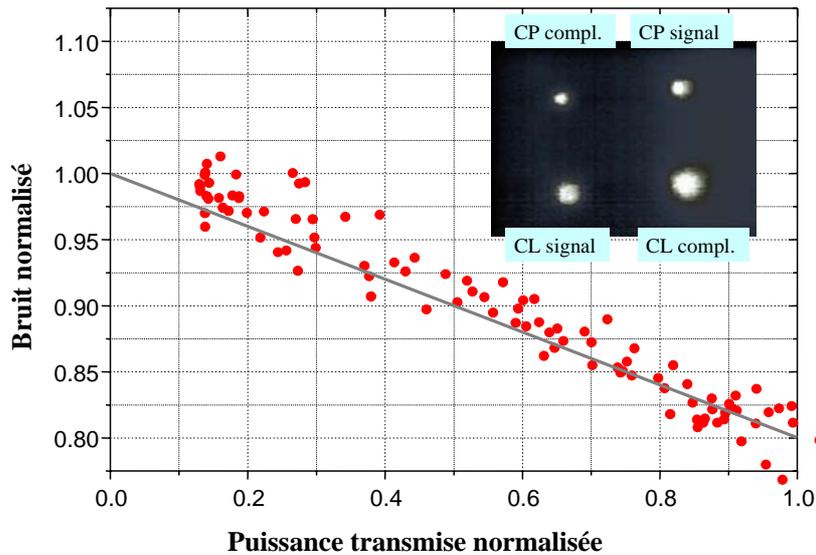


FIG. 4 – Mesure du bruit normalisé sur la différence d'intensité dans une cavité légèrement plus longue que la cavité confocale, en fonction de l'ouverture du diaphragme

figures 4 et 5. Dans le cas de la cavité plus longue que la confocalité (fig 4), les faisceaux signaux et complémentaires sont TEM_{00} comme on peut le voir dans le cadre supérieur, et à la fermeture du diaphragme le bruit de corrélation passe d'une valeur inférieure au bruit quantique standard, prouvant que les faisceaux entiers sont quantiquement corrélés, à 1 à la limite de fermeture des diaphragmes (on regarde les corrélations entre deux petites parties des faisceaux, donc sans corrélations quantiques particulières). L'évolution se fait de manière linéaire donc les corrélations sont uniformément réparties dans tout le faisceau. C'est le comportement attendu pour des faisceaux monomodes. Dans le cas de la cavité plus courte que la confocalité (figure 5), si on injecte une puissance de pompe suffisante, on fait apparaître des motifs dans le signal et le complémentaire comme on peut le voir aux anneaux apparaissant dans le champ proche, les faisceaux sont une superposition de différents modes TEM_{pq} . Sont ils pour autant quantiquement multimodes? lorsqu'on regarde l'évolution du bruit normalisé lors de la fermeture du diaphragme, on voit que cette fois le passage de la corrélation maximum à 1 ne se fait pas de manière linéaire. On est au-dessus de la droite correspondant au cas monomode. Cela indique que les corrélations quantiques sont principalement situées dans les anneaux, et cela montre également le caractère résolument multimode de nos faisceaux.

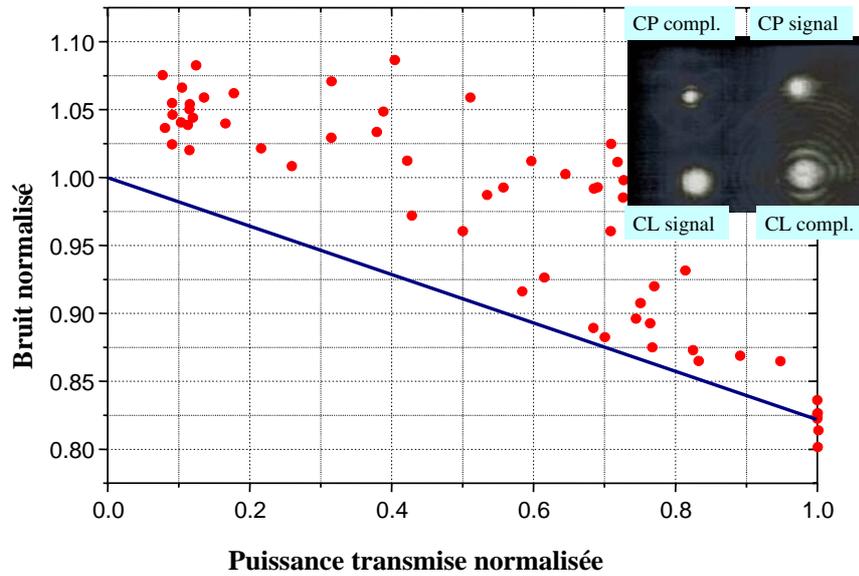


FIG. 5 – Mesure du bruit normalisé dans une cavité légèrement plus courte que la cavité confocale, en fonction de l'ouverture du diaphragme

3 conclusion

L'OPO est donc une source très riche de comportements multimodes et de génération de motifs. De plus, le phénomène de conversion paramétrique crée de très fortes corrélations quantiques entre les faisceaux qu'il génère. Grâce à ces corrélations, nous avons pu mettre en évidence le caractère fondamentalement multimode transverse quantique des faisceaux émis.

Références

- [1] *Observation of Pattern Formation in Optical Parametric Oscillators*, M. Vaupel, A. Maître et C. Fabre, *Phys. Rev. Lett.* **83** 5278 (1999)
- [2] *Pattern formation in optical parametric oscillators*, S. Ducci, N. Treps, A. Maître, and C. Fabre, *Phys. Rev. A* **64**,023803 (2001).
- [3] A. Gatti, H. Wiedemann, L.A.Lugiato and I. Marzoli, *Phys. Rev A* **56**,877.
- [4] *Spatial noise distribution in transverse multimode Optical Parametric Oscillator*, N. Treps M. Martinelli S.Ducci S.Gigan A. Maitre and C. Fabre, à paraître.
- [5] *Quantum limits in the measurements of very small displacement in optical images* C. Fabre, J.B. Fouet and A. Maitre, *Opt. Lett.* **25**, 76 (2000)

Influence d'un gradient radial de température sur l'instabilité de Couette-Taylor

A. Goharzadeh, F. Dumouchel et I. Mutabazi
Laboratoire de Mécanique, Université du Havre
25 Rue Philippe Lebon, 76058 Le Havre
afshin@univ-lehavre.fr

Résumé

Nous étudions l'influence d'un gradient radial de température sur la stabilité d'un fluide confiné dans l'espace annulaire entre deux cylindres coaxiaux. Lorsque les deux cylindres sont immobiles, un fort gradient radial de température génère un mode d'instabilité sous forme de spirales faiblement inclinées; ce mode devient vite instable et le motif évolue vers le chaos spatio-temporel. Lorsqu'on fixe le gradient de température, l'augmentation de la vitesse de rotation du cylindre intérieur induit une bifurcation vers des spirales dont le nombre d'onde diminue et la fréquence augmente avec la température. Lorsqu'on applique un gradient radial de température à l'écoulement de Couette-Taylor avec des rouleaux stationnaires, ces derniers deviennent inclinés et dérivent à une vitesse indépendante du gradient de température.

1 Introduction

L'étude de la stabilité de l'écoulement d'un fluide confiné dans un espace annulaire entre deux cylindres coaxiaux revêt une importance capitale dans la compréhension des mécanismes de transition vers la turbulence. Notamment, grâce aux brisures successives de symétries dont chacune est associée à un mode d'instabilité. Une attention toute particulière a été portée sur les instabilités centrifuges résultant d'un déséquilibre local entre la force centrifuge et le gradient radial de pression [1] qui donnent lieu à des rouleaux stationnaires de Couette-Taylor lorsque le cylindre extérieur est immobile. Un gradient radial de température imposé sur les parois cylindriques amplifie ou inhibe le déséquilibre entre la force centrifuge et le gradient radial de pression, mais en même temps, il induit un écoulement axial ascendant près de la paroi chaude et descendant près de la paroi froide. Cet écoulement est instable par rapport aux perturbations transverses dépendant du temps [2]. L'analyse de stabilité d'un écoulement dans l'espace annulaire entre deux cylindres en rotation différentielle et avec un gradient radial de température pose la question du couplage de modes stationnaires et oscillants issus de deux mécanismes déstabilisants différents : la force centrifuge due à la courbure et le gradient radial de température. Les études numériques menées récemment ont montré que ce couplage donnait lieu à des modes critiques oscillatoires [3, 4]. La deuxième question posée concerne l'effet d'un gradient radial de température sur les rouleaux stationnaires de Couette-Taylor. A notre connaissance il existe très peu d'expériences pour tester les prédictions théoriques [5, 6], nous présentons des résultats obtenus dans une expérience conçue pour mettre en évidence la dynamique spatio-temporelle des motifs de spirales.

Les instabilités des écoulements dans des configurations avec des parois courbes soumises à des gradients de température jouent un rôle important dans le transfert de masse

et de chaleur dans des machines tournantes électriques (par exemple pour faciliter le refroidissement des turbines [7]).

2 Dispositif expérimental

Le système de Couette-Taylor avec gradient radial de température est constitué de deux cylindres coaxiaux ayant respectivement les rayons suivants: $a = 2 \text{ cm}$, $b = 2,5 \text{ cm}$ et la taille de l'écoulement est $d = 0,5 \text{ cm}$ correspondant à la distance entre les deux cylindres. La longueur des cylindres est $L = 57 \text{ cm}$, ce qui donne un rapport d'aspect du système $\Gamma = L/d = 114$. Le système est immergé dans un bain thermique de forme cylindrique de rayon $c = 5 \text{ cm}$. Le cylindre intérieur et le bain sont reliés aux cryo-thermostats qui permettent une circulation d'eau à une température homogène contrôlée sur la paroi des cylindres avec une précision de $0,05^\circ\text{C}$. Le cylindre intérieur, en aluminium anodisé, est entraîné en rotation par un moteur à courant continu muni d'un système de régulation de vitesse avec une précision de 1% à travers un système de courroie et poulie crantée et un réducteur de vitesse. Les deux autres cylindres sont en verre transparent. Le pilotage du dispositif se fait à l'aide d'un micro-ordinateur PC. Dans cette expérience où seul le cylindre intérieur est en rotation, les différents régimes d'écoulement observés dépendent de la vitesse de rotation et du gradient radial de température imposé au fluide. Les paramètres de contrôle de notre système sont les nombres de Taylor $T_a = \frac{2\pi f a d}{\nu} \sqrt{\frac{d}{a}}$ et le nombre de Grashof $Gr = \frac{g \alpha \Delta T d^3}{\nu^2}$ où α est le coefficient de dilatation thermique et $\Delta T = T_i - T_o$ est le gradient radial de température. Le fluide utilisé est de l'eau distillée, à laquelle on ajoute une solution aqueuse de Kalliroscope AQ1000 pour visualiser les structures. On utilise une nappe laser monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 0,632 \mu\text{m}$ pour visualiser l'écoulement dans l'entrefer entre les deux cylindres. Le système d'acquisition est constitué d'une caméra linéaire CCD de 2048 éléments orientés parallèlement à l'axe des cylindres. La juxtaposition des lignes filmées à différents instants avec intervalle régulier donne le diagramme spatio-temporel des structures issues des instabilités.

3 Résultats

3.1 Convection dans la géométrie annulaire

Pour étudier les effets thermiques, nous avons imposé un gradient radial de température entre les parois de deux cylindres immobiles. Les conditions aux limites thermiques engendrent un écoulement de base constitué d'une grande cellule de convection. Celle-ci est caractérisée par un écoulement ascendant le long de la paroi chaude et descendant au voisinage de la paroi froide. La vitesse des particules croît lorsqu'on augmente le gradient radial de la température. La vitesse axiale d'une particule montante, proche de la paroi extérieure, est de l'ordre de $V = 0.188 \text{ cm/s}$ correspondant au nombre de Grashof $Gr = 4038$. Les seuil de l'instabilité est $\Delta T_c = 25$ soit $Gr_c = 10500$. Lorsque le gradient radial de température dépasse une valeur critique $\Delta T > \Delta T_c$, nous avons observé des rouleaux propagatifs au centre du système (Fig. 1-a). Ces rouleaux se propagent avec une vitesse de dérive $v = 0.128 \text{ cm/s}$ correspondant à une fréquence $\omega = \frac{2\pi f d^2}{\nu} = 19$ et un nombre d'onde $q = \frac{2\pi d}{\lambda} = 2.49$.

A partir d'un gradient de température de $\Delta T = 35^\circ\text{C}$ ou $Gr = 14300$, l'écoulement devient désordonné dans l'espace et le temps (Fig. 1-b) avec un bruit croissant (Fig.2). La

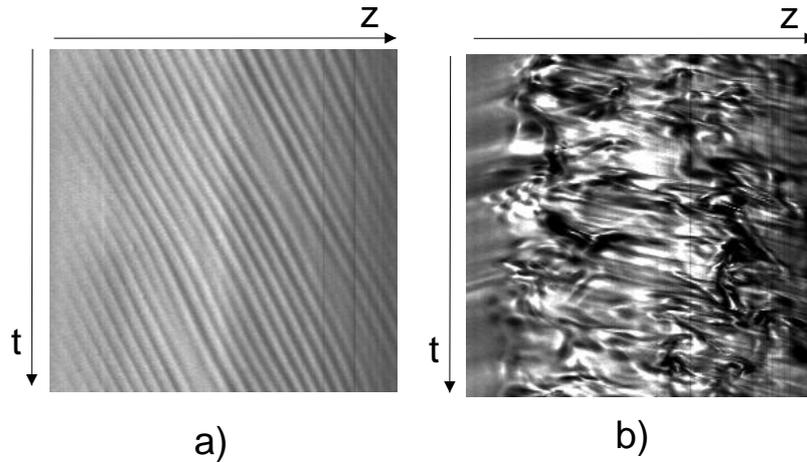


FIG. 1 – Diagramme spatio-temporel a) rouleaux propagatifs à $\Delta T = 25^\circ C$ et $T_a = 0$, b) chaos spatio-temporel à $\Delta T = 35^\circ C$ et $T_a = 0$. Distance d'acquisition=18cm, Temps d'acquisition=102s

mesure du bruit est donnée par l'aire sous le spectre de fréquence [8]: $B = \int_0^{f_e} \log |\hat{z}(f)|^2 df$ où f_e est la fréquence d'échantillonnage et $\hat{z}(f)$ est la transformée de Fourier du signal. On constate que la quantité de bruit du signal décrivant le chaos spatio-temporel est très supérieure à celle du bruit du signal des spirales: $B_{chaos} - B_r = 3.48$.

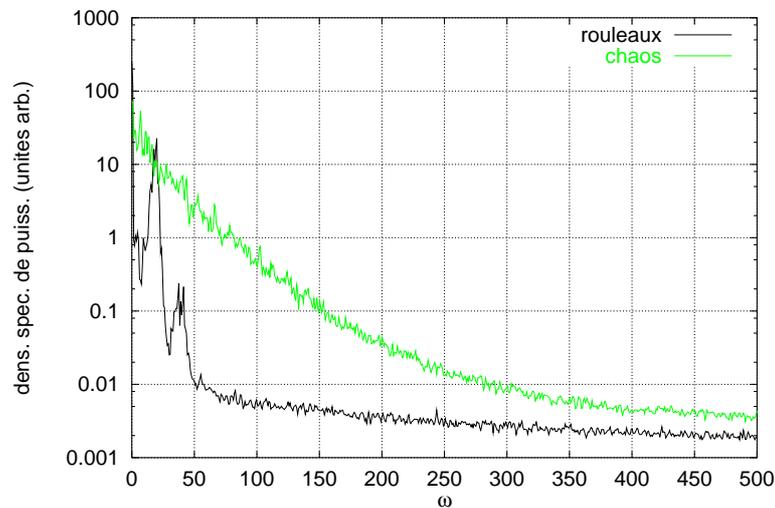


FIG. 2 – Comparaison des aires sous les spectres temporels des rouleaux et du chaos spatio-temporel.

3.2 Spirales hydrothermiques

La présence d'un gradient radial de température entre les deux cylindres, au dessus d'une certaine fréquence de rotation f , donne un premier mode d'instabilité caractérisé par des spirales hydrothermiques (Fig. 3) propagatives dans les directions axiale et azimutale. Le seuil de leur apparition dépend de l'écart de température entre les parois et de la

vitesse de rotation du cylindre intérieur [9]. La longueur d'onde, la fréquence et l'angle

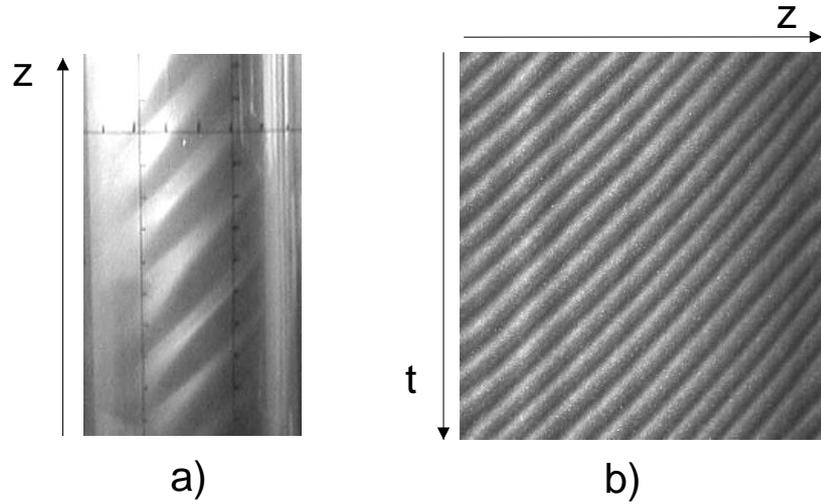


FIG. 3 – Spirales hydrothermiques à $\Delta T = 7^\circ\text{C}$ et $T_a = 15$ a) photo; b) diagramme spatio-temporel.

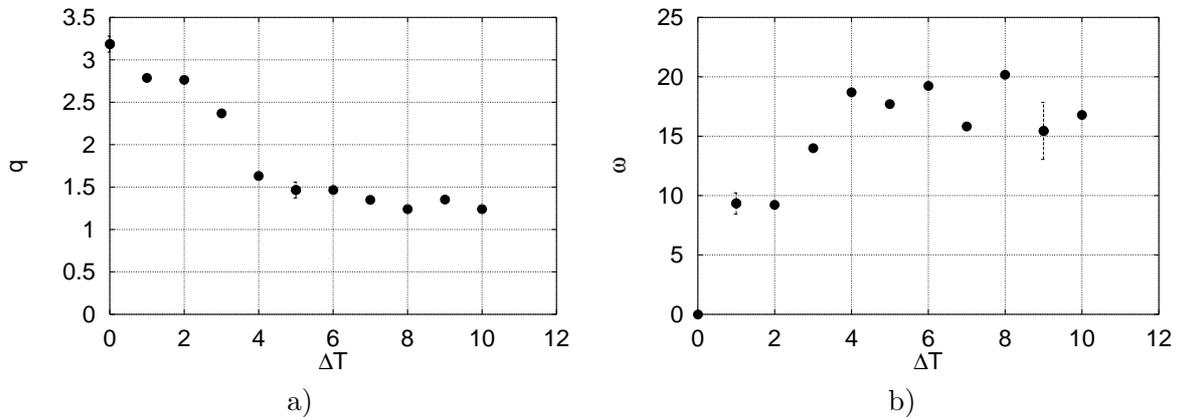


FIG. 4 – Spirales hydrothermiques a) Nombre d'onde axial; b) Fréquence

d'inclinaison des spirales dépendent du gradient radial de température (Fig. 4-a, 4-b et 5-a). Pour $\Delta T < 6$ le nombre d'onde axial diminue alors que la fréquence et l'angle d'inclinaison augmentent. Au-delà de ΔT égale à 6, le nombre d'onde atteint une valeur limite de $q = 1.256$, la fréquence atteint la valeur $\omega = 17$ et l'angle d'inclinaison atteint une valeur limite de $\theta = \pi/4$. L'incertitude sur la mesure des fréquences est due à la présence de défauts spatio-temporels dans le motif de l'écoulement. L'angle d'inclinaison θ permet de déterminer le nombre d'onde azimutal des rouleaux propagatifs à l'aide de la relation [5]: $n = \frac{2\pi R_0}{w} \tan\theta$ avec $R_0 = \frac{a+b}{2}$ rayon moyen et w la taille d'une cellule. La figure 5-b représente le nombre d'onde azimutal n en fonction du gradient radial de température. Plus l'angle d'inclinaison augmente et plus les rouleaux ressemblent à des spirales dont l'hélicité augmente. L'hélicité des rouleaux propagatifs dépend du sens de rotation du cylindre intérieur et du sens du gradient radial de température. Ce résultat

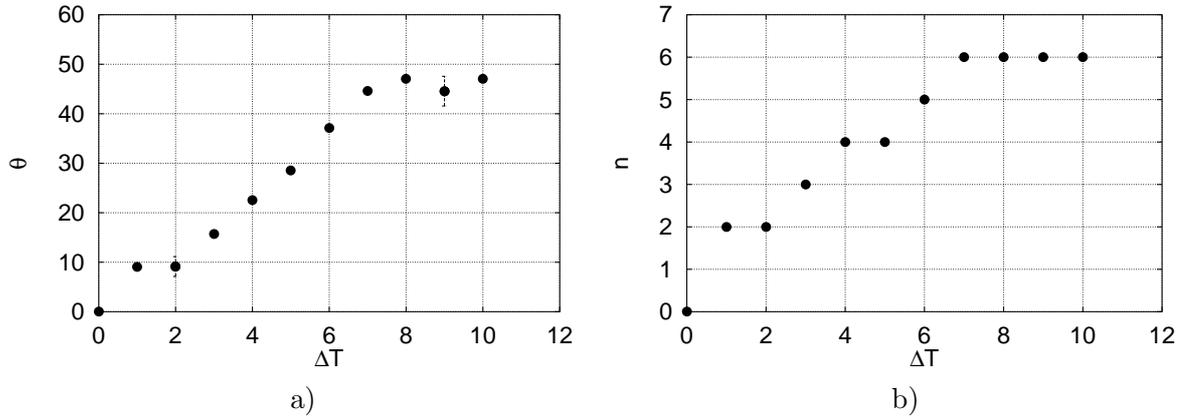


FIG. 5 – Spirales hydrothermiques a) Angle d'inclinaison; b) Nombre d'onde azimuthal

est en accord avec les résultats expérimentaux de Snyder et al [5].

3.3 Déstabilisation des rouleaux stationnaires par un gradient radial de température

La première instabilité de l'écoulement circulaire de Couette isotherme ($T_i = T_o = 25^\circ C$) de notre système expérimental ($\eta = 0.8$), se manifeste pour un nombre de Taylor critique $T_{ac} = 47$ par l'apparition des rouleaux axisymétriques stationnaires de Taylor. Lorsque, pour une valeur fixe du nombre de Taylor ($T_a = 50.5$), on impose un gradient radial de température, les rouleaux de Taylor se déstabilisent pour former des spirales hydrothermiques. Nous avons observé que le nombre d'onde et la fréquence de ces spirales ne varient pas en fonction de ΔT (Fig. 6). Cela suggère que la sélection du nombre d'onde est assurée par le mécanisme d'instabilité centrifuge et que le gradient radial de température induit uniquement une dépendance temporelle (dérive des rouleaux).

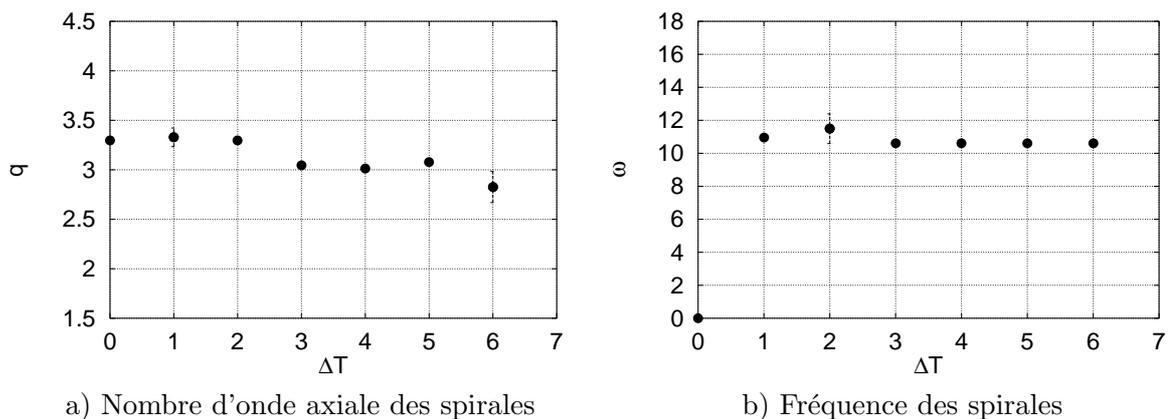


FIG. 6 – Caractéristiques des spirales à $T_a = 50.5$

4 Conclusion

Nous avons étudié les différents modes d'instabilité dans un écoulement confiné entre deux cylindres coaxiaux et soumis à un gradient radial de température. Lorsque les cylindres sont immobiles, les rouleaux propagatifs apparaissent pour un gradient radial de température élevé. Ces rouleaux bifurquent rapidement vers un état désordonné dans l'espace et le temps caractérisé par un bruit spectral croissant. Lorsque le gradient radial de température est fixé, la rotation du cylindre intérieur donne lieu à des spirales hydrothermiques dont le nombre d'onde diminue et la fréquence augmente avec l'écart de température entre les parois. Lorsque le cylindre tourne à une vitesse fixe, les rouleaux de Taylor deviennent, sous l'effet du gradient radial de température des spirales hydrothermiques dont le nombre d'onde et la fréquence restent constantes par rapport au gradient de température.

Remerciement

Les auteurs remercient Valerie Lepiller pour son aide apportée lors de son stage au laboratoire de Mécanique.

Références

- [1] P.G. Drazin, W.H. Reid, " *Hydrodynamic Stability*" (Cambridge University Presse, 1991).
- [2] G.Z. Gershuni, E.M. Zhukhovitskii, Israel program for Scientific Translations, Jerusalem (1975).
- [3] A. Bahloul, Thèse de doctorat de l'Université du Havre, (1997).
- [4] K.S. Ball, B.Farouk and V.C. Dixit, J. Heat Mass Transfer **32** 1517-1527 (1989).
- [5] H.A. Snyder, S.K.F. Karlsson, Phys. Fluids. **7** (10) (1964).
- [6] K.S. Ball, B.Farouk, Phys. Fluids A **1** (9) 1502-1507 (1989).
- [7] F. Kreith, Advances in Heat Transfer **5**, 129-250, Academic Press new York (1968).
- [8] P. Bot, Thèse de doctorat de l'Université du Havre, (1998).
- [9] A. Goharzadeh, Thèse de doctorat de l'Université du Havre, (2001).

Solénoides : un point de vue riche en conséquences dynamiques.

Maxime lagrange

Laboratoire de topologie, U.M.R. 5584 du C.N.R.S.

Université de Bourgogne

B.P. 47870 - 21078 Dijon Cedex - France

`lagrange@topolog.u-bourgogne.fr`

Résumé

Cet exposé aura pour but de présenter des résultats récents concernant l'étude des ensembles minimaux de champs de vecteurs tridimensionnels (en particulier les solénoïdes), mais surtout de motiver l'utilisation de la théorie des noeuds et des tresses pour l'étude de systèmes dynamiques physiques.

1 Introduction

Depuis H. Poincaré ([11]), l'étude des orbites périodiques des systèmes dynamiques s'est révélée avoir de riches conséquences pour la compréhension de la dynamique elle-même : [3],...

Ces dernières décennies, un point de vu beaucoup plus spécifique a émergé. Il part du simple constat qu'une orbite périodique forme un *noeud*, c'est à dire le plongement dans \mathbf{S}^3 d'un cercle orienté (voir [10]).

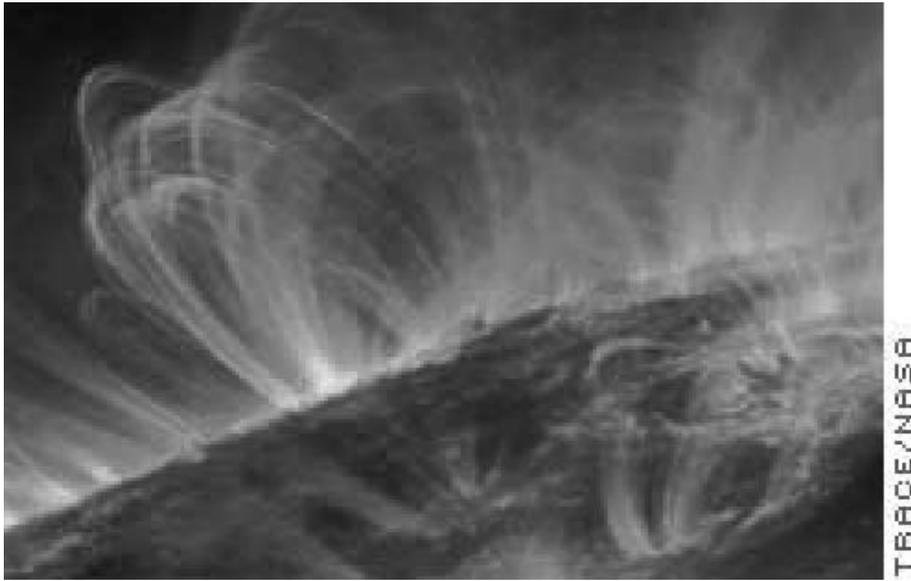
Ceci a permis de relier naturellement deux domaines a priori distincts : l'étude des systèmes dynamiques et la théorie des noeuds. Par exemple, pour certains flots il est possible de classifier exactement les différents types de noeuds pouvant être réalisés comme orbites périodiques : [4],...

Il faut remarquer que l'utilisation des résultats concernant la théorie des noeud a dépassé le cadre des orbites périodiques et a permis, par exemple, à V.I. Arnold et B.A. Khesin d'obtenir de très intéressants résultats sur les propriétés des champs magnétiques et de vorticité dans le cadre de l'hydrodynamique ([1]).

L'idée, élémentaire, est la suivante. Considérons un champ de vecteurs à divergence nulle dans un domaine de \mathbf{R}^3 . Pour tout point x de ce domaine on peut alors suivre sa trajectoire par le flot pendant un temps T quelconque puis la refermer par un arc de géodésique. Si l'on fait cette construction pour deux points du domaine, on obtient "presque tout le temps" deux noeuds dont on peut calculer l'enlacement. Maintenant, en prenant une moyenne temporelle et spatiale, on obtient un invariant (par changement de coordonnées préservant le volume) qui minore l'énergie du champ : $E_2(X) \geq C|A_X|$, où A_X est l'invariant asymptotique de Hopf.

De façon plus générale, les travaux de Moffat mettent en évidence l'utilité de méthodes topologiques en hydrodynamique.

Remarquons qu'ici, ce qui permet de généraliser l'approche dynamique est en fait, l'existence de mesures invariantes.



Une autre exemple, peut-être plus marquant, est l'étude des champs magnétiques apparaissant lors des éruptions solaires. Ne serait-ce qu'en observant des photos de tels phénomènes, on s'aperçoit du lien existant entre ces dynamiques et le concept mathématique de *tresses* (voir [10]).

Remarquons que noeuds et tresses sont deux concepts "voisins" qu'il est possible de relier intuitivement : prenez une tresse, reliez ses extrémités et vous obtenez un noeud. Cette approche un peu biaisée reflète la réalité mathématique. L'avantage de considérer les tresses est qu'une structure de groupe est sous-jacente, ce qui permet d'utiliser des outils algébriques "calculables".

C'est dans cet esprit que Berger ([2]) a étudié le cas des champs magnétiques dans le cylindre, ce qui lui a permis de minorer leur énergie de façon quadratique en un invariant lié à ceux des tresses.

Cette approche propose une piste dans la compréhension des éruptions solaires. Elle a aussi inspiré un travail effectué avec Jean-Marc Gambaudo ([7]) qui nous a permis de développer de nouveaux invariants topologiques des champs de vecteurs sans singularité dans le tore solide.

2 Solénoïdes

Revenons à notre approche de départ : le lien riche en conséquences entre orbites périodiques et noeuds. Nous devons alors faire les constatations négatives suivantes : tous les systèmes dynamiques ne possèdent pas d'orbite périodique ([8]) et, de plus, réduire la dynamique à quelques orbites particulières peut paraître quelque peu réducteur...

C'est suite à ces remarques qu'est apparue la nécessité d'envisager une généralisation à une classe plus générale d'orbites les notions topologiques définies pour les orbites périodiques via la théorie des noeuds (et des tresses).

D'un point de vue statistique, un candidat approprié est le support de mesures invariantes ou ergodiques. C'est dans cet esprit que se placent les travaux d'Arnold et Khesin. S'inspirant de leurs idées, Gambaudo et Ghys ([5],[6]) ont développé des techniques per-

mettant de généraliser des invariants de noeuds, tels l'enlacement ou la signature, à des mesures invariantes de champs de vecteurs.

Du point de vue topologique, les objets auxquels il est naturel de s'intéresser sont les ensembles minimaux. Rappelons qu'un compact non vide est *minimal* pour un flot si il est union de trajectoires et qu'aucun de ses sous-ensembles n'a cette propriété.

Le principal avantage à considérer ce type d'ensembles est que, contrairement au cas des orbites périodiques, tout champ de vecteurs sur une variété compacte admet un ensemble minimal. De plus, la structure de ces ensembles est souvent bien plus compliquée (et donc plus riche) que celle d'une orbite périodique.

Un exemple représentatif et crucial est celui des solénoïdes, c'est à dire des ensembles minimaux localement homéomorphes au produit du Cantor par un intervalle (penser au solénoïde de Smale par exemple). Nous allons voir qu'un tel ensemble peut en un sens être vu comme un noeud.

Considérons le tore standard de révolution \mathbf{T} . Un ensemble invariant M de \mathbf{R}^3 est dit *tressable* si il existe une isotopie ambiante qui l'envoie dans le tore solide \mathbf{T} de façon à ce qu'il soit transverse aux fibres de \mathbf{T} . On a alors que tout solénoïde est tressable.

Ceci est une conséquence du fait que pour un ensemble minimal d'un champ de vecteur, les obstructions à ce qu'il soit tressable sont connues ([9]). Celles-ci disparaissent dans le cas des solénoïdes.

Du fait que l'objet que l'on peut tresser n'est pas le solénoïde \mathbf{S} lui même mais un voisinage de \mathbf{S} , il est naturel de le considérer \mathbf{S} comme la suspension d'un ensemble de Cantor du disque invariant (et minimal) par un homéomorphisme laissant le bord de ce disque invariant.

3 Conclusion

Ce point de vue permet de faire une analogie avec le cas d'une orbite périodique d'un homéomorphisme du disque. Dès lors on est amené à penser au théorème de Birman ([3]) qui lie la dynamique sur le groupe fondamental du complémentaire de l'orbite périodique aux tresses. Une généralisation de ce thôrème est possible (en cours de rédaction).

Cette approche est en fait un point de départ pour une étude dynamique des ensembles minimaux au moyen de notions analogues à celles des noeuds et des tresses.

Références

- [1] ARNOLD, V.I. & KHESIN, B. : Topological methods in hydrodynamics, *Applied Mathematical Sciences* **125**, (1998).
- [2] BERGER, M.A.: Energy-Crossing Number Relations for Braided Magnetic Fields, *it Phys. Rev. Let.* **70**, (1993).
- [3] BIRKHOFF, G. D.: Dynamical systems, *AMS, Providence, RI*, (1927).
- [4] CASASAYAS, J. & MARTINEZ ALFARO, J. & NUNES, A.: Knot and links in integrable hamiltonian systems, *J. Knot Theory Ramifications* **7**, (1998).
- [5] GAMBAUDO, J.-M. & GHYS É.: Enlacements asymptotiques, *Topology* **36**, (1997).
- [6] GAMBAUDO, J.-M. & GHYS É.: Signature asymptotique d'un champ de vecteurs en dimension 3, *Duke Math. J.* **106**, (2001).

- [7] GAMBAUDO, J.-M. & LAGRANGE M.: Topological lower bounds on the distance between area preserving diffeomorphisms, *Bol. Soc. Bras. Mat.* **31**, (2000).
- [8] KUPERBERG, K.: A smooth counterexample to the Seifert conjecture, *Ann. of Math.* **140**, (1994).
- [9] LAGRANGE, M.: Braiding minimal sets of vector fields, à paraître dans : *Proceedings of the AMS*.
- [10] MURASUGI, K. *Knot theory and its applications*. Translated from the 1993 Japanese original by Bohdan Kurpita. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, (1996).
- [11] POINCARÉ, H.: Nouvelles méthodes de la mécanique céleste, *Gauthier-Villars, Paris*, (1899).

Démonstration expérimentale d'une bifurcation de Hopf sous-critique dans un système dynamique non linéaire à retard.

Laurent Larger et Thomas Erneux
Laboratoire d'Optique P.M. Duffieux
16, Route de Gray, 25030 Besançon Cedex
laurent.larger@univ-fcomte.fr

Résumé

Des résultats analytiques concernant les conditions d'une bifurcation de Hopf sous-critique dans un système dynamique non linéaire à retard sont présentés. Une mise en œuvre expérimentale est ensuite proposée pour vérifier la validité des conditions analytiques obtenues dans le cas des grands retards. Un diagramme de bifurcation expérimental est tracé, dans lequel un hystérésis caractéristique de la situation sous-critique, est observé au voisinage de la bifurcation de Hopf.

1 Introduction

Les systèmes non linéaires à retard sont généralement peu étudiés, cependant, ils ont déjà suscité un intérêt non négligeable dans un certain nombre de domaines très variés. Ces dynamiques simples d'expression sont pourtant capables de rendre compte de comportements très complexes. Elles se sont révélées par exemple d'excellents candidats pour la modélisation de désordres hémathologiques dans le mécanisme de production du sang [1], ou encore dans le contexte de l'étude de l'évolution des éco-systèmes de type proies-prédateurs [2], ou lors de simulations des comportements de réseaux neuronaux [3]. Dans un contexte plus proche de la physique, et plus particulièrement de l'optique, ces mêmes dynamiques sont apparues dans la modélisation de divers systèmes oscillants non linéaires, tels que les cavités en anneaux comprenant un absorbant atomique à deux niveaux [4], les lasers semiconducteurs à cavité externe [5], ou encore certains oscillateurs non linéaires opto-électroniques [6, 7, 8]. D'un point de vue fondamental, ces dynamiques à retard sont intéressantes pour différentes raisons. Par exemple ils présentent une route vers le chaos très connue et largement étudiée le cadre des dynamiques discrètes itératives (type application logistique), la cascade de bifurcations par dédoublement de période. Leur intérêt se situe aussi au niveau de la complexité des régimes dynamiques chaotiques obtenus, en particulier lorsque le retard temporel est grand devant le temps de réponse de la boucle d'oscillation [9]. La présence du retard temporel introduit un effet mémoire très important comparé aux équations différentielles ordinaires traditionnelles, comme celle décrivant le système de Lorenz. La conséquence directe est une dimension d'espace des phases infinie. La dimension de l'attracteur étrange en régime chaotique reste toutefois finie, mais peut atteindre des valeurs très élevées. Très récemment, ces régimes dynamiques de très grande complexité, dits hyperchaotiques, ont trouvé une application particulière dans le domaine de la cryptographie [10]. Sur la base de ces systèmes expérimentaux dédiés à la cryptographie par chaos [8, 11, 12], nous nous sommes penchés sur un problème dynamique particulier, qui intervient au début de la route vers le chaos par cascade de dédoublement : la bifurcation de Hopf. En effet, toutes les bifurcations de Hopf observées à



FIG. 1 – *Bifurcations de Hopf super ou sous-critique, directes ou inverses.*

l'origine sur ce type de dynamique présentaient un caractère super critique (voir fig.1). Le problème posé était alors le suivant : la version sous critique de cette bifurcation pourtant bien connue, peut-elle être obtenue dans un tel système dynamique non linéaire à retard le plus simple possible, c'est-à-dire dans son expression scalaire (éq.(70)), et si oui, dans quelles conditions ?

$$\varepsilon \dot{y}(t) = -y(t) + f[\lambda, y(t-1)]. \quad (70)$$

Une fois ces conditions trouvées [14], il devient intéressant d'essayer de les réaliser expérimentalement, afin d'observer concrètement le cas sous critique, et donc valider l'étude analytique perturbative de cette situation.

L'article est organisé de la manière suivante. Nous rappellerons d'abord les principaux résultats obtenus après une analyse perturbative de la bifurcation de Hopf dans les systèmes non linéaires à grands retards temporels, et nous appliquerons ces résultats dans le cas d'une fonction non linéaire simple de formulation. Ensuite nous décrirons comment cette fonction théorique peut être approchée dans une situation expérimentale. Enfin, nous commenterons le diagramme de bifurcation obtenu expérimentalement dans le voisinage d'une bifurcation de Hopf.

2 Bifurcation de Hopf sous-critique, recherche d'un exemple

Un système dynamique décrit par la loi différentielle d'équation (70) a été précédemment étudié par une méthode perturbative au voisinage d'un point de Hopf, en prenant comme paramètre de bifurcation soit le retard temporel [13] (ou le temps de réponse ε normalisé à ce temps de retard), soit le poids de la non linéarité [14] (paramètre λ qui agit de manière multiplicative dans la fonction $f(\lambda, y)$) ; c'est dans cette dernière situation que se situe la suite de cet article). Il est alors possible, en développant la perturbation jusqu'à l'ordre 3, de définir un couple d'inégalités permettant de caractériser la nature directe ou inverse de la bifurcation de Hopf, ainsi que sa nature super- ou sous-critique. Dans le cas particulier des grands retards temporels ($\varepsilon \ll 1$, pratiquement bien vérifié expérimentalement), ces conditions sont résumées dans le tableau 1.

| | $-\frac{f_{\lambda} f_{yy}}{2} - f_{y\lambda} > 0$ | $-\frac{f_{\lambda} f_{yy}}{2} - f_{y\lambda} < 0$ |
|--|--|--|
| $\frac{3}{4} f_{yy}^2 + \frac{f_{yyy}}{2} > 0$ | super-critique direct | super-critique inverse |
| $\frac{3}{4} f_{yy}^2 + \frac{f_{yyy}}{2} < 0$ | sous-critique direct | sous-critique inverse |

TAB. 1 – *Les conditions des différentes bifurcations de Hopf*

Comme ces conditions font intervenir au plus une dérivée troisième de la fonction non linéaire par rapport à y , nous avons choisi dans notre expérience de nous guider à partir d'un comportement local cubique de la fonction non linéaire. Un exemple numérique peut donc être testé à partir d'une fonction non linéaire f dans la dynamique (70) de la forme particulière de l'équation (71). Cette expression tient pratiquement compte de la courbe

d'évolution du point fixe $y_s(\lambda)$, qui vérifie bien $f(\lambda, y_s) = y_s(\lambda)$ (le point de Hopf est entre autre caractérisé par la perte de stabilité de ce point fixe).

$$f(\lambda, y) = y_s(\lambda) + [y - y_s(\lambda)][A(\lambda) + B(\lambda)y + C(\lambda)y^2], \quad (71)$$

Quant aux coefficients $A(\lambda)$, $B(\lambda)$ et $C(\lambda)$, ils doivent être choisis afin de vérifier les conditions souhaitées du tableau 1 au point de Hopf (en $\lambda = \lambda_c$, soit $A(\lambda_c) = -1$, $C(\lambda_c) < -2B^2(\lambda_c)$). Pratiquement, nous avons choisi, dans un soucis de simplification, les valeurs suivantes qui permettent d'obtenir une bifurcation de Hopf sous-critique directe : $\lambda_c = 1$, $A(\lambda) = -\lambda$, $B(\lambda) = 0$ et $C(\lambda) = -\alpha^2 \lambda$, ce qui conduit à la fonction cubique suivante

$$f(\lambda, y) = -\lambda y[1 + (\alpha y)^2], \quad (72)$$

dans laquelle λ intervient effectivement comme un facteur multiplicatif (intéressant expérimentalement, car cela correspond à un gain de la boucle d'oscillation, donc facile à contrôler). Le diagramme de bifurcation de la dynamique dans la limite adiabatique ($\varepsilon = 0$, la dynamique est itérative) est tracé à la figure 2(a), où l'on peut constater la nature sous-critique (coexistence d'un cycle instable (pointillé) avec un point fixe stable (trait plein), et disparition du cycle au point de Hopf, avec une amplitude nulle, là où le point fixe perd sa stabilité.

Le choix de cette fonction non linéaire cubique très simple permet effectivement d'observer une situation sous-critique directe (voir diagramme de bifurcation de la Fig.2(a)). Mais pour deux raisons principales, nous n'avons pas retenu cette expression brute : d'une part elle présente des comportements asymptotiques physiquement irréalistes (comportement divergent pour les valeurs extrêmes de la variable y), et d'autre part, la seule existence de la branche instable du cycle est difficile à mettre en évidence expérimentalement, précisément parce qu'elle est de nature instable. Le fait de borner la fonction non linéaire permet pratiquement de prendre en compte ces deux problèmes. La fonction n'a plus de comportement divergent, et le fait de borner l'expression cubique initiale, fait apparaître une transformation du cycle instable en une branche stable, conférant ainsi une allure caractéristique en hystérésis du diagramme de bifurcation en fonction du sens d'évolution du paramètre de bifurcation λ . Nous obtenons finalement une fonction mathématiques répondant à ces deux contraintes physiques, de la forme :

$$f(\lambda, y) = -\lambda \frac{y[1 + (\alpha y)^2]}{1 + (\beta y)^4} \quad (73)$$

Afin de conserver les propriétés localement cubiques (et donc la nature sous-critique de la bifurcation de Hopf), il est important que le dénominateur quartique (qui compense le numérateur cubique) agisse suffisamment loin du point de Hopf (en distance y , dont l'unité de longueur est donnée par la quantité $1/\alpha$). Ainsi, on pourra donner comme condition indicative pour le choix de β , $1/\beta > 1/\alpha$. Le diagramme de bifurcation numérique correspondant (dans le cadre de l'approximation adiabatique) est celui de la figure 2(b). Le choix effectif de β et α est un peu plus arbitraire, mais il peut quand-même être guidé par le souhait d'obtenir un hystérésis aussi important que possible. Ce dernier est pratiquement défini par la différence $\lambda_c - \lambda_f$, où λ_c est la valeur du paramètre de bifurcation qui donne lieu à la fusion entre les branches stables et instables du cycle (voir Fig.2(b)), et λ_c est bien sûr la valeur au point de Hopf. Un des intérêts de l'expression (73), est qu'elle permet par sa symétrie de trouver analytiquement la valeur $\lambda_f = 2(\beta/\alpha)^4[\sqrt{(\alpha/\beta)^4 + 1} - 1]$, ce qui

donne ensuite des indications d'ordre qualitatif lors de la réalisation expérimentale dont il va être question.

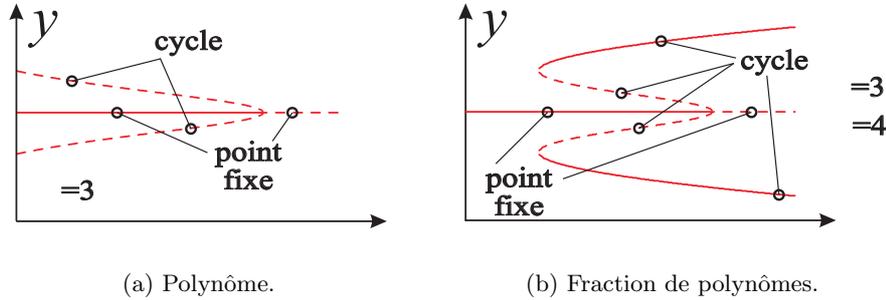


FIG. 2 – Diagramme de bifurcation numérique $y_{n+1} = f(\lambda, y_n)$ (approx. adiabatique).

3 Réalisation expérimentale

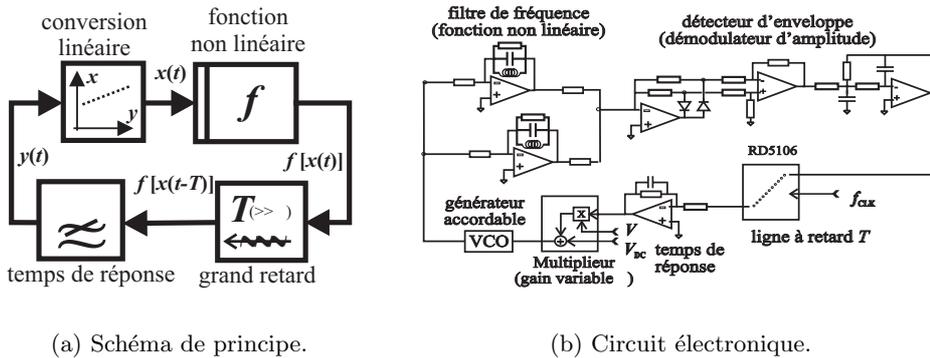


FIG. 3 – Montage expérimental.

Le principe de l'oscillateur non linéaire à retard qui a été choisi pour réaliser un tel système physique présentant une bifurcation de Hopf sous-critique, est celui qui est décrit dans la référence [11]. Il s'agit d'un circuit électronique représenté à la figure 3. La variable dynamique y correspond physiquement à la fréquence ν du signal de sortie d'un générateur sinusoïdal (amplitude 1 V), qui peut être commandé électriquement par une tension d'entrée avec une accordabilité de $S = 25.4 \text{ kHz/V}$, et une fréquence centrale $\nu_0 = 36 \text{ kHz}$. La fonction non linéaire appliquée à cette variable est pratiquement un filtre de fréquence suivi d'un démodulateur d'amplitude, dont le rôle est de restituer le module de la fonction de filtrage. Cette fonction de filtrage peut donc être modélisée à volonté, permettant ainsi de choisir quasiment n'importe quel profil de fonction non linéaire. La réalisation pratique fait intervenir deux filtres RLC série agissant en parallèle, avec des fréquences de résonance respectives $\nu_1 = 80 \text{ kHz}$ et $\nu_2 = 99 \text{ kHz}$, et des facteurs de qualité $Q_1 = 2.12$ et $Q_2 = 3.1$. Le poids relatif de ces deux pics est $g_{2/1} = 0.22$. Le modèle théorique exacte de cette fonction non linéaire est donné par :

$$f(\lambda, \nu) = \lambda \left| \frac{i\nu/\nu_1}{1 - (\nu/\nu_1)^2 + i(\nu/\nu_1)/(\sqrt{2}Q_1)} + \frac{ig_{2/1}(\nu/\nu_2)}{1 - (\nu/\nu_2)^2 + i(\nu/\nu_2)/(\sqrt{2}Q_2)} \right|. \quad (74)$$

Le poids de la fonction non linéaire qui joue le rôle du paramètre de bifurcation λ , correspond pratiquement au gain de la boucle d'oscillation, qui peut être facilement réglé électroniquement à l'aide d'un multiplieur. Une ligne à retard électronique permet d'introduire le retard temporel $T = 2.05 \text{ ms}$, et le temps de réponse de l'ensemble de la chaîne d'oscillation est fixé par un filtre passe-bas du premier ordre de coupure à $\nu_c = 3 \text{ kHz}$, soit un temps de réponse $\tau = 12 \text{ }\mu\text{s}$.

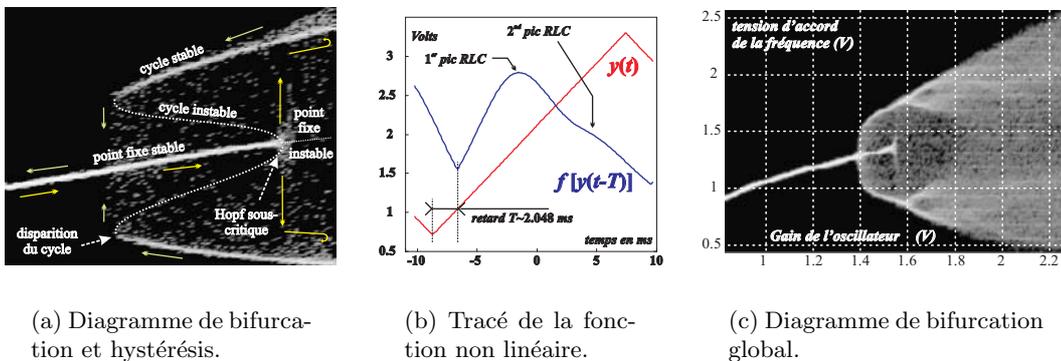


FIG. 4 – Résultats expérimentaux.

L'expression de (74) est bien sûr assez éloignée de (73), mais n'oublions que c'est le profil local de la fonction non linéaire qui importe. Le réglage expérimental de ce profil a été fait en mettant en mémoire (dans un générateur de fonctions arbitraires type HP33120) le profil du modèle théorique, et en ajustant les paramètres $g_{2/1}$, ν_2 et Q_2 , pour y faire correspondre le profil expérimental de la fonction décrite par (74). Le profil non linéaire obtenu est représenté à la figure 4(b), pour lequel on a appliqué, en boucle ouverte de la chaîne d'oscillation, une tension lentement variable (à l'entrée du générateur accordable en fréquence, VCO), avec une amplitude suffisante pour balayer les deux pics RLC ; la sortie de cette chaîne d'oscillation a ensuite été observée, elle correspond en fonctionnement normal, au signal appliqué à l'entrée de la boucle.

Un diagramme de bifurcation expérimental est ensuite tracé sur l'oscillateur en boucle fermée, en balayant très lentement le gain de la boucle d'oscillation, et en enregistrant un grand nombre de points sur l'ensemble des régimes dynamiques visités. Ces points sont ensuite utilisés pour restituer la statistique de chacun de ces régimes dynamiques, pour chacune des valeurs du paramètre de bifurcation, et ainsi obtenir les diagrammes de bifurcation représentés. Le paramètre a bien été balayé dans les deux sens aller et retour autour du point de Hopf, afin de mettre en évidence l'hystérésis caractéristique de la nature sous-critique de la bifurcation. En faisant varier continûment le paramètre $g_{2/1}$, il a été possible de réduire, continûment également, jusqu'à zéro, le domaine d'hystérésis, montrant ainsi que le cycle stable observé n'appartenait pas à une autre branche que celle du cycle instable démarrant à la bifurcation de Hopf sous-critique.

4 Conclusion

Suite aux résultats analytiques ayant permis de décrire les conditions d'obtention d'une bifurcation de Hopf sous-critique dans une dynamique non linéaire scalaire à retard [14], nous avons reporté la démonstration expérimentale de l'existence de telles bifurcations. La démarche observée pour mener à bien cette expérience a consisté à suivre autant que possible les résultats de la description analytique, afin de donner un exemple de modèle de fonction non linéaire, qui était apte à vérifier un certain nombre de contraintes physiques. Sur la base d'un circuit électronique réalisant une dynamique non linéaire scalaire à retard, nous avons cherché à reproduire expérimentalement le profil du modèle non linéaire. Finalement, un diagramme de bifurcation avec hystérésis a été obtenu, hystérésis caractéristique de la situation sous-critique, à l'image de ce qui a pu être décrit par la théorie.

Références

- [1] M. C. Mackey and L. Glass, *Science*, **197**, 287 (1977).
- [2] R. M. May, *Nature*, **261** (1976).
- [3] J. Wei and R. Shigui, *Stability and bifurcation in a neural network model with two delays*, *Physica D*, **130**, 255 (1999).
- [4] K. Ikeda, *Multiple-Valued Stationary State and its Instability of the Transmitted Light by a Ring Cavity System*, *Optics Commun.*, **30**, 257 (1979).
- [5] R. Lang and K. Kobayashi, *External Optical Feedback Effects on Semiconductor Injection Laser Properties*, *IEEE J. Quantum Electron.*, **16**, 347 (1980).
- [6] H. M. Gibbs, F. A. Hopf and D. L. Kaplan and R. L. Schoemaker, *Observation of chaos in optical bistability*, *Phys. Rev. Lett.*, **46**, 474 (1981).
- [7] F. Arecchi and W. Gadomski and R. Meucci, *Generation of a chaotic dynamics by feedback on a laser*, *Phys. Rev. A*, **34**, 1617 (1986).
- [8] L. Larger and J.-P. Goedgebuer and J.-M. Mérola, *IEEE J. Quantum Electron.*, *Chaotic Oscillator in Wavelength: A New Setup for Investigating Differential Difference Equations Describing Nonlinear Dynamics* **34**, 594 (1998).
- [9] M. Le Berre, E. Ressayre, A. Tallet and H.M. Gibbs, *High-dimension chaotic attractor of a nonlinear ring cavity*, *Phys. Rev. Lett.*, **56**, 274 (1986).
- [10] J.-P. Goedgebuer, L. Larger and H. Porte, *Optical cryptosystem based on synchronization of hyperchaos generated by a delayed feedback tunable laser diode*, *Phys. Rev. Lett.*, **80**, 2249 (1998).
- [11] L. Larger, V. S. Udaltsov and J.-P. Goedgebuer, *Chaotic dynamics of oscillator based on circuits with VCO and nonlinear delayed feedback*, *Electron. Lett.*, **36**, 199 (2000).
- [12] L. Larger, M. W. Lee, J.-P. Goedgebuer, T. Erneux and W. Elflein, *Chaos in coherence modulation: bifurcations of an oscillator generating optical delay fluctuations* *JOSA B*, **18**, 1063 (2001)
- [13] F. Giannakopoulos, A. Zapp, *Local and global hopf bifurcation in a scalar delay differential equation*, *Journal of Math. Analysis and Appl.*, **237**, 425 (1999).
- [14] L. Larger, M. W Lee, J.-P. Goedgebuer and T. Erneux in "4^e Rencontre du Non Linéaire", *Bifurcation de Hopf super et sous critique : expériences et analyse perturbative*, *Non Linéaire Pub.*, **4**, 1153 (2001).

Supratransmission nonlinéaire dans la bande interdite

F. Géniet et J. Léon

Physique Mathématique et Théorique, CNRS-UMR5825
 34095 MONTPELLIER Cedex 05 (FRANCE)
 leon@lpm.univ-montp2.fr

Résumé

On montre qu'une chaîne nonlinéaire peut propager de l'énergie dans la bande interdite photonique par génération de *breathers* (ou de paires kink anti-kink). Ce processus, déclenché au delà d'un seuil se manifeste par une brutale augmentation du flot d'énergie transmise. Il est appelé *supratransmission nonlinéaire* et analysé par une série de simulations numériques de l'équation de sine-Gordon discrète. Une interprétation théorique extrêmement simple du seuil de bifurcation est basée sur l'existence de solutions de type breather.

1 Introduction

Une chaîne nonlinéaire possède des propriétés remarquables parmi lesquelles la *localisation spectrale* de l'énergie, plus connue sous le nom de récurrence de Fermi-Pasta-Ulam [1], où l'énergie injectée initialement dans un mode propre donné ne se distribue pas, au cours du temps, sur tous les harmoniques (contrairement à ce qu'on attendrait d'une approche quasi-linéaire). Cette découverte fut à l'origine du concept de *soliton* [2] et de la méthode de la transformée spectrale inverse [3].

Une autre propriété fondamentale est la *localisation spatiale* de l'énergie sous forme de *solitons*, ou structures nonlinéaires cohérentes [7]. Cette évolution universelle d'une condition initiale est bien comprise dans le cadre de la transformée spectrale inverse [4, 5]. La localisation spatiale est aujourd'hui plus spécialement étudiée dans les systèmes discrets où les modes nonlinéaires intrinsèques (ou *breathers*) jouent un rôle fondamental [8, 9, 10], et ont été récemment observés dans des chaînes de jonctions Josephson [11].

Nous présentons ici une troisième propriété remarquable d'une chaîne nonlinéaire, la *supratransmission nonlinéaire* [6], qui est la capacité d'un milieu possédant une bande photonique interdite de transmettre de l'énergie lorsqu'il est forcé à une extrémité (ou soumis à une irradiation [13]) à une fréquence dans la bande interdite pour une amplitude dépassant un seuil. La bifurcation du flot d'énergie transmise est constatée qualitativement sur un chaîne de pendules couplés (des mesures sont en cours), démontrée par simulation numérique du modèle de sine-Gordon et comprise dans une théorie très simple.

2 Le modèle

On s'intéresse ici à la chaîne de N pendules identiques couplés dont les équations du mouvement s'écrivent comme le modèle de sine-Gordon discret

$$\ddot{u}_n - c^2(u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}) + \sin u_n = 0, \quad (75)$$

où la variable $u_n(t)$ désigne l'angle avec la verticale du pendule n dans un temps normalisé à la période propre des pendules. Le coefficient c^2 mesure l'intensité du couplage (linéaire) des pendules adjacents. Ce milieu possède la relation de dispersion linéaire

$$\omega^2 = 1 + 2c^2(1 - \cos k), \quad (76)$$

avec la bande interdite $[0, 1]$.

Cette chaîne est soumise à la condition au bord périodique

$$u_0(t) = A \sin \Omega t, \quad (77)$$

pour une condition initiale où les pendules sont au repos $u_n(0) = 0$ et $\dot{u}_n(0) = 0$. Pour une fréquence dans la bande interdite $\Omega < 1$, une théorie linéaire conduit à la solution évanescence $A \sin(\Omega t) \exp[-\lambda n]$ où λ est donné par

$$\lambda = \operatorname{arccosh} \left(1 + \frac{1 - \Omega^2}{2c^2} \right). \quad (78)$$

Dans le cas nonlinéaire, le milieu s'accorde (autant que possible) à la condition au bord à l'aide d'un breather statique de fréquence Ω

$$u_b(n, t) = 4 \arctan \left[\frac{\lambda c \sin(\Omega t)}{\Omega \cosh(\lambda(n + n_0))} \right] \quad (79)$$

en adaptant la position $-n_0$ du centre du breather pour reproduire à l'origine $n = 0$ la condition au bord $u_0(t)$.

Le fait est que ce breather statique a une amplitude bornée donnée par

$$A_s = 4 \arctan \left[\frac{c}{\Omega} \operatorname{arccosh} \left(1 + \frac{1 - \Omega^2}{2c^2} \right) \right]. \quad (80)$$

Dès que l'amplitude A de la condition au bord dépasse cette valeur de seuil, le milieu ne peut plus s'adapter à la condition au bord avec la solution 1-breather et bifurque sur le 2-breather. La seconde composante ne peut pas être aussi un breather statique et donc se propage en emportant de l'énergie. Le processus se répète ensuite régulièrement, c'est ce qu'on appelle la supratransmission et c'est un phénomène intrinsèquement nonlinéaire.

3 Simulations numériques

On résoud l'équation de sine-Gordon (75) pour les conditions aux bords (77) en simulant un ligne semi-infinie par une extrémité absorbante. Plus précisément, les simulations qui suivent ont été produites avec une chaîne de 200 particules et un couplage $c^2 = 100$ sur le logiciel MAPLE (routine `dsolve` avec 10^5 itérations). L'extrémité absorbante est obtenue en ajoutant un terme d'amortissement $\gamma \dot{u}_n$ où γ varie doucement de 0 à 2 sur les 50 dernières particules.

Un exemple de génération de breather au delà du seuil est illustré sur la figure 1 où est représenté l'oscillation d'une particule de la chaîne pour une condition au bord (77) périodique de fréquence $\Omega = 0.90$ et d'amplitude inférieure ou juste supérieure au seuil (80). Les oscillations de grande amplitude dans la deuxième figure témoignent du passage d'un breather.

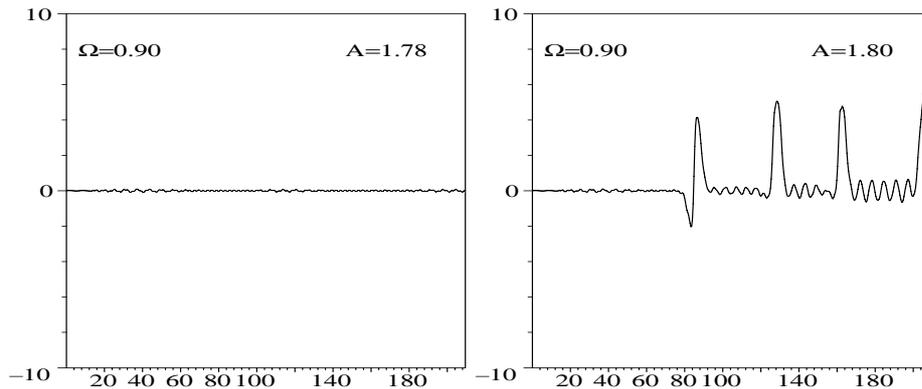


FIG. 1 – Fonction $u_n(t)$ pour $n = 80$ et $\Omega = 0.90$. Les amplitudes sont $A = 1.78 < A_s$ dans la première figure et $A = 1.80 > A_s$ pour la deuxième.

On peut donc explorer systématiquement l'espace des paramètres (A, Ω) et construire la courbe de bifurcation. Le résultat est présenté sur la figure 2 où les points “*expérimentaux*” représentent, à chaque fréquence Ω , la valeur minimale de l'amplitude A pour laquelle se produit la supratransmission. Ces points sont obtenus avec une précision absolue de 10^{-2} . La courbe continue est l'expression de la formule (80) du seuil. On constate un excellent accord entre théorie et simulations numériques, sauf peut-être au voisinage des fréquences 0.30 et 0.18 pour lesquelles la supratransmission a lieu pour des amplitudes légèrement inférieures à la valeur théorique. Ceci s'explique par un effet de blocage des phonons harmoniques qui alors s'ajoutent à la condition au bord [6].

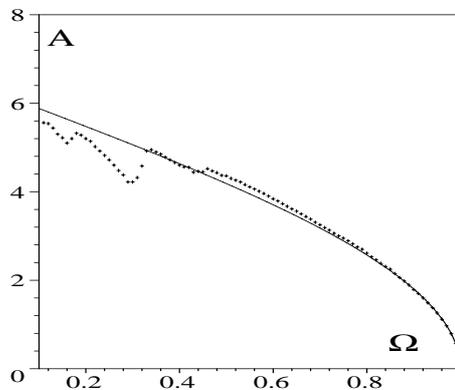


FIG. 2 – Diagramme de bifurcation dans le plan (A, Ω) .

4 Supratransmission nonlinéaire de l'énergie

Une des caractéristiques de ce phénomène nonlinéaire est de permettre la transmission de l'énergie dans une bande interdite par génération de structures nonlinéaires cohérentes. L'énergie injectée dans le milieu par la condition au bord (77) pour $u_0(t)$ est donnée au temps T par l'expression

$$E = -c^2 \int_0^T dt \dot{u}_0(t)[u_1(t) - u_0(t)]. \quad (81)$$

Il suffit alors de calculer numériquement cette valeur en variant l'amplitude A de $u_0(t)$ autour de la valeur de seuil. Le résultat est présenté sur la figure 3. La bifurcation de la quantité d'énergie transmise au milieu est frappante et on peut reproduire ce type de figures pour toute la gamme de fréquences.

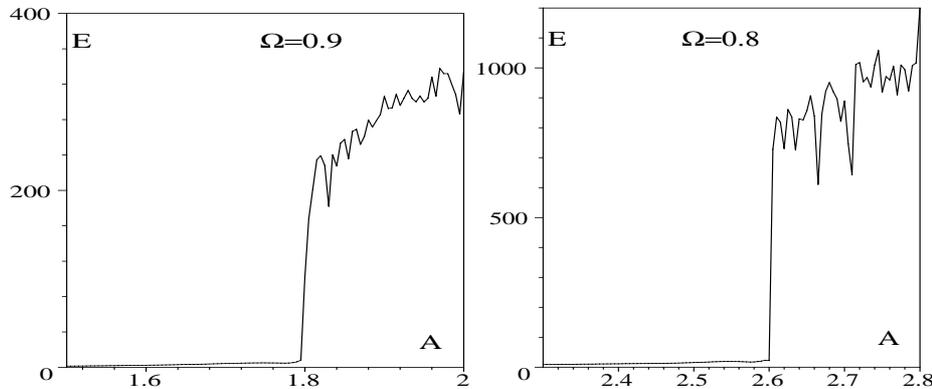


FIG. 3 – *Energie E injectée dans la chaîne pour $T \sim 150$ en fonction de l'amplitude A pour deux valeurs de la fréquence.*

5 Conclusion

Nous avons présenté une nouvelle propriété fondamentale des milieux nonlinéaires qui, du point de vue de la théorie, s'appuie sur l'existence d'une solution explicite (mais approchée dans le cas discret) de type breather. L'équation de sine-Gordon est un modèle pour les jonctions Josephson [14] et plus particulièrement l'équation discrète (75) pour les chaînes de jonctions [15]. La condition au bord résulte de l'application d'un champ magnétique extérieur obtenu par une antenne [16] et modélisée non pas par la valeur $u_0(t)$ mais par la dérivée $u_1(t) - u_0(t)$. Des simulations préliminaires ont montré que le phénomène de supratransmission nonlinéaire avait lieu aussi pour ce type de condition au bord ce qui permet d'espérer un champ d'exploration expérimental prometteur.

Du point de vue de la théorie, ce processus semble basé sur l'existence d'une solution de type breather et sur l'existence d'un principe *superposition nonlinéaire* comme le théorème de Bianchi pour les systèmes intégrables. Une question importante est donc de déterminer si cette propriété se retrouve aussi dans des modèles non intégrables.

Enfin, les effets d'amortissement, de viscosité, de désordre, de force extérieure, de discrétisation, etc..., sont actuellement à l'étude avec en particulier l'objectif de modéliser une situation physique réaliste d'une chaîne de jonctions Josephson.

Références

- [1] E. Fermi, J.R. Pasta, S.M. Ulam, *Studies of nonlinear problems*, Los Alamos Sci. Lab. Rep. (1955) LA-1940, reproduced in: A.C. Newell (Ed.) *Nonlinear wave motion*, AMS Lect Appl Math **15** (1974)
- [2] N.J. Zabusky, M.D. Kruskal, *Phys Rev Lett* **15** (1965) 240
- [3] C.S. Gardner, J.M. Greene, M.D. Kruskal, R.M. Miura, *Phys Rev Lett* **19** (1967) 1095

- [4] V.E. Zakharov, A.B. Shabat, Sov Phys JETP **37** (1972) 62
- [5] M.J. Ablowitz, D.J. Kaup, A.C. Newell, H. Segur, Stud Appl Math **53** (1974) 249
- [6] M. Remoissenet, *Waves Called Solitons*, Springer (Berlin 1999). A.C. Scott, *Nonlinear science*, Oxford University Press (New York 1999)
- [7] A. Sanchez, A.R. Bishop, SIAM Rev **40** (1998) 579
- [8] S. Flach, C.R. Willis, Phys. Rep. **295** (1998) 182. D. Hennig, G.P. Tsironis, Phys Rep **307** (1999) 333
- [9] S. Aubry, Physica D **103** (1997) 201. R.S. MacKay, S. Aubry, Nonlinearity **7** (1994) 1623
- [10] T. Dauxois, M. Peyrard, Phys Rev Lett **70** (1993) 3935. O.Bang, M. Peyrard, Phys Rev E **53** (1996) 4143
- [11] E. Trias, J.J. Mazo, T.P. Orlando, Phys Rev Lett **84** (2000) 741. P. Binder, D. Abraimov, A.V. Ustinov, S. Flach, Y. Zolotaryuk, Phys Rev Lett **84** (2000) 745
- [12] F. Geniet, J. Leon, *Nonlinear supratransmission in the forbidden band gap by breather generation*, soumis à Phys Rev Lett.
- [13] J-G. Caputo, J. Leon, A. Spire, Phys Lett A **283** (2001) 129-135
- [14] A. Barone, G. Paterno, *Physics and application of the Josephson effect*, Wiley (New-York 1982)
- [15] A.V. Ustinov, Physica D **123** (1998) 315; H.S. van der Zant *et al.*, Physica D **119** (1998) 219
- [16] A.V. Ustinov, J. Mygind, V.A. Oboznov, J Appl Phys **72** (1992) 1203. A.V. Ustinov, J. Mygind, N.F. Pedersen, V.A. Oboznov, Phys Rev B **46** (1992) 578

Sources et Puits dans des structures d'ondes progressives

L. Pastur, M.T. Westra, W. van de Water
Eindhoven University of Technology
Fluid Dynamics Laboratory
3600 MB Eindhoven, Pays-Bas
`pastur@ino.it`

Nous avons étudié le comportement dynamique de *structures cohérentes* (e.g. sources et puits) dans une expérience d'ondes progressives non-linéaires excitées à la surface libre d'un fluide chauffé par un fil immergé. Nous avons mis en évidence un changement qualitatif des propriétés des sources pour une valeur critique du paramètre de contrôle, associée à une transition *convective* \rightarrow *absolue* de l'instabilité.

La géométrie du dispositif expérimental est linéaire, avec conditions aux limites rigides. Le rapport d'aspect (longueur du système/longueur d'onde) est de l'ordre de 100. Les ondes sont localisées au-dessus du fil, et se propagent le long du fil (ondes droite ou gauche), dans une configuration quasi $1 - D$. Le profil de la surface est réalisé en déplaçant parallèlement au fil un faisceau laser incident, et en détectant la position du faisceau réfléchi: les variations de position du faisceau réfléchi traduisent les variations de pentes de la surface du fluide au cours du mouvement du laser. Un profil d'amplitude de la surface est ainsi réalisé. Cette technique, extrêmement sensible, permet de résoudre des amplitudes de déformation de la surface à des valeurs du paramètre de contrôle 10 fois inférieures à celles accessibles par des techniques d'ombroscopie classiques.

Le comportement observé des sources est en spectaculaire accord avec de récentes prédictions théoriques formulées dans le cadre d'un formalisme d'enveloppe [1], tandis que les propriétés des puits — dominées par des processus non-adiabatiques — échappent complètement aux attentes théoriques.

Références

- [1] C. Storm, M. van Hecke, W. van Saarloos, *Physica D* **134** (1999) 1.

Intermittences à multi-canaux de réinjection

C. Letellier, P. Werny, J.-M. Malasoma et R. Gilmore

CORIA UMR 6614 - Université de Rouen, BP 12,

76801 Saint-Etienne du Rouvray cedex

Laboratoire Géomatériaux DGCB - URA CNRS 1652, ENTPE, rue Maurice

Audin, 69518 Vaulx en Velin cedex, France

Physics Department, Drexel University, Philadelphia, PA 19104, USA

Christophe.Letellier@coria.fr

Résumé

Les intermittences de type-I sont des comportements observés au voisinage de fenêtres périodiques lorsqu'un paramètre de commande est légèrement varié. Habituellement, ces intermittences ont un unique canal de réinjection ; en d'autres termes, elles ne présentent qu'un seul type de phases laminaires. Nous montrons dans cet article que la présence de symétrie peut conduire à des intermittences de type-I à plusieurs canaux de réinjection. Ce phénomène est illustré à l'aide de couvertures du système de Rössler.

1 Introduction

Les intermittences constituent une route vers le chaos fréquemment rencontrée. Parmi les différentes possibilités, l'intermittence de type-I est habituellement associée à un canal de réinjection : des bouffées chaotiques interrompent des phases laminaires associées à une trajectoire qui visite le voisinage d'une orbite périodique virtuelle qui sera créée, via une bifurcation nœud-col, lorsqu'un paramètre de commande est légèrement varié [1]. Récemment, des intermittences de type-I à deux canaux de réinjection ont été observées au sein de divers systèmes [2, 3, 4]. Il est remarquable que l'ensemble de ces systèmes conduisant à des intermittences à double-canaux de réinjection soient tous équivariants, c'est-à-dire globalement invariants sous l'action d'un groupe de symétries. Une telle symétrie autorise la possibilité d'avoir deux orbites périodiques, l'une étant symétrique de l'autre, co-existantes dans l'espace des phases. Chaque orbite fournit un canal de réinjection distinct.

Dans cet article, nous utiliserons les couvertures d'ordre n du système de Rössler centré [6, 6] afin d'illustrer en détail l'origine de ces intermittences. Les couvertures du système de Rössler sont des systèmes dynamiques invariants sous le groupe de rotations C_n généré par les rotations $\mathcal{R}_z(2\pi/n)$ d'angle $2\pi/n$ autour de l'axe Oz . Nous montrerons qu'alors, des intermittences jusqu'à n canaux de réinjection peuvent être obtenues. Le nombre de canaux dépend du nombre d'orbites périodiques stables co-existant dans l'espace des phases.

2 Couvertures d'ordre n du système de Rössler

Afin de construire des intermittences de type-I présentant jusqu'à n canaux de réinjection, le système de Rössler sera utilisé comme un système image [6]. De manière générale, une couverture d'ordre n $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ d'un système image $\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{G}(\mathbf{u})$, avec une symétrie de

rotation autour de l'axe Oz , est construite à l'aide de la relation

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial x_i}{\partial u_j} \frac{du_j}{dt} = \left[\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right)^{-1} \right]_{ij} G_j(\mathbf{u}) = F_i(\mathbf{x}) \quad (82)$$

avec les notations $\mathbf{x} = (x, y, z) = (x_1, x_2, x_3)$, $\mathbf{u} = (u, v, w) = (u_1, u_2, u_3)$ pour les variables dynamiques, les notations $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$, et $\mathbf{G} = (G_1, G_2, G_3)$ pour les champs de vecteurs, et $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}}$ pour la matrice Jacobienne de l'application $\Psi : \mathbb{R}^3(x, y, z) \rightarrow \mathbb{R}^3(u, v, w)$. Suivant la procédure décrite dans [6], la première étape est de placer le point singulier intérieur du système de Rössler à l'origine de l'espace des phases $\mathbb{R}^3(u, v, w)$. Ceci est réalisé à l'aide du déplacement rigide $(u, v, w) \rightarrow (u + u_0, v + v_0, w + w_0)$ où $u_0 = -av_0 = aw_0 = (c - \sqrt{c^2 - 4ab})/2$ représentent les coordonnées du point singulier intérieur. Le système de Rössler devient alors

$$\begin{cases} \dot{u} = -v - w \\ \dot{v} = u + av \\ \dot{w} = \tilde{b}u + w(u - \tilde{c}) \end{cases} \quad (83)$$

où $\tilde{b} = w_0$ et $\tilde{c} = c - u_0$.

De manière à changer le nombre de cycles limites stables co-existant, il est nécessaire de déplacer l'axe de rotation le long de l'axe Ou d'une quantité μ : le nombre d'orbites périodiques change par l'intermédiaire d'une bifurcation globale appelée bifurcation *épluchage* [6]. Les équations (83) deviennent alors :

$$\begin{cases} \dot{u} = -v - w \\ \dot{v} = u + av + \mu \\ \dot{w} = \tilde{b}(u + \mu) + w(u - \tilde{c} + \mu) \end{cases} \quad (84)$$

2.1 Couverture d'ordre 2

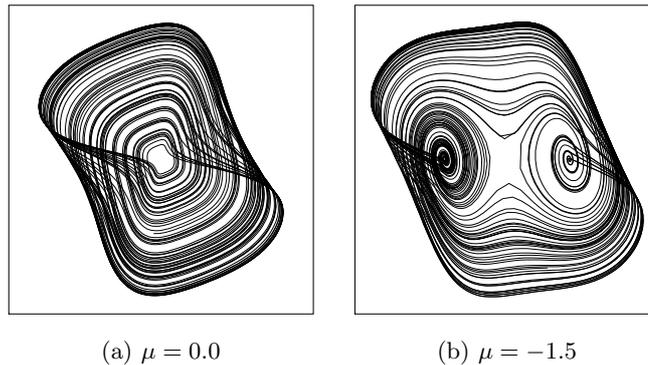


FIG. 1 – *Attracteur chaotique solution de la couverture du second ordre du système de Rössler. Les deux attracteurs sont globalement invariants sous la rotation $\mathcal{R}_z(\pi)$. (a) $\mu = 0.0$, (b) $\mu = -1.5$. Paramètres de commande : $(a, b, c) = (0.432, 2.0, 4.0)$.*

En inversant la transformation

$$\Psi_2 \equiv \begin{cases} u = \Re(x + iy)^2 = x^2 - y^2 \\ v = \Im(x + iy)^2 = 2xy \\ w = z, \end{cases} \quad (85)$$

la couverture du second ordre du système de Rössler s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{2\rho^2} [-\rho^2 y + x(2ay^2 - z) + \mu y] \\ \dot{y} = \frac{1}{2\rho^2} [\rho^2 x + y(2ax^2 + z) + \mu x] \\ \dot{z} = \tilde{b}(x^2 - y^2 + \mu) + z(x^2 - y^2 - \tilde{c} + \mu) \end{cases} \quad (86)$$

où $\rho^2 = x^2 + y^2$. L'attracteur généré par cette couverture est globalement invariant sous la symétrie de rotation $\mathcal{R}_z(\pi)$ (Fig. 1).

L'intermittence de type-I est observée pour $a \approx 0,4091$, b et c étant respectivement égaux à 2 et 4, c'est-à-dire juste avant la fenêtre de période 3. Lorsque $\mu = 0$, l'axe de rotation est situé à l'origine de l'espace des phases $\mathbb{R}^3(u, v, w)$. Le cycle limite de période 3 observé sur le système image que constitue le système de Rössler est donc transformé en une seule orbite de période 6 au sein de la couverture du second ordre (Fig. 2a). Puisqu'un seul cycle limite stable existe, l'intermittence de type-I ne présente qu'un seul canal de réinjection et, par conséquent, qu'un seul type de phase laminaire (Fig. 3a). De manière

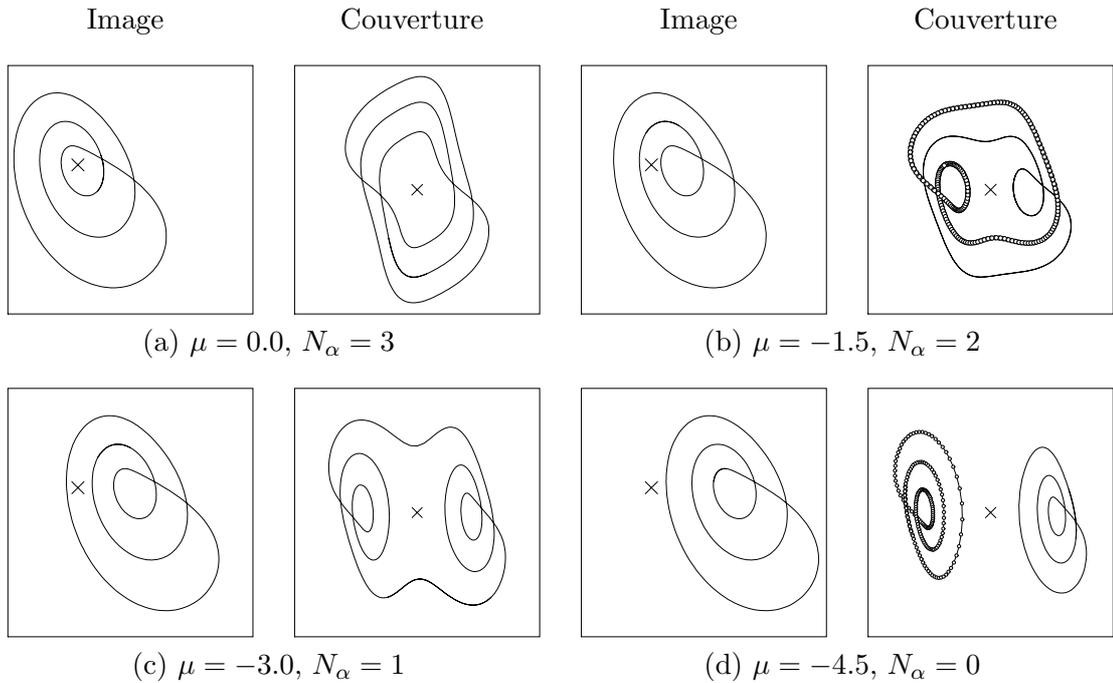


FIG. 2 – Transformation de l'orbite de période 3 générée par les couverture du second ordre du système de Rössler par bifurcations épluchage successives lorsque μ est varié. L'axe de rotation est représenté par le symbole \times . Paramètres de commande : $(a, b, c) = (0.4096, 2.0, 4.0)$.

à changer le nombre de cycles limites qui co-existent dans l'espace des phases $\mathbb{R}^3(x, y, z)$ de la couverture, il suffit de déplacer l'axe de rotation le long de l'axe Ou [6]. En effet, lorsque l'axe de rotation est déplacé vers la gauche de l'axe Ou ($\mu = -1.5$), celui-ci coupe le segment de l'orbite dans l'espace $\mathbb{R}^3(u, v, w)$: une révolution de l'orbite n'entoure alors plus l'axe de rotation (Fig. 2b). Un indice topologique, N_α , permet de définir le nombre de fois que l'orbite tourne autour de l'axe de rotation. Cet indice est réduit d'une unité chaque

fois que l'axe de rotation coupe l'orbite image. Après une première intersection, l'orbite image est transformée en une paire d'orbites symétriques (Fig. 2b). L'indice topologique \tilde{N}_α de la paire est égal à 2, comme dans l'espace image. Le processus est poursuivi jusqu'à

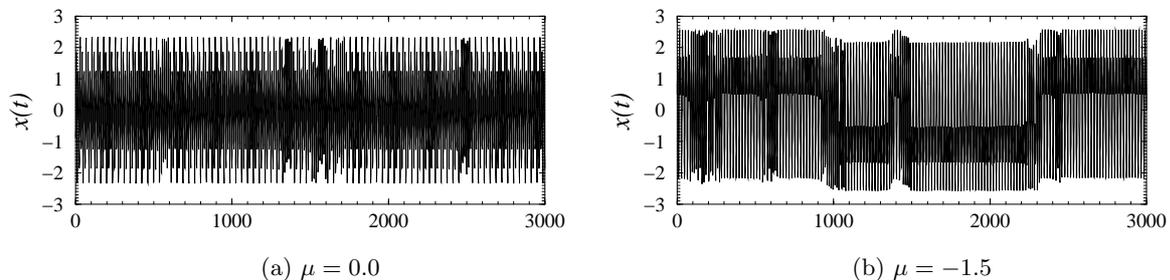


FIG. 3 – Séries temporelles de la variable x correspondant respectivement aux cas où une seule orbite (a) et deux orbites (b) sont associées à la fenêtre de période 3. Dans le premier cas, une intermittence avec un seul canal de réinjection est observé. Dans le second cas, deux canaux de réinjection sont observés. Paramètres de commande : $(a, b, c) = (0.409109, 2.0, 4.0)$.

ce que deux orbites complètement déconnectées (Fig. 2d) soient obtenues. Chaque fois qu'une seule orbite existe dans l'espace $\mathbb{R}^3(x, y, z)$, l'intermittence est à un seul canal de réinjection. Par contre, lorsqu'une paire d'orbites existe ($\mu = -1.5$), et qu'un seul attracteur chaotique est observé pour des valeurs légèrement différentes, une intermittence à deux canaux de réinjection est observée (Fig. 3b). En effet, le point important est que les bouffées chaotiques apparaissant entre deux phases laminaires se développent sur un attracteur globalement invariant sous la rotation $\mathcal{R}_z(\pi)$. Cet attracteur globalement invariant permet d'assurer la transition d'une phase laminaire à l'autre. Lorsque l'axe de rotation est complètement à l'intérieur de l'attracteur, pour $\mu = -1.5$ comme cela est montré Fig. 2d, les bouffées ne se développent que sur l'un des deux attracteurs co-existant dans l'espace $\mathbb{R}^3(x, y, z)$.

2.2 Couverture d'ordre 4

Un cas plus intéressant est obtenu avec une couverture d'ordre 4. Une telle couverture correspond à l'aide de la symétrie de rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$. Elle s'obtient en inversant la transformation

$$\Psi_4 \equiv \begin{cases} u = \Re(x + iy)^4 = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 \\ v = \Im(x + iy)^4 = 4x^3y - 4xy^3 \\ w = z \end{cases} \quad (87)$$

qui est alors appliquée au système image. L'attracteur correspondant à une telle couverture est représenté Fig. 4 pour $\mu = 0$. Comme pour les couvertures du second ordre, selon la position de l'axe de rotation, le nombre de cycles limites stables pouvant co-exister dans l'espace des phases varie (Fig. 5). Dans le cadre de la couverture d'ordre 4, jusqu'à quatre orbites périodiques peuvent co-exister dans l'espace des phases (Fig. 5a). Dans ce cas, quatre types de phases laminaires peuvent être visitées (Fig. 6). Comme dans le cas précédent, les bouffées chaotiques qui entrecoupent les phases laminaires se développent sur un attracteur globalement symétrique : elles permettent ainsi à la trajectoire de transiter d'un canal de réinjection à un autre. Ces transitions ne se développent pas selon un ordre

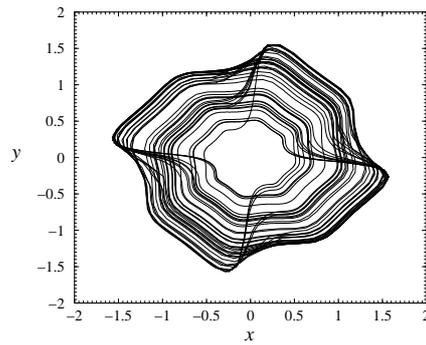


FIG. 4 – *Attracteur chaotique généré par la couverture d'ordre 4 du système de Rössler. Paramètres de commande : $(a, b, c) = (0.432, 2.0, 4.0)$.*

régulier mais plutôt selon un ordre chaotique, c'est-à-dire déterministe mais imprévisible à long terme. Par exemple, si nous numérotions de 1 à 4 les différentes phases laminaires, nous avons la séquence symbolique

2333212441321141

correspondant à la série temporelle représentée Fig. 5.

Il est à noter que dans le cas d'une couverture d'ordre 4, aucune intermittence associée à un nombre impair de canaux ne peut être observée. Soit q la période de l'orbite dans le système image, p la période des orbites correspondantes de la couverture et η leur nombre, la relation $p\eta = q$ doit toujours être vérifiée. Les seuls cas possibles pour $q = 4$ sont donc, quatre orbites de période 1 ($p = 1, \eta = 4$), deux orbites de période 2 ($p = 2, \eta = 2$) et une orbite de période 4 ($p = 4, \eta = 1$). Les deux derniers cas correspondent donc aux deux configurations rencontrées pour la couverture d'ordre 2 où, respectivement, une intermittence à deux canaux et une intermittence à un canal avaient été observées.

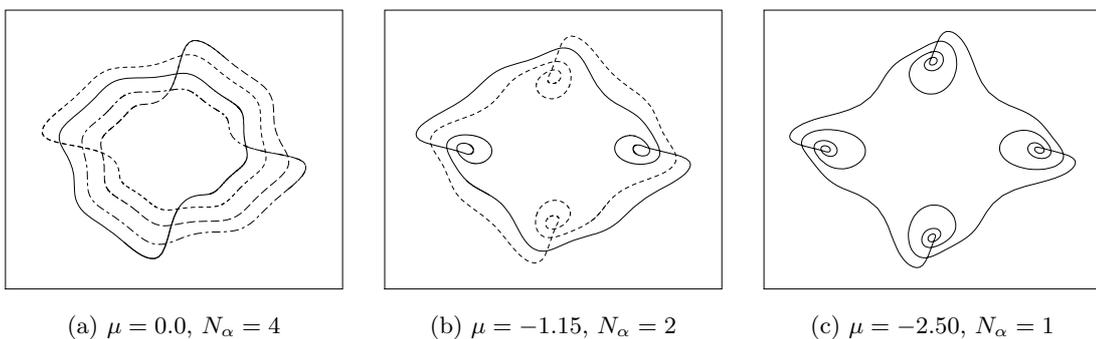


FIG. 5 – *Pour $(a, b, c) = (0.425, 2.0, 4.0)$ le système de Rössler génère une orbite de période 4. Celle-ci est transformée en (a) quatre orbites liées par la rotation $\mathcal{R}_z(\pi/2)$ ($\mu = 0.0$), (b) deux orbites ($\mu = -1.15$) et (c) une seule orbite ($\mu = -2.50$).*

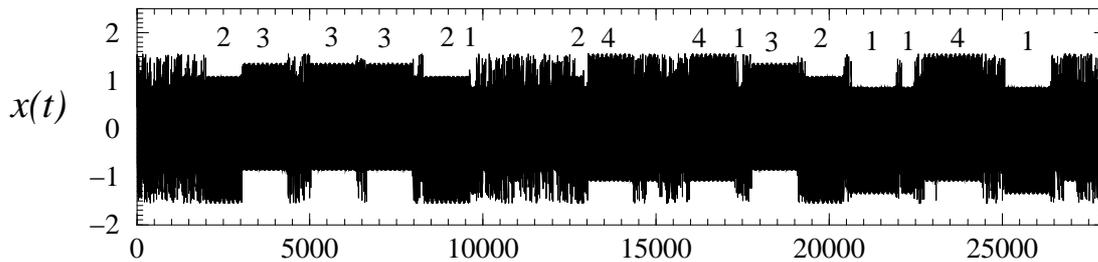


FIG. 6 – Série temporelle de la variable x correspondant au cas où quatre orbites co-existant dans l'espace $\mathbb{R}^3(x, y, z)$. Une intermittence à quatre canaux de réinjection est alors observée et, par conséquent, quatre types de phases laminaires sont observées. Paramètres de commande : $(a, b, c) = (0.42486152, 2.0, 4.0)$.

3 Conclusion

Des intermittences à multiples canaux de réinjection peuvent exister lorsque plusieurs orbites co-existent dans l'espace des phases. Ceci survient dans la mesure où, par exemple, sous une légère variation d'un paramètre de commande, un attracteur globalement invariant sous l'action d'une symétrie est observé. Nous avons montré qu'une couverture d'ordre n du système de Rössler invariante sous le groupe de rotation C_n généré par des rotations $\mathcal{R}_z(2\pi/n)$ pouvait également avoir n orbites de période p , une orbite de période np ou d'autres cas intermédiaires selon les valeurs de l'indice topologique.

Références

- [1] Y. Pomeau & P. Manneville, *Intermittent transition to turbulence in dissipative dynamical systems*, Comm. Math. Phys., **74**, 189, 1980.
- [2] J. San-Martin & J.C. Antoranz, *Type-II intermittency with a double reinjection channel: multi-intermittency*, Phys. Lett. A, **219**, 69, 1996.
- [3] P. Werny, *Contribution à l'étude de modèles chaotiques par approches métriques et topologiques*, Thèse de Doctorat, INSA de Lyon, 27 Septembre 2001.
- [4] J.-M. Malasoma, P. Werny & M.-A. Boiron, *Multichannel Type-I intermittency in two models of Rayleigh-Bénard convection*, soumis.
- [5] C. Letellier & R. Gilmore, *Covering dynamical systems: Two-fold covers*, Phys. Rev. E, **63**, 16206, 2001.
- [6] C. Letellier & R. Gilmore, *Symétrisation de systèmes dynamiques: vers une nouvelle bifurcation globale*, Compte-Rendus de la 4^{ème} Rencontre du Non-Linéaire, 15 & 16 Mars 2001.

Mélange et couplage de polarisation dans des Oscillateurs Paramétriques Optiques

L. Longchambon, J. Laurat, K.S. Zhang, T. Coudreau et C. Fabre
*Laboratoire Kastler Brossel, Université Pierre et Marie Curie, 4, Place Jussieu,
Case 74, 75252 PARIS Cedex 05
longcham@spectro.jussieu.fr*

Résumé

Les oscillateurs paramétriques optiques sont des sources largement utilisées pour la production d'états non classiques du rayonnement. Ils possèdent des effets de seuil dus aux couplages non linéaires qui s'effectuent entre les champs qui y circulent. Les OPO de type II possèdent en outre l'avantage de produire des faisceaux signal et complémentaires polarisés orthogonalement ce qui permet de les séparer aisément. Nous présentons ici deux dispositifs mettant en jeu des effets de polarisation dans de tels OPO qui sont l'OPO auto-verrouillé en phase et l'OPO autopompé.

1 OPO auto-verrouillé en phase

1.1 Introduction

Nous décrivons dans cette partie l'étude théorique d'un Oscillateur Paramétrique Optique verrouillé en phase fonctionnant avec deux modes polarisés orthogonalement et dégénérés en fréquence. Un OPO est constitué d'un cristal non linéaire d'ordre 2 ($\chi^{(2)}$) placé dans une cavité optique résonante. Au-delà d'un seuil de pompage, l'OPO émet 2 faisceaux signal et complémentaire tels que $\omega_0 = \omega_1 + \omega_2$ où ω_0 est la fréquence de la pompe et $\omega_{1,2}$ représentent les fréquences signal et complémentaire. Dans un OPO de type II au-dessus du seuil, le signal et son complémentaire sont polarisés orthogonalement et ont leurs fluctuations d'intensité et de phase quantiquement corrélées. Ces faisceaux sont donc particulièrement adaptés pour des dispositifs de communication quantique mais ils présentent deux caractéristiques qui rendent difficiles leur exploitation: la fréquence est délicate à régler car le système ne fonctionne pas préférentiellement à dégénérescence et la phase relative signal/complémentaire est libre. Partant de la proposition de C.Fabre *et al.* [1], nous avons développé un OPO dont la cavité contient une lame biréfringente: quand les axes optiques de la lame sont inclinés par rapport à ceux du cristal cela introduit un couplage entre signal et complémentaire qui verrouille la différence de phase signal/complémentaire. Ce verrouillage induit la dégénérescence en fréquence et devrait permettre d'exploiter les corrélations de phase intrinsèques à l'OPO.

1.2 Zone d'accrochage

Dans cette partie nous allons décrire les résultats que nous avons obtenus concernant le comportement de l'OPO autoverrouillé. Le système consiste en une cavité de longueur

L dans laquelle sont placés un cristal non linéaire et une lame biréfringente. La définition des paramètres pour le cristal et la lame biréfringente est donnée dans le tableau suivant :

| Element | Longueur | Indice de réfraction pour l'axe lent | Indice de réfraction pour l'axe rapide | Biréfringence |
|---------|----------|--------------------------------------|--|---|
| Cristal | l | n_o | n_e | $\theta = \frac{\omega_0}{2c} \left(\frac{n_o - n_e}{2} \right) l$ |
| Lame | e | n_s | n_f | $\Delta\Phi = \frac{\omega_0}{2c} \left(\frac{n_s - n_f}{2} \right) l$ |

Nous notons ρ l'angle entre les axes du cristal et ceux de la lame. Les équations de propagation sur un tour dans le cas d'un OPO résonant pour les ondes signal et complémentaire sont:

$$\begin{aligned} \frac{dA_1}{dt} &= \left(\alpha r e^{i(\delta_m - 2\theta)} - 1 \right) A_1 + \alpha g A_0 e^{i(\delta_m - 2\theta)} A_2^* + \varepsilon e^{i\delta_m} A_2 \\ \frac{dA_2}{dt} &= \left(\alpha^* r e^{i(\delta_m + 2\theta)} - 1 \right) A_2 + \alpha^* g A_0 e^{i(\delta_m + 2\theta)} A_1^* + \varepsilon e^{i\delta_m} A_1 \end{aligned}$$

où :

- A_0 , A_1 et A_2 sont respectivement les amplitudes de la pompe, du signal et du complémentaire.
- α et ε représentent le couplage entre les deux polarisations, $\alpha = \cos 2\Delta\Phi + i \sin 2\Delta\Phi \cos 2\rho$ et $\varepsilon = i \sin 2\Delta\Phi \sin 2\rho$.
- r est le coefficient de réflexion en amplitude pour le signal et le complémentaire (on suppose que la cavité n'a qu'un miroir de couplage).
- $\delta_m = \frac{\omega_0}{2c} \left(\frac{n_o + n_e}{2} 2l + 2L + \frac{n_s + n_f}{2} 2e \right)$ est le déphasage moyen sur un tour pour le signal et le complémentaire.
- g est proportionnel au coefficient non linéaire du cristal.
- δ_m et θ dépendent linéairement de la température et de la longueur de la cavité.

Les solutions stationnaires de ces équations couplées sont non nulles si le déterminant du système est égal à zéro. Pour une intensité pompe donnée cela nous donne une zone d'accrochage, *i.e.* la délimitation des valeurs de la longueur de cavité et de la température pour lesquelles l'OPO oscille. T et L peuvent être mis sous la forme $T = T_0 + \Delta T$ et $L = L_0 + \Delta L$ où T_0 et L_0 sont les valeurs pour lesquelles le système est à dégénérescence et intensité de sortie signal/complémentaire maximale pour un angle de la lame nul ($\rho=0$). Nous avons tracé ci-dessous la zone d'accrochage pour une intensité pompe intracavité et un angle donnés (figure 1). La zone d'accrochage a maintenant une extension non nulle dans l'espace des paramètres expérimentaux (ΔL , ΔT). Les points dans la fig.1 sont un effet d'échantillonnage du programme. L'encart est un zoom d'une petite portion de la zone où l'on peut voir sa continuité et aussi sa largeur pour une intensité intracavité pompe donnée.

Il est à noter une différence importante entre le dispositif avec une cavité en anneau et celui avec une cavité linéaire: la présence d'ondes stationnaires dans la cavité linéaire dont les déphasages dépendent des déphasages successifs accumulés sur les miroirs et de la traversée des milieux biréfringents amène à une remontée du seuil minimum d'oscillation en fonction de l'angle de la lame alors que le seuil minimum d'un OPO sans lame peut toujours être atteint en cavité en anneau et ceci quel que soit l'angle de la lame.

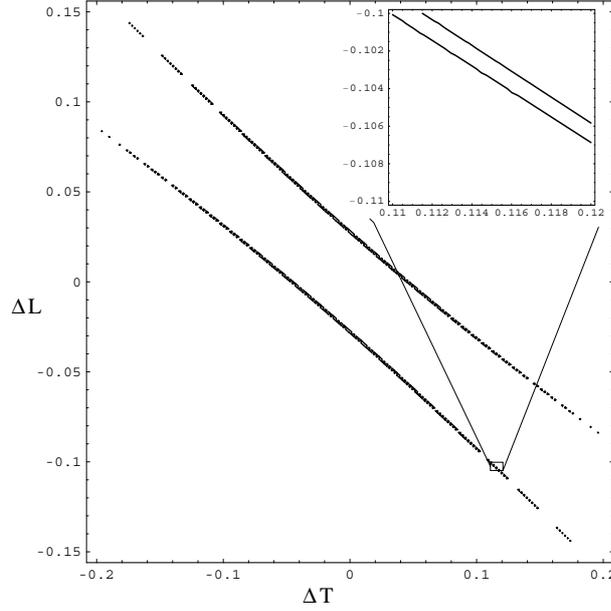


FIG. 1 – Zone d'accrochage en température et longueur pour une intensité pompe intracavité normalisée de 2 et $\rho = 5^\circ$

2 OPO autopompé

2.1 Introduction

Nous décrivons ici un dispositif expérimental de génération de second harmonique de type II fonctionnant avec deux modes orthogonalement polarisés dégénérés en fréquence. Ce système présente des effets de seuil marqués qui permettent de l'utiliser dans un dispositif de remise en forme optique.

2.2 Description théorique

On envoie dans la cavité un faisceau de fréquence ω_0 polarisé linéairement à $+45^\circ$ par-rapport aux axes optiques du cristal de type II. Les équations stationnaires qui relient les amplitudes A_+ et A_- des champs respectivement à $+45^\circ$ et -45° des axes optique au champ de seconde harmonique A_0 à fréquence $2\omega_0$, à proximité de résonance et pour un OPO triplement résonant sont :

$$\begin{aligned} (\kappa + i\delta_m)A_+ &= -i\delta_-A_- + gA_0A_+^* + \sqrt{2\kappa}A_+^{in} \\ (\kappa + i\delta_m)A_- &= -i\delta_+A_+ - gA_0A_-^* \\ (\kappa_0 + i\delta_0)A_0 &= -\frac{g}{2}(A_+^2 - A_-^2) \end{aligned}$$

où:

δ_m est le déphasage moyen sur un tour pour le signal et le complémentaire.

δ_- représente la différence de phase sur un tour entre signal et complémentaire dûe à la biréfringence du cristal.

$r=1-\kappa$ et $r_0=1-\kappa_0$ où r et r_0 sont les coefficients de réflexion en amplitude respectivement pour signal/complémentaire et le second harmonique.

La résolution de ces équations fait apparaître deux comportements en fonction de P_{in} , l'intensité du faisceau incident comme on peut le voir sur la figure 2. Lorsque $P_{in} \leq P_{seuil}$ pratiquement toute l'intensité est convertie en second harmonique ce qui implique une amplitude nulle sur A_- et presque nulle sur A_+ . Lorsque $P_{in} \geq P_{seuil}$ l'intensité du second harmonique a atteint le seuil de conversion paramétrique et l'intensité I_- devient non nulle et varie linéairement en P_{in} .

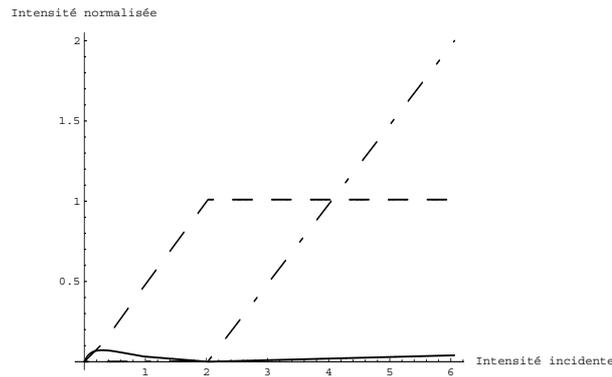


FIG. 2 – Intensités sortantes en fonction de l'intensité du faisceau incident. La ligne en pointillés symétriques correspond au champ A_0 , la ligne pointillée dissymétrique correspond au champ A_- et la ligne pleine au champ A_+ .

2.3 Dispositif expérimental

Cette propriété de seuil à partir de laquelle apparaît la composante sur la polarisation orthogonale au faisceau incident a été exploitée dans une expérience où l'on envoie une impulsion incidente sur la cavité linéaire et où on récupère le faisceau sur A_- à l'aide d'un circulateur optique. L'effet de seuil permet de couper la base de l'impulsion ce qui est un effet tout optique qui peut être utilisé dans des dispositifs de télécommunications pour la remise en forme de signaux dégradés.

Références

- [1] Claude Fabre, E.J. Mason, N.C. Wong, *Theoretical analysis of self-phase locking in a type II phase-matched optical parametric oscillator*, Opt. Comms. **170**, 299(1999),

Thermocapillary-buoyant convection in laterally heated liquid layers

S. Madruga⁽¹⁾, C. Pérez-García⁽²⁾ and G. Lebon⁽¹⁾

(1) *Université de Liège, Institut de Physique B5, Sart-Tilman, B-4000 Liège, Belgique*

(2) *Instituto de Física, Universidad de Navarra, E-31080 Pamplona, Spain*

smadruga@fisica.unav.es

Résumé

1 Introduction

Buoyant-thermocapillary convection is a fluid motion driven by buoyancy effect and temperature-induced interfacial-tension variation. Such kind of flow can arise in a liquid-gas or a liquid-liquid interface subjected to a temperature gradient. For laterally-heated systems the instability mechanism is quite complex. A *basic flow* settles down in the fluid as soon as a lateral heating is applied. Smith and Davis [1] discussed this problem by considering only thermocapillary flows. They showed that for intermediate and low Prandtl numbers travelling oblique waves, known as *hydrothermal waves* superpose to the basic flow beyond a given temperature gradient threshold. Later on some authors [2, 3] extended these calculations by taking into account buoyancy effects and thermal transfer properties at the interface. Daviaud and Vince [4] reported the first observation of hydrothermal waves in a shallow layer of silicon oil of $0,65cSt$ ($Pr = 10$). These observations were completed by other authors considering different liquids and geometries [6, 6]. Theoretical calculations by Priede and Gerbeth [7] showed that, in order to understand the distinct regimes encountered in experiments it is important to distinguish between *absolute and convective* instabilities. Moreover these authors achieved a good agreement between some of the physical features of the hydrothermal waves found in Ref. [6]. Recently Pelacho *et al.* [8] and Burguete *et al* [9] reported new results on hydrothermal waves in different geometries. The aim of this short communication is to complete the linear stability analysis for a liquid with $Pr = 10$ by varying the liquid depth, as generally considered in experiments.

2 Basic equations

We consider a horizontal liquid layer of thickness h under a horizontal temperature gradient. As usual, we introduce the thermocapillary effects through the temperature-dependent surface tension $\sigma(T) = \sigma(T_o) - \frac{\partial\sigma}{\partial T}(T - T_o)$. Using the standard notation for the physical parameters in the fluid and introducing h , h^2/κ , κ/h , $\rho\nu\kappa/h^2$ as scales of length, time, velocity and pressure respectively the dimensionless balance equations take the form

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (88)$$

$$\frac{1}{Pr} \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = -\nabla p + Ra T \hat{z} + \nabla^2 \mathbf{u} \quad (89)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T = \nabla^2 T \quad (90)$$

The horizontal temperature gradient β leads to a linear temperature profile at the bottom conductive plate given by $T_b = T_0 + x$. The heat transfer at the free interface is assumed to be of the form $\partial_z T = Bi(T - T_\infty(x))$ where $Bi = h d/k$ is the Biot number and $T_\infty(x) = x$ is the temperature in the air far from the interface. We assume that the top and the bottom surfaces are undeformable so that the vertical component of the velocity $\mathbf{u} = (u, v, w)$ is $w = 0$. Moreover, the bottom is rigid with $\mathbf{u} = 0$, and tangential forces are balanced at the top interface, so that $\partial_z \mathbf{u}_h + M_a \nabla_h T = 0$. The Rayleigh number R_a accounts for buoyancy forces, and the Marangoni number M_a for capillary effects. These are related by $R_a/M_a = Bo$, Bo being the dynamic Bond number defined as $Bo = -g\alpha\rho d^2/(\partial\sigma/\partial T)$. The value of Bo remains fixed for an experimental set-up in which M_a and R_a are changing each other. To study the relative influence of thermocapillary and buoyant effects for a given fluid it is sufficient to change the depth of the layer.

3 The basic state

As soon as a horizontal temperature gradient is applied in a finite container a stationary basic flow of the form $T = x + \tau(z)$, $\mathbf{u}_b = (u_0(z), 0, 0)$ [1] sets in. The explicit form of $u_0(z)$ and $\tau_0(z)$ can be found in Refs. [3, 7] for the buoyant-thermocapillary case with an adiabatic or a conductive bottom, respectively.

In a linear stability analysis of the basic state the disturbed fields are expanded in normal modes $(\hat{\mathbf{u}}, \theta, \hat{p}) = (\hat{\mathbf{u}}(z), \theta(z), \hat{p}(z)) \exp i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)$. Here ω denotes the complex time growth rate, $\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{k}$ is the wavenumber in the streamwise direction and $\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{k}$ the wavenumber in the spanwise direction. Eliminating the pressure between the balance equations, the equations for the perturbations (u, v, w) -where the hats are dropped for clarity- read as

$$\partial_z^2 u = L u + \frac{k_y^2}{k^2} P_r^{-1} w \partial_z u_0 + i \frac{k_x}{k^2} (\partial_z^3 w - L \partial_z w) \quad (91)$$

$$\partial_z^4 w = (L + k^2) \partial_z^2 w - L k^2 w + R k^2 \theta - i k_x P_r^{-1} w \partial_z^2 u_0 \quad (92)$$

$$\partial_z^2 \theta = (k^2 + i(\omega + k_x u_0)) \theta + u + w \partial_z \tau_0 \quad (93)$$

where $L = k^2 + i P_r^{-1}(\omega + k_x u_0)$. The corresponding relevant boundary conditions are

$$u = w = \partial_z w = \theta = 0 \quad \text{in } z = 0 \quad (94)$$

$$w = \partial_z \theta + Bi \theta = \partial_z u + i k_x M_a \theta = \partial_z^2 w + M_a k^2 \theta = 0 \quad \text{in } z = 1 \quad (95)$$

This linear sets of ordinary differential equations is solved by approximating their eigenfunctions through Chebyshev polynomials with a tau spectral method. The marginal curves are found by searching the set of values k_x, k_y, M_a which corresponds to a vanishing temporal growth rate.

4 Convective/absolute stability

The problem of linear stability is more involved in presence of a basic mean flow in the fluid. Consider a fixed point in the fluid where a small perturbation becomes unstable and begins to grow. The mean flow of the fluid will drag this perturbation at the same time that it is growing. If the perturbation is advected with a greater velocity than its rate of growing, the point will come back to its initial state afterwards. The perturbation will grow

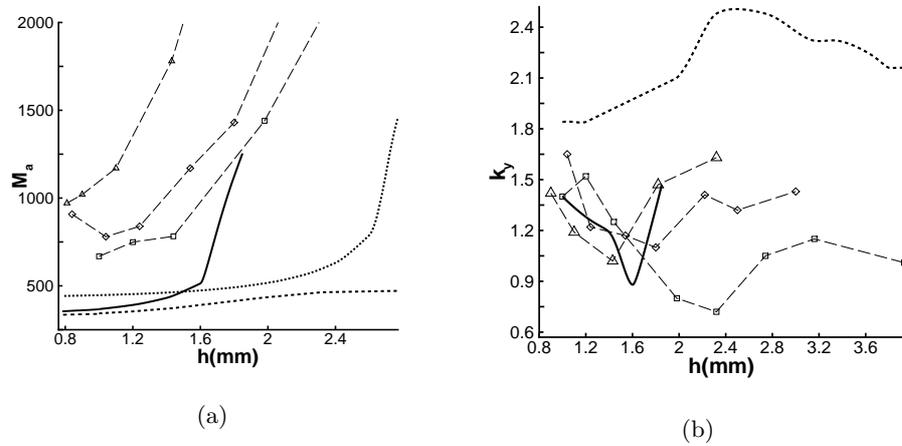


FIG. 1 – Critical Marangoni numbers (a) and transversal wave-numbers (b) v.s. the depth of the fluid layer (h). Light long-dashed lines: experimental data (\triangle $L_x = 10$ mm, \diamond $L_x = 20$ mm, \square $L_x = 30$ mm). Heavy solid line: absolute instability. Heavy dotted line: convective stationary transverse threshold. Heavy short-dashed line: convective instability.

in a system of reference moving with the same group velocity. This behavior is referred to as convective instability, and the system just amplifies the perturbations excited externally. In contrast when the rate of growing of the perturbation is faster than the drag velocity the perturbation will not decay. Then the fixed point suffers a perturbation increasing with time, which finally will spread in the whole fluid in the lab reference. This is called as absolute instability.

To distinguish between convective and absolute instabilities one follows the behavior of the wavenumber k_0 with zero group velocity $\frac{\partial w}{\partial k}(k_0) = 0$, k_r and k_i are the real and imaginary parts of k respectively. If the corresponding complex frequency $w_0 = w(k_0)$ is characterized by a positive growth rate $w_{0,i}$, the flow is absolutely unstable. On the contrary when it is negative, the flow is convectively unstable. Usually k_0 is a saddle point of $w(k)$. The two conditions defining the saddle point are $\frac{\partial w_r}{\partial k_r} = \frac{\partial w_i}{\partial k_r} = 0$ (9). The frequency is function of the complex wavenumber k and the Marangoni number considered as a parameter $w = w(k; Ma)$. Additional restriction of neutral stability $w_i(k; Ma) = 0$ defines implicitly the critical Marangoni number $Ma = Ma(k_r; k_i)$. Differentiating with respect to k_r , we obtain $\frac{\partial w_i}{\partial k_r} + \frac{\partial w_i}{\partial Ma} \frac{\partial Ma}{\partial k_r} = 0$. Taking into account that $\frac{\partial w_i}{\partial Ma} < 0$ at the threshold of neutral stability, the second condition defining a saddle point $\frac{\partial w_i}{\partial k_r} = 0$ implies that $\frac{\partial Ma}{\partial k_r} = 0$, so that Ma is a local extremum. In a representation of Ma v.s. w conditions (9) appear as a cusp point. Following [7] this point is used to detect the threshold of absolute instability. We now compare theory with experimental data provided by Burguete et al. [9]. Their apparatus consists of a rectangular container with a narrow length of 10, 20 and 30 mm and a wider one of 250 mm. The working fluid used is 0.65 cSt silicon oil with a Prandtl number $P=10.3$. The experimental set-up is controlled by two parameters: the fluid depth and the horizontal temperature difference between the vertical longer walls. The temperature gradient drives the fluid upwards near the hot wall and downwards near the cold wall.

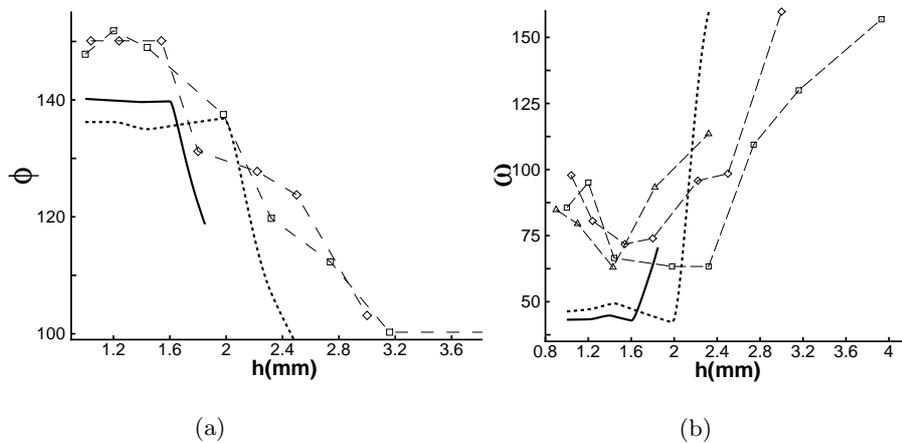


FIG. 2 – Angle of the wave-vector with respect to the x axis (a) and frequency of oscillation (b) v.s. the depth of the fluid layer (h). We take as unity of time h^2/κ , so that frequencies of Burguete et al. [9] have been normalized. Light long-dashed lines: experimental data ($\triangle L_x = 10$ mm, $\diamond L_x = 20$ mm, $\square L_x = 30$ mm). Heavy solid line: absolute instability. Heavy short-dashed line: convective instability.

In Fig. 1(a) is represented the critical Ma for the absolute and convective instabilities compared to the experimental one. The Marangoni numbers reported for all ratio aspect consider the horizontal gradient imposed to the walls. Owing to the existence of thermal boundary layers near the hot and cold walls this is greater than the calculated value in the middle of the cell along the interface, more suitable to compare with theoretical results which suppose uniform gradients. Therefore the comparison is more difficult. Until $h = 1$ there is not a strong difference between the thresholds of absolute and convective instabilities, however when the buoyant effects are more important the differences begin to increase. The difference between both thresholds increases with h . The absolute curve fits better the experimental data until it diverges to infinity. Moreover, in the experimental data, it is observed, for all lengths, that there exists a first regime of weak increase of Ma with the depth for small h followed by a strong dependence of Ma with respect to h , as exhibited by the absolute curve.

The walls induce stationary perturbations which are not convectively the most unstable, moreover the convective oscillatory perturbations must have a growing rate large enough to be observable experimentally due to the finite size of the container. Therefore the first perturbations to be detected in the system consists of streamwise stationary rolls ($k_y = 0$). This scenario is observed when the stationary curve is lower than the absolute curve. Experimentally it is found that the breakdown of the basic convective structure into co-rotating rolls, with the wave-vector parallel to the temperature gradient, sets in before. Then the appearance of waves in the experiment occurs in a state perturbed by the lateral walls. In order to obtain a better agreement with experiments a non-linear analysis would be necessary.

The transverse wave-number of the travelling waves is presented in Fig. 1(b). The wave-number depend on the length of the experimental set-up, although this dependence

is smaller than for the critical Marangoni. Two regimes are seen at all aspect ratios. A decrease of the wavenumber with depth, reaching a minimum which depends on the experimental configuration, following by an opposite trend characterised by an increase of the wavenumber until it saturates. Tracking the point of absolute instability numerically, increasing the depth of the fluid, it is found that for small h , the critical M_a of absolute instability is a minimum, however at larger depths the most unstable branch becomes a local maximum. In short, the first regime of decreasing spanwise wavenumbers corresponds to local minima in the cusp points of M_a , whereas the increasing phase describes a local maxima. Finally the absolute instability diverges, thus the saturation of the wave-number could be due to the influence of the stationary rolls that appear after that the basic state is perturbed by the convective oscillatory instability.

For small h the thresholds of convective and absolute instabilities are close, but there is an appreciable difference in the directions of the wave-vectors. The angle of propagation for the absolute instability remains almost unchanged until the system attains a regime characterized by fast M_a growth, for greater h ; afterwards the wave-vectors begin to move towards the spanwise direction, as seen in Fig. 2(a). The convective marginal surface has two minima that come into play, up to $h \approx 2$ the wave-vector of the absolute minimum has a direction almost constant, but for $h \geq 2$ the secondary minimum becomes the absolute one, with an abrupt change in the direction of propagation.

The better agreement between the convective and absolute analysis is for the frequency of oscillation in the threshold of instability. Both present the same trends, however in this case the absolute instability does not give a better approximation to the experiments.

5 Conclusions

The aim of this work is to study the oscillatory instabilities in a fluid layer heated laterally. We have compared our results with recent experimental data on silicon oil with $P_r = 10.3$ in containers of small length[9]. Due to the difficulty of evaluating experimentally the Biot number, since the air layer over the fluid presents strong convective flows, we have taken $Bi = 1$ as suggested in [9].

To obtain a good fit between experimental data and theory we have used the concepts of absolute instability, instead of simple convective instability, as generally done. The convective analysis does not reproduce neither the trend of the transverse wave-numbers nor the experimental values of the rest of critical parameters. We have shown that the absolute instability allows to explain some of the features found in experiments. The concept of absolute instability gives a better agreement for the critical Marangoni and wave-number. Moreover, it is able to interpret some experimental regimes as a change of the unstable absolute branch. For instance, at small depths the cusp point of the absolute instability corresponds to a local minimum. In this phase the transverse wave-number decreases with h , and the angle of the wave-vectors, critical Marangoni and frequency do not vary a lot. Whereas when the buoyant effects are more important the most unstable cusp point is a maximum of a new branch. This phase is observed in an increase of the transverse wave-number with h and in a strong dependence of M_a , angle of the wave-vector and frequency with respect to h .

Références

- [1] M.K. Smith and S.H. Davis *Instabilities of dynamic thermocapillary liquid layers. Part 1. Convective instabilities*, J. Fluid Mech. **132**, 119 (1983)
- [2] P. M. Parmentier, V.C. Regnier and G. Lebon, *Bouyant-thermocapillary instabilities in medium Pr number fluid layers subject to a horizontal temperature gradient*, Int. J. Heat Mass Transfer **36**, 2417 (1993)
- [3] J.F. Mercier and C. Normand *Buoyant-thermocapillary instabilities of differentially heated liquid layers*, Phys. Fluids **8**, 1434 (1996)
- [4] F. Daviaud and J.M. Vince *Traveling waves in a fluid layer subjected to a horizontal temperature gradient*, Phys. Rev. E, **48**, 4432 (1993)
- [5] N. Mukolobwicz, A. Chiffaudel and F. Daviaud *Supercritical Eckhaus instability for surface-tension-driven hydrothermal waves*, Phys. Rev. Lett., **80**, 4661 (1998).
- [6] R.J. Riley and G.P. Neitzel *Instability of thermocapillary-buoyancy convection in shallow layers. Part 1. Characterization of steady and oscillatory instabilities*, J. Fluid Mech., **359** 143 (1998)
- [7] J. Priede and G. Gerbeth *Convective, absolute, and global instabilities of thermocapillary-buoyancy convection in extended layers*, Phys. Rev. E **56**, 4187 (1997)
- [8] M.A. Pelacho, A. Garcimartín and J. Burguete *Local Marangoni number at the onset of hydrothermal waves*, Phys. Rev. E, **62**, 477 (2000)
- [9] J. Burguete, N. Mukolobwicz, F. Daviaud, N. Garnier, and A. Chiffaudel *Buoyant-thermocapillary instabilities in an extended liquid layer subjected to a horizontal temperature gradient*, Phys. Fluids **13**, 2773 (2001)

Détermination du groupe d'équivariance d'un modèle hyperchaotique de convection de Rayleigh-Bénard

Marie-Aurélié Boiron et Jean-Marc Malasoma

*Laboratoire Géomatériaux DGCB-URA CNRS 1652
ENTPE, rue Maurice Audin, 69518 Vaulx-en-Velin cedex, France
boiron@entpe.fr malasoma@entpe.fr*

Résumé

Le modèle à neuf modes de convection de Rayleigh-Bénard établi par P.Reiterer constitue un excellent exemple de système dynamique permettant l'étude du chaos déterministe en dimension supérieure à trois. Il possède, en outre, d'intéressantes propriétés de symétries : il reste en effet invariant sous l'action d'un groupe de symétries isomorphe au groupe de Klein.

1 Introduction

Lorsque la dimension de l'espace des phases d'un système dynamique est élevée, même pour un champ de vecteurs polynomial, il est rarement possible de déterminer le nombre des points fixes de ce système et encore moins de déterminer ces états d'équilibre. Toutefois, certains systèmes dynamiques restent globalement invariants sous l'action d'un groupe fini de symétries. La détermination de ce groupe permet alors d'orienter et de simplifier considérablement la recherche des points fixes du système qui présentent une ou plusieurs symétries. La connaissance du groupe d'équivariance d'un système permet également de faciliter l'étude des bifurcations que peuvent subir les points fixes lorsqu'un paramètre de contrôle varie. Dans cet article, nous allons appliquer cette stratégie à un modèle de convection de Rayleigh-Bénard de dimension 9 récemment établi par P. Reiterer.

2 Présentation du modèle

Le plus ancien et le plus connu des systèmes dynamiques équivariants est le système chaotique de Lorenz. Il est obtenu en utilisant l'approximation de Boussinesq des équations de Navier-Stokes et de la chaleur modélisant le phénomène de convection de Rayleigh-Bénard. La température, ainsi que les trois composantes du potentiel des vitesses sont projetées sur une triple base de Fourier et seulement trois modes sont conservés. En utilisant quatre modes pour la température, deux modes pour chacune des deux composantes horizontales du potentiel des vitesses et un seul mode pour la composante verticale de ce potentiel, P. Reiterer a obtenu [1, 2] un système plus complexe qui, outre ses propriétés de symétrie, présente d'intéressantes transitions chaos-hyperchaos. Ce système est constitué de neuf

équations différentielles ordinaires couplées :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{C}_1 = -\sigma b_1 C_1 - \sigma b_2 C_7 - C_2 C_4 + b_3 C_3 C_5 + b_4 C_4^2 \\ \dot{C}_2 = -\sigma C_2 - \frac{\sigma}{2} C_9 + C_1 C_4 - C_2 C_5 + C_4 C_5 \\ \dot{C}_3 = -\sigma b_1 C_3 + \sigma b_2 C_8 - b_3 C_1 C_5 - b_4 C_2^2 + C_2 C_4 \\ \dot{C}_4 = -\sigma C_4 + \frac{\sigma}{2} C_9 - C_2 C_3 - C_2 C_5 + C_4 C_5 \\ \dot{C}_5 = -\sigma b_5 C_5 + \frac{C_2^2}{2} - \frac{C_4^2}{2} \\ \dot{C}_6 = -b_6 C_6 + C_2 C_9 - C_4 C_9 \\ \dot{C}_7 = -b_1 C_7 - r C_1 - C_4 C_9 + 2 C_5 C_8 \\ \dot{C}_8 = -b_1 C_8 + r C_3 + C_2 C_9 - 2 C_5 C_7 \\ \dot{C}_9 = -C_9 - r C_2 + r C_4 - 2 C_2 C_6 - C_2 C_8 + 2 C_4 C_6 + C_4 C_7 \end{array} \right. \quad (96)$$

où les \dot{C}_i sont les dérivées par rapport au temps des neuf modes C_i .

Les rapports d'aspect de la cellule ont pour expression :

$$\begin{aligned} b_1 &= 4 \frac{1+a^2}{1+2a^2}, \quad b_2 = \frac{1+2a^2}{2(1+a^2)} \\ b_3 &= \frac{2(1-a^2)}{1+a^2}, \quad b_4 = \frac{a^2}{1+a^2} \\ b_5 &= \frac{8a^2}{1+2a^2} \text{ et } b_6 = \frac{4}{1+2a^2} \end{aligned} \quad (97)$$

Il s'agit donc d'un système différentiel de \mathbb{R}^9 dépendant de trois paramètres: r , σ et a . Pour la suite, nous adopterons la notation $\dot{C} = F(C)$ pour faire référence à ce système.

La recherche des points fixes de (1), passe par la résolution d'un système de 9 polynômes quadratiques à 9 indéterminées. Il n'est pas possible de résoudre ce système de façon analytique, ni même de connaître a priori le nombre de ses solutions en fonction des trois paramètres. Toutefois le système (1) présente des symétries qui vont nous permettre de trouver sous forme analytique tous les points fixes invariants par ces symétries.

3 Détermination du groupe d'équivariance

Soient G un groupe multiplicatif de neutre I et E un ensemble. On appelle action de G sur E la loi externe :

$$\begin{aligned} G \times E &\rightarrow E \\ (\gamma, x) &\mapsto \gamma x \end{aligned} \quad (98)$$

vérifiant : $\forall (g, h) \in G, \forall x \in E, g(hx) = (gh)x$ et $\forall x \in E, Ix = x$.

Soit un système dynamique régi par le champ vectoriel $\dot{x} = f(x, \mu)$ où x est le vecteur des n variables d'état et μ le vecteur des m paramètres. On dit alors que ce système est laissé équivariant sous l'action de γ , matrice inversible de dimension n , si $f(\gamma x, \mu) = \gamma f(x, \mu)$ quels que soient les vecteurs d'état et de paramètres.

L'ensemble de ces matrices γ possède une structure de groupe, appelé groupe d'équivariance du champ. Déterminons dans un premier temps la forme générale des matrices laissant invariant le modèle à neuf modes.

Théorème :

Soit A une matrice réelle, carrée d'ordre 9, vérifiant pour tous réels r , σ et a et pour tout vecteur $C \in \mathbb{R}^9$ l'égalité :

$$F(AC) = A F(C)$$

où F est le champ de vecteurs défini par 96 alors A est de la forme :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & a_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{42} & 0 & a_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{55} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{77} & a_{78} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{87} & a_{88} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{99} \end{bmatrix} \quad (99)$$

Pour des questions de place, nous ne donnerons ici que le principe de la démonstration. Le lecteur intéressé trouvera une preuve complète de ce résultat dans [3].

Soient F_i les composantes du champ de vecteurs F et a_{ij} le terme général de la matrices

A . Adoptons la notation simplifiée : $(AX)_k = \sum_{i=1}^9 A_{ki} X_i$.

La relation $F(AC) = A F(C)$ doit être vérifiée quelles que soient les valeurs des paramètres r , σ et a . Par conséquent, les coefficients de la matrice A sont choisis réels ne dépendant pas des paramètres du problème.

Nous avons par exemple $F_1(AC) = -\sigma b_1(AC)_1 - \sigma b_2(AC)_7 +$ termes non linéaires

Or $(AC)_1 = \sum_{i=1}^9 a_{1i} C_i$ et $(AC)_7 = \sum_{i=1}^9 a_{7i} C_i$

Donc $F_1(AC) = -\sum_{i=1}^9 \sigma b_1 a_{1i} C_i - \sum_{i=1}^9 \sigma b_2 a_{7i} C_i +$ termes non linéaires

S'il existe $i_0 \in \{2, 4, 6, 7, 8, 9\}$ tel que $a_{1i_0} \neq 0$ alors le terme $\sigma b_1 a_{1i_0} C_{i_0}$ est présent dans l'expression $F_1(AC)$. De plus, comme A doit vérifier $F_1(AC) = (AF(C))_1$ quelles que soient les valeurs de nos trois paramètres, ce terme doit être également présent dans $(AF(C))_1$, qui est une combinaison linéaire des $F_n(C)$.

Or dans les différentes composantes de F , il n'existe pas de terme linéaire en C_i $i \in \{2, 4, 6, 7, 8, 9\}$ ayant un coefficient proportionnel à σb_1 .

Comme on souhaite déterminer A vérifiant l'égalité quelles que soient les valeurs de nos trois paramètres, il est nécessaire que $a_{1i} = 0 \forall i \in \{2, 4, 6, 7, 8, 9\}$. Par conséquent, nous avons $(AC)_1 = a_{11}C_1 + a_{13}C_3 + a_{15}C_5$.

D'autre part, $F_7(AC) = -b_1(AC)_7 - r(AC)_1 +$ termes non linéaires. Si $a_{15} \neq 0$ alors le terme $a_{15} r C_5$ est présent dans $F_7(AC)$. Or $F_7(AC) = (AF(C))_7$ est une combinaison linéaire des $F_n(C)$. Seul un terme linéaire en C_5 est présent dans $F_5(C)$: il s'agit de $\sigma b_5 C_5$. Ainsi, nous devons imposer l'égalité $a_{15} r C_5 = \sigma b_5 a_{75} C_5$ soit $a_{15} r = \sigma b_5 a_{75}$. Cette égalité doit être vérifiée quelles que soient r , σ et a , ce qui est impossible avec a_{15} et a_{75} constantes réelles. Nous en déduisons que a_{15} est nulle et $(AC)_1 = a_{11}C_1 + a_{13}C_3$. En

répétant ce même type de raisonnement, on peut démontrer complètement le théorème énoncé.

Corollaire 1 :

Soit A une matrice réelle, carrée d'ordre 9, vérifiant pour tous réels r, σ et a et pour tout vecteur $C \in \mathbb{R}^9$ l'égalité : $F(AC) = A F(C)$. Alors A est la matrice identité I_9 ou l'une des trois matrices suivantes :

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & -1 & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & 1 & & & & \\ & 0 & & & & 1 & & & \\ & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & -1 \end{bmatrix} \\
 A_2 &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & & & & & & & \\ & 0 & -1 & & & & & & \\ -1 & & 0 & -1 & & & & & \\ & -1 & & 0 & & & & & \\ & & & & -1 & & & & \\ & & & & & 1 & & & \\ 0 & & & & & & 0 & 1 & \\ & & & & & & & 1 & 0 \\ & & & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \\
 A_3 &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & & & & & & & \\ & 0 & 1 & & & & & & \\ -1 & & 0 & & & & & & \\ & 1 & & 0 & & & & & \\ & & & & -1 & & & & \\ & & & & & 1 & & & \\ 0 & & & & & & 0 & 1 & \\ & & & & & & & 1 & 0 \\ & & & & & & & & & -1 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{100}$$

Preuve simplifiée

Le théorème énoncé fournit la forme générale des matrices A vérifiant $F(AC) = A F(C)$ $\forall (r, \sigma, a) \in \mathbb{R}^3, \forall C \in \mathbb{R}^9$. Pour déterminer les valeurs des coefficients de cette matrice A , on doit résoudre le système des 9 équations polynomiales : $s_i = F_i(AC) - (AF(C))_i = 0$. On remarque, lors du calcul détaillé, que les neuf composantes du vecteurs s sont des fonctions polynômes de $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8$ et C_9 alors que s doit être nul. Ainsi, l'annulation des coefficients des monômes $C_i C_j$ impose des relations que doivent nécessairement vérifier les termes de la matrice A . Une étude exhaustive des différents cas permet de retrouver les trois formes différentes de la matrice identité présentées.

Explicitons maintenant l'action respective de ces matrices sur le vecteur d'état C . Si

nous détaillons les composantes du vecteur $C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \\ C_7 \\ C_8 \\ C_9 \end{pmatrix}$, alors $A_1 C = \begin{pmatrix} C_1 \\ -C_2 \\ C_3 \\ -C_4 \\ C_5 \\ C_6 \\ C_7 \\ C_8 \\ -C_9 \end{pmatrix}$,

$$A_2 C = \begin{pmatrix} -C_3 \\ -C_4 \\ -C_1 \\ -C_2 \\ -C_5 \\ C_6 \\ C_8 \\ C_7 \\ C_9 \end{pmatrix} \text{ et } A_3 C = \begin{pmatrix} -C_3 \\ C_4 \\ -C_1 \\ C_2 \\ -C_5 \\ C_6 \\ C_8 \\ C_7 \\ -C_9 \end{pmatrix}.$$

Corollaire 2 :

Les deux propriétés suivantes sont vérifiées :

1. Les matrices A_1, A_2 et A_3 sont des involutions.
2. L'ensemble $\{I_9, A_1, A_2, A_3\}$, muni du produit matriciel, est un groupe isomorphe au groupe de Klein.

Preuve

Il est évident de remarquer que l'ordre de chaque élément de ce groupe est 2. En effet, un calcul immédiat conduit à $A_i^2 = I_9 \forall i$. De plus, $A_3 = A_1 A_2$ ce qui assure le fait que ces 4 matrices forment un groupe. Comme il n'existe que 2 groupes finis à 4 éléments : $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et le groupe cyclique $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, nous identifions le groupe de symétrie trouvé à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ via sa table :

| | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|
| | I_9 | A_1 | A_2 | A_3 |
| I_9 | I_9 | A_1 | A_2 | A_3 |
| A_1 | A_1 | I_9 | A_3 | A_2 |
| A_2 | A_2 | A_3 | I_9 | A_1 |
| A_3 | A_3 | A_2 | A_1 | I_9 |

Un tel groupe est isomorphe au groupe de Klein, qui est constitué des symétries du rectangle qui n'est pas un carré : les deux symétries par rapport aux médianes et la symétrie par rapport au centre du rectangle.

4 Détermination des points fixes du système en utilisant le groupe d'équivariance

La détermination des points fixes du modèle nécessite la résolution d'un système de neuf équations à neuf inconnues. Ce système polynomial de degré deux ne peut pas être résolu complètement de façon analytique. Cependant, nous pouvons obtenir analytiquement l'expression de tous les points fixes invariants sous au moins une des symétries. Dans cette étude r est pris comme paramètre de bifurcation.

Nous recherchons tout d'abord les points fixes équivariants sous l'action du groupe. Seule l'origine de l'espace des phases présente cette invariance : c'est un point fixe stable et même globalement stable sur l'intervalle $r \in [0; 1]$.

Ensuite, les points fixes invariants sous une seule symétrie sont déterminés. En effet, une invariance sous l'action de deux symétries équivaut, du fait de la structure de groupe, à une invariance sous les trois symétries. Deux points fixes A_2 -invariants apparaissent pour $r = 1$, ils sont images l'un de l'autre par la symétrie A_1 . De plus, ces deux points sont tout d'abord stables, stabilité qu'ils perdent ensemble au cours d'une bifurcation fourche. Nous montrons qu'il existe un plan de points fixes A_1 -invariants pour une valeur particulière du paramètre r . Ces points sont instables. Enfin, pour cette même valeur du paramètre r , il existe une droite de points fixes invariants sous l'action de la symétrie A_3 . Au delà de cette valeur, nous déterminons deux paires de points fixes A_3 -invariants et instables, qui s'échangent sous la symétrie A_2 .

Ainsi, en utilisant les symétries, nous sommes capables de déterminer analytiquement tous les points fixes présentant une invariance. Cela nous permet de mener une étude, également analytique, de leur stabilité et donc de leurs bifurcations.

5 Conclusion

Ce système possède une grande richesse du point de vue des symétries. Il reste équivariant sous l'action d'un groupe isomorphe au groupe de Klein. La connaissance de ces symétries facilite alors la détermination des points fixes ainsi que l'analyse de leur stabilité. Nous retrouvons ces symétries lors des comportements dynamiques plus complexes tels les solutions périodiques ou les solutions chaotiques. La présence d'une symétrie influence également l'ordre d'apparition de certaines bifurcations. Ainsi, nous savons qu'un cycle symétrique devra obligatoirement perdre sa symétrie avant de pouvoir subir un éventuel dédoublement de période.

Références

- [1] P.Reiterer, *Zur Dynamik dreidimensionaler quadratischer Konvektionszeller*, Diploma Thésis, Technical University at Graz, Austria, 1996.
- [2] P.Reiterer, C.Lainscsek, F.Schürer, C.Letellier and J.Maquet, *A nine-dimensional Lorenz system to study high-dimensional chaos*, Journal of physics A, 31, 7121, 1998.
- [3] J.-M. Malasoma and M.-A. Boiron, *A hyperchaotic model of Rayleigh-Bénard convection equivariant under the action of the Klein four group*, en préparation.

Bifurcation globale de l'écoulement de Von Kármán

L. Marié, F. Daviaud, A. Chiffaudel

SPEC, CEA / Saclay

91191 Gif-sur-Yvette Cedex

`marie@drecam.saclay.cea.fr`

Résumé

Lorsque deux disques coaxiaux sont mis en rotation, ils induisent entre eux un écoulement de Von Kármán. Cet écoulement a été très étudié [1, 2, 3], car il permet de générer une turbulence très intense dans un volume réduit. Dans une expérience utilisant de l'eau, nous avons pu observer que la composante moyenne de l'écoulement pouvait demeurer dans un état métastable et avoir un comportement hystérétique marqué, alors même que la turbulence était pleinement développée. Cette hystérésis apparaît notamment sur des mesures de couples et des mesures de fluctuations de pression.

1 Introduction

Nous étudions l'écoulement de Von Kármán [1, 2, 3] engendré entre deux disques munis de pales courbées mis en contra-rotation dans une cuve cylindrique pleine d'eau. Le montage expérimental est présenté sur la gauche de la figure 1. Le diamètre intérieur de la cuve est de 200 mm, et la distance qui sépare les disques est de 180 mm. Les disques, représentés à la droite de la figure 1, ont un diamètre de 185 mm. Ils sont munis de seize pales de 2 cm de haut. Huit pales s'arrêtent à 30 mm du centre, les 8 autres vont jusqu'à 10 mm du centre. Le rayon de courbure des pales est approximativement de 50 mm. Un trou central d'un diamètre de 15 mm permet la fixation sur l'axe de rotation. Les moteurs utilisés pour entraîner les disques sont deux moteurs brush-less d'une puissance unitaire de 2 kW. Les vitesses de rotation peuvent être contrôlées indépendamment. Les mesures rapportées ici ont été effectuées dans une gamme de vitesse comprise entre 0 et 6 Hz. Dans cette plage de vitesses, le nombre de Reynolds cinétique de l'écoulement, défini comme $Re = \mathcal{L}^2 \Omega / \nu$, avec \mathcal{L} échelle de taille du montage, choisie égale au rayon, est compris entre 0 et $4 \cdot 10^5$. Les variateurs qui pilotent les moteurs permettent une mesure de la fréquence de rotation des disques, ainsi que du couple qu'ils exercent sur le fluide. La fréquence d'acquisition pour les couples et les vitesses est d'environ 16 Hz. Une sonde piézo-électrique compensée en accélération Kistler 6031, montée en paroi à mi-hauteur entre les disques, permet la mesure des fluctuations de pression dynamique dans l'écoulement. Le signal de pression est filtré passe-bas à 1 kHz, puis enregistré à l'aide d'une carte Data Translation DT 3001, à une fréquence d'échantillonnage de 3 kHz.

2 La bifurcation globale

2.1 Observation directe

Nous avons observé la bifurcation globale de l'écoulement lorsque les disques sont en contra-rotation et tournent dans les sens des aiguilles d'une montre. Si on prend garde à

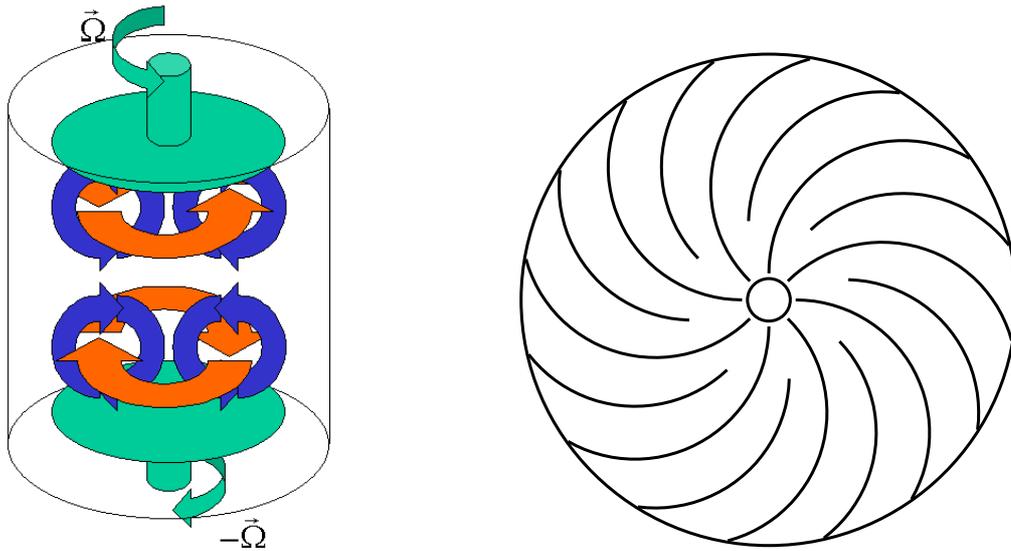


FIG. 1 – (a) Schéma du montage expérimental. (b) Schéma des turbines utilisées. Les mesures présentées ici ont été effectuées lorsque les turbines tournaient dans le sens des aiguilles d’une montre.

amener les disques à leur vitesse de rotation de manière strictement symétrique, on voit que l’écoulement à l’apparence d’un écoulement de Von Kármán “canonique”, semblable à ceux décrits dans [1, 2, 3].

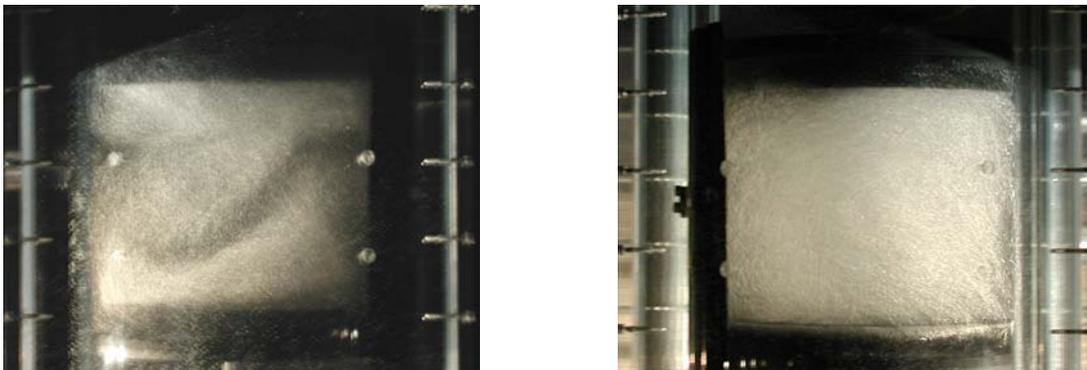


FIG. 2 – (a) Photographie de l’écoulement méta-stable à deux cellules. La couche de cisaillement est très visible dans le plan médian de l’écoulement. (b) Photographie de l’écoulement à une seule cellule, dans le cas où le disque du haut éjecte le fluide vers le disque du bas.

En plus de la composante toroïdale induite par l’entraînement par les disques, l’écoulement, représenté sur la gauche de la figure 2, possède deux cellules de recirculation poloïdale séparées par une couche de cisaillement parcourue de très vigoureux tourbillons.

Cet écoulement est statistiquement invariant par toute rotation d’angle π autour d’un axe compris dans le plan médian. Cette configuration est en fait méta-stable et relaxe, au bout d’un temps qui peut être très long, vers l’une de deux configurations symétriques, qui ne

comportent plus qu'une seule cellule de recirculation. Ces configurations sont images l'une de l'autre par les rotations autour d'axes compris dans le plan médian, mais ne sont plus invariantes par ces rotations. A ce stade, le fluide est éjecté radialement par un disque, et rejoint l'axe au niveau de l'autre. La configuration où le disque du haut éjecte le fluide est représentée sur la droite de la figure 2. Nous avons observé qu'une telle configuration reste stable si l'on accélère la rotation du disque qui éjecte le fluide. Si par contre on ralentit le disque qui éjecte, ou si on accélère le disque qui reçoit le fluide, on observe que l'écoulement devient à son tour méta-stable, et finit par passer spontanément dans la configuration où les rôles des disques sont échangés. Ce changement, qui peut lui aussi arriver au bout d'un temps assez long, se produit en quelques temps de rotation des disques.

2.2 Mesures de couple

Nous avons effectué des mesures systématiques du couple exercé par le fluide sur les turbines. Dans la limite des grands nombres de Reynolds cinétiques, on peut montrer par des arguments d'analyse dimensionnelle que ce couple, qui dépend des deux vitesses de rotations Ω_1 et Ω_2 , peut s'écrire comme une fonction sans dimension du rapport Ω_1/Ω_2 , multipliée par le carré d'une échelle de vitesse de rotation de l'écoulement, puis par $\rho\mathcal{L}^5$, où ρ est la masse volumique du fluide de travail. Nous avons représenté en figure 3 les couples divisés par $\rho\Omega^2\mathcal{L}^5$, où $\Omega = (\Omega_1^2 + \Omega_2^2)^{1/2}$, en fonction de l'angle θ tel que $(\Omega_1, \Omega_2) = (\Omega \cos(\theta), \Omega \sin(\theta))$. Cette représentation permet d'éviter l'apparition de singularités dans le cas où l'une des vitesses s'annule. On constate que les points, pourtant pris à des valeurs très différentes de Ω , se regroupent sur des courbes bien définies. Ceci justifie les arguments dimensionnels ci-dessus.

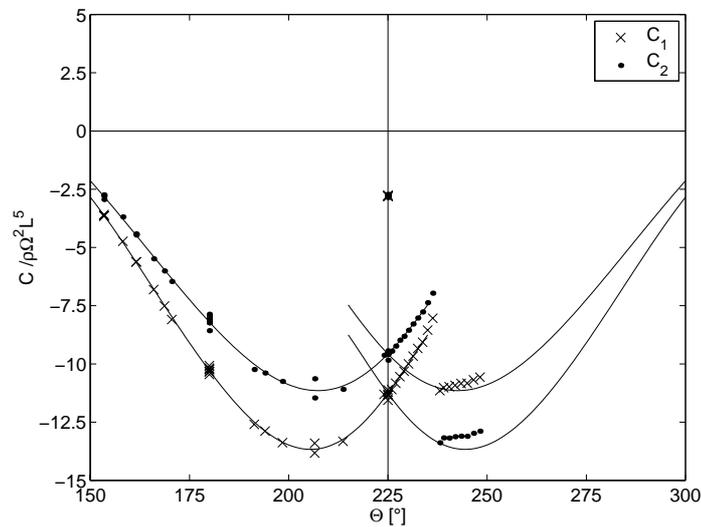


FIG. 3 – Couples adimensionnels des moteurs en fonction de l'angle θ tel que $(\Omega_1, \Omega_2) = (\Omega \cos(\theta), \Omega \sin(\theta))$. Les croix représentent les couples du moteur 1, et les points les couples du moteur 2. Les couples statiques des joints et des roulements, qui ont été mesurés préalablement, ont été retranchés des couples expérimentaux. Les courbes en traits pleins servent de guide pour l'œil.

La bifurcation se produit pour les valeurs de θ proches de 225° . Pour θ exactement égal

à 225° , on observe un point isolé au-dessus des deux séries de courbes. Ce point correspond à la configuration symétrique à deux recirculations. De part et d'autre, on observe deux séries de courbes. La série qui part vers la gauche correspond à la configuration où le disque numéroté 1 expulse le fluide. Dans le sens des θ croissants, on peut voir que ces courbes se prolongent bien au-delà de $\theta = 225^\circ$. Ceci est la marque du phénomène d'hystérésis que nous avons mentionné. Lors de cette série d'expériences, l'écoulement a fini par "basculer" vers la configuration symétrique, qui est associée aux points situés sur la deuxième série de courbes, plus à droite. Le léger décalage qui existe entre les points de la partie gauche et leurs symétriques de la partie droite est probablement dû à des imperfections expérimentales.

2.3 Mesures de fluctuations de pression

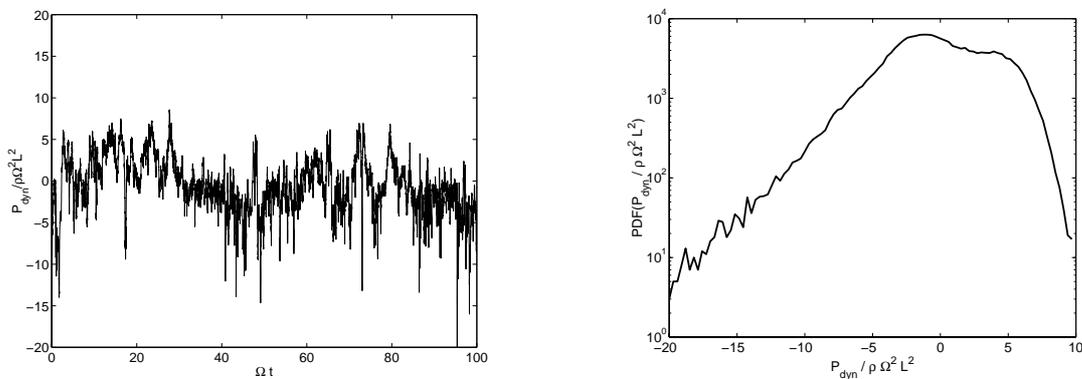


FIG. 4 – (a) Série temporelle de la pression adimensionnelle dans l'écoulement à deux cellules. (b) Histogramme de la pression adimensionnelle dans l'écoulement à deux cellules.

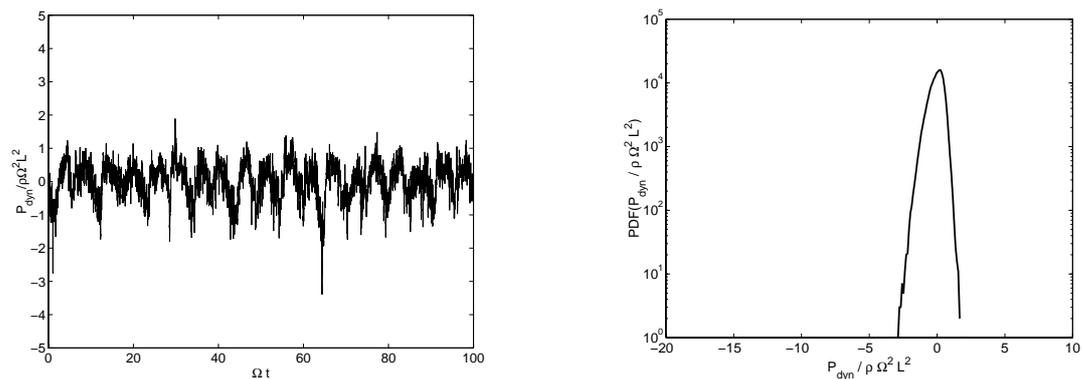


FIG. 5 – (a) Série temporelle de la pression adimensionnelle dans l'écoulement à une cellule. (b) Histogramme de la pression adimensionnelle dans l'écoulement à une cellule.

Nous avons représenté sur la gauche de la figure 4 une série temporelle de la pression dynamique, adimensionnée par l'échelle de la pression dynamique de l'écoulement, $\rho\Omega^2\mathcal{L}^2$, en fonction du temps adimensionné par $2\pi/\Omega$, dans le cas de la configuration à 2 cellules. On observe de très brusques fluctuations vers les basses pressions, qui peuvent descendre

jusqu'à $-20\rho\Omega^2 L^2$. Ce chiffre est très supérieur à ceux indiqués dans [1, 3]. On constate par ailleurs que ce signal semble pouvoir varier sur des échelles de temps très longues devant la période du forçage. Sa densité spectrale de puissance, que nous avons étudiée par ailleurs, a aux basses fréquences une décroissance algébrique, caractérisée par un exposant compris entre -1 et -1.2. Sur la droite de la figure 4, nous avons représenté l'histogramme de la pression dynamique adimensionnelle. On constate qu'il est légèrement bimodal, avec une décroissance rapide vers la droite, mais une queue exponentielle très prononcée vers les basses pressions, comme indiqué par [1, 3].

Nous avons ensuite représenté sur la gauche de la figure 5 une série temporelle de la pression dynamique, adimensionnée de la même manière, obtenue dans le cas de l'écoulement à une seule cellule. On observe des fluctuations nettement moins importantes, mais qui ont une composante périodique très marquée. La fréquence correspondante est d'environ 0.1Ω . Sur la droite de la figure 5, nous avons représenté l'histogramme de la pression dynamique adimensionnelle. On constate immédiatement qu'il est beaucoup plus ramassé que celui obtenu dans le cas à deux cellules. Il ne semble pas bimodal, et n'a pas de queue exponentielle nette.

3 Conclusion

En résumé, nous avons constaté que, pour un même jeu de vitesses de rotation, l'écoulement, qui est pourtant très turbulent, pouvait se trouver dans trois configurations différentes. L'une est méta-stable, et relaxe indifféremment dans l'une ou l'autre de deux autres configurations. La transition entre ces deux configurations peut s'effectuer simplement en modifiant les vitesses de rotation des disques, et est fortement hystérétique. Nous n'avons jamais observé de transition d'une des deux configurations à une cellule vers la configuration de départ à deux cellules. Les différentes classes d'écoulements se distinguent par la structure de l'écoulement à grande échelle, par les couples qu'ils opposent au système d'entraînement, ainsi que par les propriétés statistiques de leurs petites échelles. La forme des pales utilisées semble jouer un grand rôle dans cette bifurcation. Nous n'avons jamais pu l'observer avec des disques munis de pales droites.

Nous remercions Cécile Gasquet et Vincent Padilla pour leur participation à la réalisation de l'expérience.

Références

- [1] S. Fauve, C. Laroche, B. Castaing, *J. Phys. II*, (**3**), 271, (1993).
- [2] O. Cadot, S. Douady, Y. Couder, *Phys. Fluids*, (**A7**), 630-646, (1995).
- [3] N. Mordant, J.-F. Pinton, F. Chillà *J. Phys. II*, (**7**), 1, (1997).

Quasilinearité du transport dans le système ondes-particules en turbulence développée¹

Y. Elskens et D.F. Escande

case 321, UMR 6633, campus Saint-Jérôme,
F-13397 Marseille cedex 13

x@up.univ-mrs.fr (x=elskens, escande)

Le calcul analytique du transport dans un système hamiltonien chaotique n'a été réalisé à ce jour que pour quelques applications symplectique [1], et pour le mouvement chaotique d'une particule dans un ensemble d'ondes longitudinales de phases aléatoires, ayant le même nombre d'onde et la même amplitude $A \rightarrow \infty$ [2, 3, 4], décrit par le hamiltonien $H(p, q, t) = \frac{p^2}{2} + A \sum_{m=-M}^M \cos(q - mt + \varphi_m)$. On montre l'universalité de ce dernier modèle pour un ensemble typique d'ondes longitudinales à phases aléatoires [5, 6].

La principale propriété du chaos est le non-confinement d'une orbite en vitesse [3, 4]. Ceci permet à la particule de diffuser d'abord stochastiquement, non chaotiquement, conformément à la théorie quasilinear. Ensuite, le transport chaotique apparaît comme un deuxième régime diffusif, qui se raccorde au premier si l'amplitude des ondes est assez grande.

Nos techniques s'étendent au régime de turbulence développée du système ondes-particules auto-cohérent, de hamiltonien

$$H_{\text{wp}} = \sum_{r=1}^N \frac{p_r^2}{2m} + \sum_{j=1}^M \omega_{j0} I_j - \sum_{r=1}^N \sum_{j=1}^M c_j \sqrt{I_j} \cos(k_j x_r - \theta_j) \quad (101)$$

à $M + N$ degrés de liberté, et pourront s'appliquer à d'autres systèmes chaotiques dans des régimes de turbulence développée.

Références

- [1] A.J. Lichtenberg and M.A. Lieberman, *Regular and stochastic motion* (Springer, New York, 1983).
- [2] J.R. Cary, D.F. Escande and A.D. Verga, Nonquasilinear diffusion far from the chaotic threshold, *Phys. Rev. Lett.* **65**, 3132 (1990).
- [3] D. Bénisti and D.F. Escande, Origin of diffusion in Hamiltonian dynamics, *Phys. Plasmas* **4**, 1576 (1997).
- [4] D. Bénisti and D.F. Escande, Finite range of large perturbations in hamiltonian dynamics, *J. Stat. Phys.* **92**, 909 (1998).
- [5] D.F. Escande and Y. Elskens, Quasilinear diffusion for the chaotic motion of a particle in a set of longitudinal waves, <http://arXiv.org/physics/0111206>
- [6] Y. Elskens and D.F. Escande, *Microscopic dynamics of plasmas and chaos* (IoP Publishing, London, submitted).

1. Rencontres non-linéaires, institut H. Poincaré, Paris, 14-15 mars 2002 – <http://pnl.lps.u-psud.fr/pnl>

Bifurcation dans le spectre de l'oscillation issue d'un oscillateur optique non-linéaire photoréfractif

P. Mathey^a, H.R. Jauslin^a, S.G. Odoulov^b, D. Rytz^c

^a *Laboratoire de Physique, Université de Bourgogne, 21078 Dijon, France*

^b *Institute of Physics, National Academy of Sciences, 03650 Kiev, Ukraine*

^c *FEE, Struhtstrasse 2, Wackenmühle, 55743 Idar-Oberstein, Allemagne
pmathey@u-bourgogne.fr, odoulov@iop.kiev.ua, rytz@fee-io.de*

Résumé

1 Contexte

L'importance de la dynamique non linéaire et des phénomènes chaotiques a été reconnue dans de nombreux domaines tels que la dynamique des fluides, les réactions chimiques, les systèmes biologiques et l'optique. La plupart des études portent sur le chaos temporel [1] et s'appuient sur les travaux précurseurs de Ruelle et Takens [2]. Le chaos spatio-temporel a été observé dans un laser Na₂ [3, 4], dans un résonateur en anneau comportant un cristal photoréfractif de Bi₁₂SiO₂₀ [5].

Des outils pour caractériser un attracteur étrange ont également été développés [6] en particulier pour calculer les exposants de Lyapunov. Des simulations numériques ont montré que des vortex optiques analogues à ceux observés dans les fluides peuvent exister dans des cavités optiques à grand nombre de Fresnel [7]. La dynamique de la conjugaison de phase optique et des résonateurs basés sur la conjugaison de phase a fait l'objet de nombreuses études [?]. Plusieurs modèles ont été proposés. Par exemple, dans la référence [12], le comportement chaotique d'un miroir à conjugaison de phase est expliqué par l'existence de plusieurs régions d'interaction au sein du cristal. Des instabilités sont également mises en évidence dans de tels miroirs possédant un seul réseau et une seule région d'interaction [13], le facteur conduisant au chaos étant l'application d'un champ électrique externe qui provoque un décalage de fréquence de l'onde conjuguée. Un autre modèle prévoit du chaos dans le mélange quatre ondes avec une seule région d'interaction et aucun champ électrique appliqué si les deux réseaux en transmission et réflexion sont de même force et participent au mélange d'ondes [14].

2 Généralités sur le mélange quatre ondes et les cavités photoréfractives

Le mécanisme de base de la photoréfractivité dans les cristaux tels que Bi₁₂SiO₂₀, BaTiO₃, LiNbO₃ est maintenant bien connu. Le modèle de transport de bande décrit ainsi le phénomène : des électrons (ou des trous) sont excités par un éclairage (par exemple les franges d'interférence des deux faisceaux), ils migrent par diffusion depuis les zones éclairées vers les zones sombres où ils se recombinaient dans des pièges, créant ainsi un champ électrique interne appelé champ de charge d'espace. Ce champ crée par effet électro-

optique un réseau d'indice qui agit sur les faisceaux lumineux qui ont induit l'effet : il y a auto diffraction de la lumière sur le propre réseau qu'elle crée. Ceci est exploité dans des expériences de mélanges deux ondes ou quatre ondes qui débouchent sur la réalisation d'amplificateurs optiques, d'oscillateurs optiques, de miroirs à conjugaison de phase auto-pompés [17].

La disposition des faisceaux est représentée figure 1a : quatre ondes supposées dans un premier temps de même pulsation et de même polarisation se propagent dans le milieu photoréfractif. Chaque champ électrique est recherché sous la forme :

$$E_j(\vec{r}, t) = A_j(\vec{r}, t) \exp \left[i(\vec{k}_j \cdot \vec{r} - \omega t) \right] + c.c. (1)$$

Les directions de propagation des faisceaux étant opposées deux à deux, nous avons : $\vec{k}_1 = -\vec{k}_2$ et $\vec{k}_3 = -\vec{k}_4$.

A partir de l'équation de propagation

$$\Delta E + k^2 E = 0 (2)$$

et dans l'approximation de l'enveloppe lentement variable, les équations de couplage à quatre ondes pour un réseau fonctionnant en transmission s'écrivent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_1(z,t)}{\partial z} &= -\frac{\gamma}{I_0} [A_1(z,t)A_4^*(z,t) + A_2^*(z,t)A_3(z,t)] A_4(z,t) - \alpha A_1(z,t) \\ \frac{\partial A_2^*(z,t)}{\partial z} &= -\frac{\gamma}{I_0} [A_1(z,t)A_4^*(z,t) + A_2^*(z,t)A_3(z,t)] A_3^*(z,t) + \alpha A_2^*(z,t) \\ \frac{\partial A_3(z,t)}{\partial z} &= \frac{\gamma}{I_0} [A_1(z,t)A_4^*(z,t) + A_2^*(z,t)A_3(z,t)] A_2(z,t) + \alpha A_3(z,t) \\ \frac{\partial A_4^*(z,t)}{\partial z} &= \frac{\gamma}{I_0} [A_1(z,t)A_4^*(z,t) + A_2^*(z,t)A_3(z,t)] A_1^*(z,t) - \alpha A_4^*(z,t) \end{aligned} \quad (3)$$

où $A_1(z, t)$, $A_2(z, t)$ sont les amplitudes des ondes de pompe contre propageantes, l'amplitude $A_3(z, t)$ est celle faisceau conjugué de $A_4(z, t)$, α est l'absorption, γ est le coefficient de couplage, 2θ est l'angle entre les faisceaux 1 et 4 (ou 2 et 3) et $I_0 = I_1 + I_2$, $I_i = |A_i|^2$. Dans l'approximation des pompes non atténuées, en négligeant l'absorption du milieu, avec les conditions aux limites $A_1(z, t) = A_1$, $A_2(z, t) = A_2$, $A_3(z = \ell, t) = 0$, $A_4(z = 0, t) = A_4$, le coefficient de réflexion en intensité à l'état stationnaire R_{pc} du conjugué en phase se déduit des équations (3). Son expression est :

$$R_{pc} = \left| \frac{A_3(0)}{A_4^*(0)} \right|^2 = \left| \frac{sh(\frac{\gamma \ell}{2})}{ch(\frac{\gamma \ell}{2} - \frac{\ln r}{2})} \right|^2 \quad (4)$$

avec $r = I_2(\ell)/I_1(0)$ le rapport des ondes de pompe.

3 Position du problème

L'oscillateur considéré est représenté fig.1b. Une partie des faisceaux pompes est diffusée dans le cristal dans la direction du faisceau 4 et engendre par mélange d'ondes le faisceau conjugué 3. Un miroir conventionnel M de réflectivité R ferme la cavité. L'oscillateur est appelé semi-linéaire [18].

La condition d'oscillation de cette cavité est :

$$RR_{pc} = 1 (5)$$

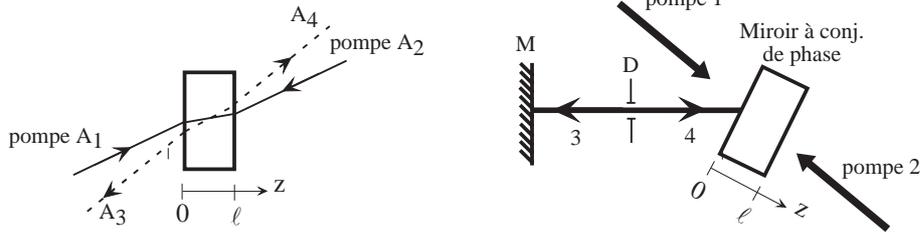


FIG. 1 – a : Disposition des faisceaux dans une expérience de mélange à quatre ondes
 b : Schéma de l'oscillateur semi-linéaire.

Dans le cas dégénéré, le rapport optimal $r = \exp(\gamma\ell)$ optimise R_{pc} à la valeur $R_{pc} = sh^2(\frac{\gamma\ell}{2})$. Pour les valeurs élevées de $\gamma\ell$, la condition d'oscillation (5) devient alors :

$$(\gamma\ell)_{th} = -\ln(R) + \ln 4 \quad (6)$$

qui est analogue à la condition d'oscillation pour les lasers (le gain doit compenser les pertes de la cavité).

Une des distinctions importantes de la cavité présente réside dans le fait que le gain de la cavité dépend du milieu amplificateur c.à.d. du miroir à conjugaison de phase (le cristal photoréfractif) et du rapport d'intensité des pompes. Il y a donc deux paramètres de contrôle du gain: le rapport r et la réflectivité R du miroir classique.

Toutes les considérations menées jusqu'à ce point ont concerné un oscillateur dégénéré. En réalité, le spectre de l'oscillation comporte deux raies symétriques [19] ce qui signifie que deux réseaux de même pas existent et se déplacent en directions opposées à la même vitesse. En dessous du seuil d'oscillation, un seul réseau est présent. La transition entre ces deux états est analogue à une transition de phase [20]. Nous présentons dans la suite le calcul des fréquences d'oscillation en fonction des paramètres r et R .

4 Etude théorique de l'oscillateur semi-linéaire

Soit Ω le décalage en fréquence du faisceau oscillant par rapport aux pompes. Nous avons donc $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, $\omega_3 = \omega \pm \Omega$ et $\omega_4 = \omega \mp \Omega$. Du fait de ce décalage de fréquence, la constante de couplage comporte une partie réelle et une partie imaginaire :

$$\gamma\ell = \frac{\gamma_0\ell}{1 + \tau^2\Omega^2} + i\frac{\Omega\tau\gamma_0\ell}{1 + \tau^2\Omega^2} = \gamma''\ell + i\gamma'\ell \quad (7)$$

où $\gamma_0\ell$ est la constante de couplage qui est un nombre réel dans le cas des milieux tels que $BaTiO_3$ pour lesquels le mécanisme dominant de la photoréfractivité est la diffusion.

La réflectivité R_{pc} devient :

$$R_{pc} = \frac{\sinh^2\left(\frac{\gamma''\ell}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\gamma'\ell}{2}\right)}{\cosh^2\left(\frac{\gamma''\ell - \ln r}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\gamma'\ell}{2}\right)}. \quad (8)$$

Pour trouver les fréquences $\pm\Omega_{th}$ de l'oscillation au seuil et les valeurs correspondantes de $(\gamma_0\ell)_{th}$ pour plusieurs valeurs de r et R , l'ensemble des équations à résoudre est :

$$R_{pc}R = 1 \quad (9)$$

$$\frac{dR_{pc}}{d\Omega} = 0$$

En dehors du cas pour lequel $R = 1$ et $r = 1$ et du cas de l'oscillation sans miroir ($R = 0 \Leftrightarrow R_{pc} \rightarrow \infty$), ces équations sont résolues numériquement. Les résultats sont

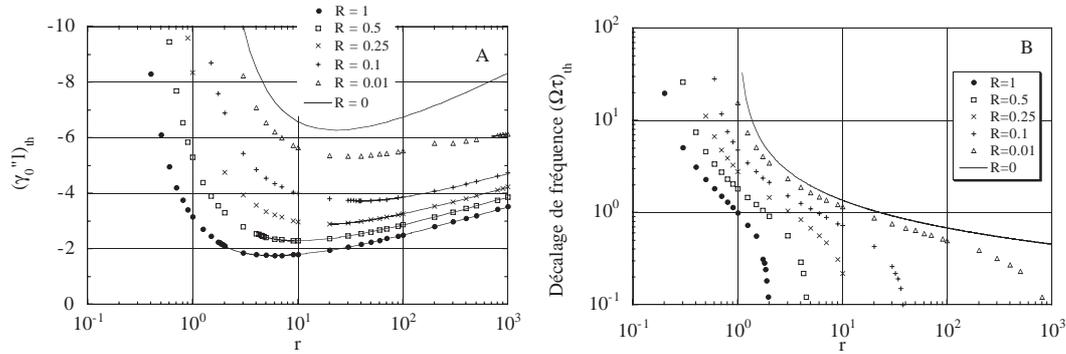


FIG. 2 – Coefficient d'amplification au seuil $(\gamma_0 \ell)_{th}$ (courbe A) et décalage de fréquence correspondant $(\Delta \Omega)_{th}$ (courbe B) en fonction de r .

représentés sur la figure 2. Pour chaque valeur de R il existe une valeur critique de r pour laquelle il y a bifurcation du spectre de l'oscillation d'une valeur simple de la fréquence vers deux valeurs symétriques. Une analyse au voisinage du rapport critique r_{cr} montre que la dépendance pour Ω_{th} est de la forme :

$$\Omega_{th} = A + B \sqrt{\frac{\ln r_{cr} - \ln r}{\ln r_{cr}}} \quad (10)$$

A et B étant deux constantes.

5 Résultats expérimentaux

Le cristal choisi est un titanate de baryum dopé au cobalt en raison de ses performances élevées en terme d'amplification, pompé par un laser Argon (514 nm). Le miroir qui ferme la cavité est sphérique (rayon de courbure de 50 cm). Un trou de diamètre 0.5 mm est placé dans la cavité pour en contrôler le nombre de Fresnel et la rendre ainsi monomode. Un isolateur de Faraday est placé à la sortie du laser Argon afin d'éviter les retours dans ce dernier. La dynamique de l'oscillation est mesurée pour plusieurs valeurs de r . Deux régions ont ainsi été mises en évidence : l'une où l'oscillation n'a qu'une fréquence et l'autre où deux fréquences sont présentes. Une étude détaillée de la fréquence de l'oscillation en fonction de r au voisinage du point de bifurcation donne les résultats figure 3. Le comportement observé est semblable à celui prédit (cf. fig.2B).

6 Conclusions et perspectives

Un accord satisfaisant entre les résultats numériques et expérimentaux a été montré. L'existence dans le spectre de l'oscillation de deux composantes a été prédit et confirmé

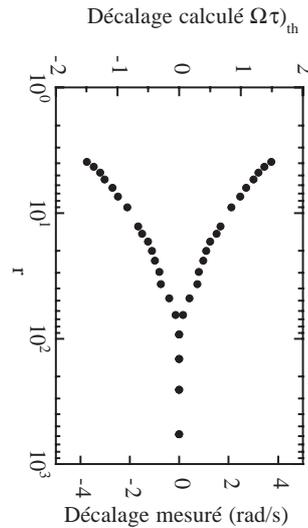


FIG. 3 – Décalage de fréquence en fonction de r .

expérimentalement pour l'oscillateur semi linéaire. La poursuite du travail consistera à intégrer numériquement les équations (3) pour déterminer s'il existe des valeurs de r et $\gamma_0 \ell$ où la dynamique du conjugué en phase est chaotique.

Références

- [1] H. G. Schuster, *Deterministic chaos* (VCH Verlagsgesellschaft, Weinheim, 1988).
- [2] D. Ruelle, F. Takens, *On the nature of turbulence*, Commun. Math. Phys. **20**, 167-192 (1971).
- [3] W. Klische et al., *Spatiotemporal chaos from a continuous Na₂ laser*, Phys. Rev. A **39**, 919-922 (1989).
- [4] M. Brambilla et al., *Transverse laser patterns. I. Phase singularity crystals et II. Variational principle for pattern selection, spatial multistability and laser hydrodynamics*, Phys. Rev. A **43**, 5090-5120 (1991).
- [5] F.T. Arecchi et al., *Experimental evidence of chaotic itinerancy and spatiotemporal chaos in optics*, Phys. Rev. Lett. **65**, 2531-2534 (1990).
- [6] P. Berge, Y. Pomeau, C. Vidal, *Order within Chaos* (Wiley, New York, 1984).
- [7] P. Couillet, L. Gil, F. Rocca, *Optical vortices*, Opt. Comm. **73**, 403-407 (1989).
- [8] D. K. Bandy, *Feature on photorefractive materials effects and devices*, J. Opt. Soc. Am. B **5**, 875-1215 (1988).
- [9] A. V. Nowak et al., *Observations of internal beam production in BaTiO₃ phase conjugators*, J. Opt. Soc. Am. B **5**, 1878-1884, (1986).
- [10] P. Günter et al., *Self-pulsation and optical chaos in self-pumped photorefractive BaTiO₃*, Opt. Comm. **55**, 210-214 (1985).

- [11] D. Wang et al., *Instabilities in a mutually pumped phase conjugator of BaTiO₃*, J. Opt. Soc. Am. B **7**, 2289-2293, (1990).
- [12] D. J. Gauthier, *Observation of deterministic chaos in a phase conjugate mirror*, Phys. Rev. Lett. **58**, 1640-1643 (1987).
- [13] W. Krolikowski et al., *Chaos in photorefractive four wave mixing with a single grating and a single interaction region*, J. Opt. Soc. Am. B **7**, 1204-1209 (1990).
- [14] M. R. Belic et al., *Multigrating phase conjugation: chaotic results*, J. Opt. Soc. Am. B **8**, 1723-1731 (1991).
- [15] G. Valley, G. Dunning, *Observation of optical chaos in a phase conjugate resonator*, Opt. Lett. **9**, 513-515 (1984).
- [16] G. Reiner et al., *Optical turbulence in phase conjugate resonators*, J. Opt. Soc. Am. B **5**, 1193-1210 (1988).
- [17] B. Fischer et al., *Photorefractive oscillators*, IEEE J. Quantum Electron. **25**, 550 (1989).
- [18] M. Cronin-Golomb et al., *Theory and applications of four-wave mixing in photorefractive media*, IEEE J. Quantum Electron. QE-**20**, 12 (1984).
- [19] K.R. Mac Donald, J. Feinberg, *Enhanced four-wave mixing by use of frequency shifted optical waves in photorefractive BaTiO₃*, Phys. Rev. Lett. **55**, 821-824 (1985).
- [20] P. Mathey, S. Odoulov, O. Shinkarenko, *Manifestation of optical Curie-Weiss law for optical phase transition*, Appl. Phys. B **73**, 711-715 (2001).

Motifs spiralés créés par des bulles advectées radialement à la surface d'un liquide.

C. Mathis et P. Maïssa

Institut du Non Linéaire de Nice

1361, Route des Lucioles, 06560 Sophia Antipolis

`mathis@inln.cnrs.fr`

Résumé

Nous proposons ici un travail expérimental sur un système hydrodynamique montrant spontanément des structures régulières parfois observées chez les végétaux. Nous présentons les différents motifs (spiraales en rotation, étoiles fixes ...) formés par l'émergence régulière de bulles de gaz à la surface d'un liquide visqueux pour différents débits et viscosités et caractérisons l'existence d'une bifurcation. L'analogie avec certaines espèces végétale et animale est soulignée.

1 Introduction

Une expérience de physique - la première à notre connaissance - a été mise au point par Douady et Couder il y a quelques années [1] dans le but même de reproduire et expliquer certaines structures observées en botanique [2, 3, 4, 5, 6]. Nous proposons ici une étude d'un système hydrodynamique qui montre spontanément ce même genre de structures. Après la description du dispositif expérimental, nous rapportons nos principales observations et donnons quelques résultats quantitatifs. Enfin nous montrons que les structures observées s'apparentent à celles, par exemple, de cactées.

2 Dispositif expérimental.

L'appareillage consiste essentiellement en un montage pour la production régulière de bulles de gaz dans un liquide et en un système d'acquisition et analyse de séquences d'images.

Un flux d'azote à pression régulée circule à travers une vanne à aiguille et un débitmètre qui indique un débit compris entre 0.5 et 15 l/h. Le gaz passe par une chambre de tranquillisation et forme des bulles au passage à travers un orifice millimétrique (0.4...3.0) situé à la base d'un récipient cylindrique contenant environ 2 l d'huile de silicone. Le système expérimental est complètement axisymétrique (Fig. 1).

Une caméra vidéo rapide (M30 de JAI) combinée avec une carte d'acquisition spécifique (Imaging Tech. Inc.) nous permettant d'effectuer des prises de vue à 120 im/s avec une définition suffisante. La période d'émission des bulles T est mesurée par les variations d'intensité de la lumière d'un faisceau laser dirigé au dessus de l'orifice et interceptant le flux de bulles.

La température Θ est stabilisée à 22°C. Nous pouvons changer la hauteur H du fluide au dessus de l'orifice d'émission. Le diamètre d qui détermine le volume et la forme initiale des bulles, est modifiable également. Le débit Q est le paramètre le plus aisément et continuellement variable. Le liquide est caractérisé par sa masse volumique ρ ($\approx 0.97\text{gcm}^{-3}$), sa tension de surface γ ($\approx 20\text{gs}^{-2}$) et sa viscosité μ (10cP - 300cP).

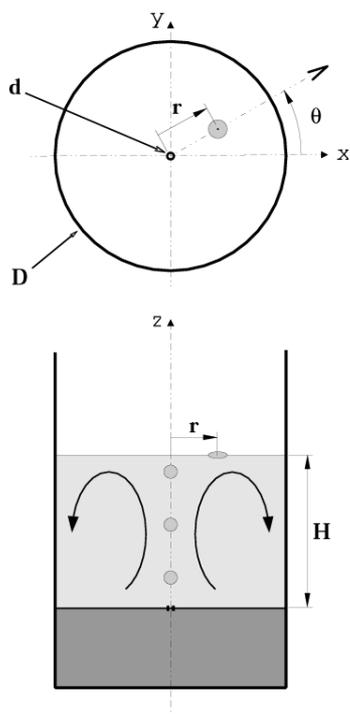


FIG. 1 – *Dispositif expérimental.* Ce schéma montre le vortex présent dans le récipient et précise les différents paramètres géométriques et les coordonnées polaires d'une bulle à la surface.

3 Observations.

Le sillage des bulles convectées vers la surface entraîne le liquide dans un mouvement continu formant un vortex, en première approximation axisymétrique, et qui dépend de tous les paramètres de contrôle. Il joue un rôle essentiel dans l'étalement des bulles à la surface, rendant ainsi les motifs visibles. En tout état de cause les bulles, après émergence sont convectées du centre vers le bord, chacune suivant une trajectoire purement radiale avec une vitesse $v_r(r)$, jusqu'à s'arrêter et s'agglomérer dans un amas de bulles qui se détruit de temps en temps.

Les bulles émergent latéralement à la surface d'une protubérance au sommet arrondi et qui est produite par leur propre flot (l'équivalent de l'apex en référence à la botanique) et non rigoureusement dans l'axe du flot au centre de la surface (sauf à très bas débit). Ce phénomène fait évidemment partie du processus même de formation du motif. T est constante tout au long de chaque séquence d'image. Celles-ci durent environ 1.275s et T est de l'ordre de quelques centièmes de seconde. Toutes les mesures ont été prises suffisamment loin et de l'apex et des parois pour éviter toute interaction parasite.

Les autres paramètres étant constant, changer le débit Q mène à faire successivement les observations qui suivent.

A très bas Q , les bulles, émises avec une très grande périodicité T , émergent mais ne se déplacent pas à la surface: aucun écoulement n'existe.

Pour un Q légèrement plus grand, un écoulement est induit et les bulles se déplacent lentement vers le bord. Les bulles émergent, s'attirent et forment un amas qui est grossièrement orienté dans la direction choisie aléatoirement par la première bulle de la série, puis se

détruit éventuellement.

Quand Q augmente encore, les bulles forment deux alignements orientés symétriquement par rapport au centre de la surface et alimentés par les nouvelles bulles émergentes, qui rejoignent alternativement l'un et l'autre des amas. Les bulles s'attirent et forment ces alignements après avoir traversé l'interface huile-air; l'écoulement est encore trop faible pour les séparer suffisamment [Fig. 2(a)].

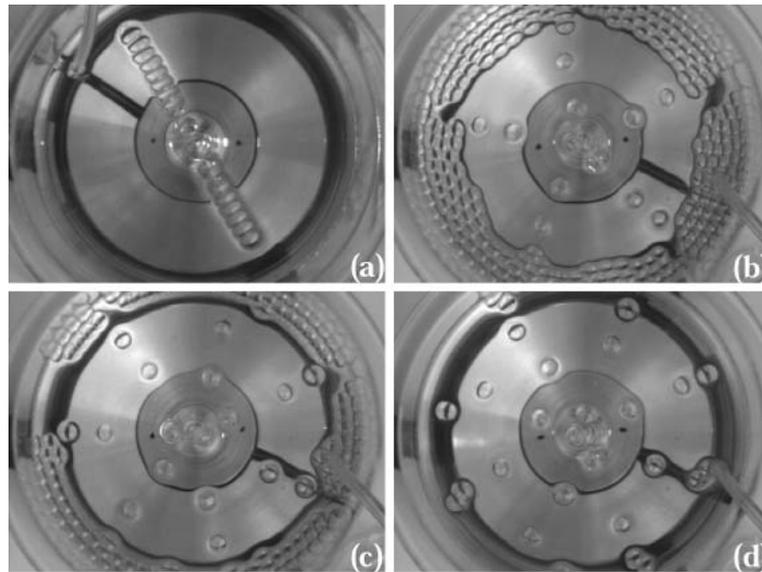


FIG. 2 – Instantanés expérimentaux montrant des motifs en étoile: (a) 2, (b) 5, (c) 7 et (d) 8 bras. Les paramètres sont $\{\nu = 35 \text{ cP}, d = 0.8 \text{ mm}, H = 87 \text{ mm}\}$ [sauf pour (a) $\{\nu = 75 \text{ cP}, d = 1.4 \text{ mm}, H = 78 \text{ mm}\}$] et avec T respectivement égal à 55.6, 49.6, 51.95 et 46.6 ms.

L'étape suivante est la formation de deux bras-spirales paraissant tourner à la surface. L'orientation - et donc le sens de *rotation* - des deux bras-spirales est choisie aléatoirement par le système: elle peut changer après une perturbation suffisamment forte [Fig. 2(a)].

A une valeur plus élevée de Q , les bras-spirales *tournent* à une vitesse plus élevée et on en distingue clairement non plus deux, mais trois, cinq, sept... ou même plus [Fig. 2(bcd)]. Mais il devient bientôt très difficile de distinguer et identifier une structure. On peut également ajuster précisément Q pour *ralentir* la *rotation* des bras-spirales et obtenir des structures en étoiles, fixes et avec le même nombre de bras [Fig. 2(bcd)].

Dans tous les cas ces motifs sont robustes: une perturbation forte casse un motif existant, mais le système reproduit rapidement la même solution au sens apparent de rotation près; la stabilité à long terme de la solution adoptée est conservée tant que les paramètres de l'expérience sont maintenus à la même valeur.

Pour une valeur très élevée de Q , la surface commence soudainement à osciller de haut en bas et on observe l'émission simultanée de deux bulles se dirigeant dans deux directions opposées: nous mentionnons seulement ce phénomène.

Dans cette communication nous nous bornerons essentiellement à présenter ces motifs, en spirales et en étoiles tels que nous les avons observés, sans étudier le processus même de leur formation.

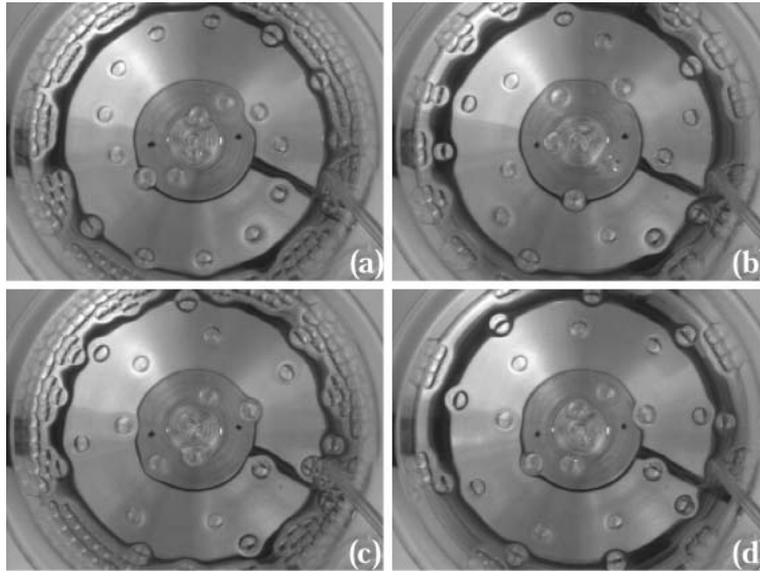


FIG. 3 – Instantanés expérimentaux montrant des motifs spirales : (a) 2, (b) 5, (c) 7 et (d) 9 bras courbes. Les paramètres sont $\{\nu = 35 \text{ cP}, d = 0.8 \text{ mm}, H = 87 \text{ mm}\}$ et les valeurs de T sont respectivement 53.85, 50.65, 52.1 et 52.85 ms.

4 Mesures

L'existence de structures en spirales et étoiles est clairement liée à un décalage régulier des directions successives d'advection des bulles. En fait, les bulles sont émises en différents points sur le pourtour de l'apex, prennent différentes directions et forment des motifs qui *semblent* tourner.

La stationnarité globale des spirales et, encore plus, des étoiles (fixes dans le repère de référence) nous a mené à considérer $\Delta\theta$, l'angle entre deux bulles consécutives, comme la variable pertinente: c'est un paramètre d'ordre du problème.

Pour analyser un motif, nous numérotions simplement chaque bulle dans leur ordre d'apparition et nous mesurons θ_n pour calculer les $\Delta\theta_n = (\theta_n - \theta_{n-1})$ successifs. La valeur moyenne ψ de ce décalage angulaire et l'écart type σ_ψ sont déterminés: en référence à la botanique et aux travaux précédents, nous appellerons ψ la divergence. La mesure des angles est précise à $\pm 0.4^\circ$ près, mais $\sigma_\psi \approx 1^\circ$.

Nous montrons avec la Fig. 3 le comportement typique de $\psi(T)$ en utilisant des paramètres normalisés: $T^* = \frac{T_c - T}{T_c}$ et $\psi^* = \frac{\psi}{360}$ dans le cas où les paramètres valent $\{\nu = 35 \text{ cP}, d = 0,8 \text{ mm}$ et $H = 87 \text{ mm}\}$.

En diminuant T (augmentant T^*) depuis l'état où $\psi = 180^\circ$ (deux bras stationnaires de directions opposées) le système connaît une bifurcation associée à un changement de la symétrie des solutions (motif multidirectionnel) quand le paramètre de contrôle passe par la valeur seuil $T = T_c$. Au dessus de cette valeur critique de T ($T^* < 0$), ψ reste constant sur un intervalle important de T . Cette bifurcation ne montre aucune hystérésis à la précision près de nos mesures. Nous pouvons caractériser l'évolution du paramètre d'ordre ψ au-dessus du seuil par une loi de puissance

$$\psi^* = \frac{1}{2} - \alpha T^{*\beta}, \quad (102)$$

où $\beta \approx 0,53$ dans notre exemple et $\alpha \approx 0,35$ est un cofacteur dépendant des autres paramètres de l'expérience (H, d, D, ν, \dots). β n'est pas éloigné de $1/2$ mais nous devons préciser cet exposant par une étude plus systématique.

Pour certaines valeurs de Q (ou de T), on distingue facilement des motifs en forme soit d'étoiles fixes soit de spirales en mouvement: chaque bras est formé par les bulles apparues périodiquement à la surface. C'est le cas avec les débits menant à des spirales et étoiles avec 2, 5, 7, 8 jusqu'à, disons, 12 bras (Fig. 2 et Fig. 2). Mais l'angle entre deux bras voisins d'un motif stationnaire (étoile) ne correspond pas généralement à la divergence ψ (l'angle moyen entre deux bulles successives): ψ est un multiple entier de celui-ci. Pour toutes les autres valeurs de Q , seule l'analyse des séquences d'images en terme d'angle d'émission nous permet de déterminer avec précision le motif: nous avons trouvé dans tous les cas une valeur unique de ψ correspondant à une valeur donnée de Q .

La description en fonction du paramètre d'ordre ψ détermine donc complètement un motif même s'il n'y a, généralement, aucune relation intuitive entre la valeur de ψ et l'aspect de celui-ci; et, réciproquement, il n'est pas facile d'associer immédiatement une valeur de ψ à un motif observé.

Si la divergence ψ est un angle rationnel nous pouvons lui associer une fraction $\frac{n}{m}$ tel que $\psi = 2\pi(\frac{n}{m})$. Cette situation mène évidemment à l'existence de motifs en étoiles, avec m bras fixes. Ici la $m^{\text{ème}}$ bulle prends la même direction que la bulle 0 avec une phase relative $2\pi n$. Nous rappelons que dans ce cas il est possible de considérer les bulles comme appartenant simultanément à deux séries de bras spirales *tournant* en sens opposés, comprenant respectivement m_1 et m_2 éléments; les m_1 bras de la première série sont formés de bulles émises avec un déphasage $2\pi n_1$ tandis que les m_2 bras de la deuxième série sont formés de bulles émises avec un déphasage $2\pi n_2$ [3]. Les nombres n_i, m_i, n et m sont des éléments de suites de Fibonacci, et sont tels que $m_1 + m_2 = m$ et que $n_1 + n_2 = n$. Les mesures d'angles que nous avons réalisées jusqu'à présent dans l'étude de notre système nous ont toujours permis de décrire les motifs observés en terme d'étoiles fixes. Mais les incertitudes des mesures et le confinement de notre système ne permettent sans doute pas de tirer des conclusions définitives sur ce point.

Nous pouvons retrouver les structures en étoile observées ici en botanique. Par exemple, dans certaines espèces de cactus, les petits groupes d'épines jouent le rôle exact des bulles dans notre expérience et sont situés sur un nombre fini m de côtes qui correspondent dans ce cas aux différentes directions prises par les bulles successives. Une observation un peu plus attentive de ces cactus fait apparaître des alignement spirales, dans un sens (m_1) et dans l'autre (m_2) dont le nombre suit la règle $m_1 + m_2 = m$.

Il est également intéressant de remarquer que ces structures en spirales ou étoiles se rencontrent en zoologie: les plumes caudales du paon faisant la roue portent les multiples "yeux" et ceux-ci sont disposés en une double série de spirales m_1 et m_2 ou bien en étoiles à m branches avec le même respect de la règle $m_1 + m_2 = m$.

5 Conclusion

Nous avons rapporté ici des mesures expérimentales sur le comportement collectif de bulles injectées dans un fluide visqueux après qu'elles ont émergé à la surface d'un liquide.

Nous avons concentré notre attention sur les motifs observés à la surface. Nous avons mesuré le décalage angulaire entre les directions d'advection des bulles successives et avons démontré l'existence d'une bifurcation d'un mode alterné ($\psi = 180^\circ$) à un mode multi-

directionnel ($\psi < 180^\circ$). Nous avons décrit ces motifs en étoile en utilisant la divergence ψ ou encore une fraction associée aux directions d'émission. Cette dernière est reliée aux deux séries de bras-spirales avec lesquelles on peut également d'écrire l'agencement des bulles.

Cette approche simple s'applique au delà de de notre expérience (en botanique, comme pour certains cactus, voire en zoologie).

Références

- [1] S. Douady and Y. Couder *Phyllotaxis as a Physical Self-Organized Growth Process*, Phys. Rev. Lett. **68**, 2098 (1980).
- [2] L. Bravais, A. Bravais *Essai sur la disposition des feuilles curvisériées.*, Ann. Sci. Nat. second series **7**, 42 (1837).
- [3] J. Guerreiro, *Phyllotaxis: An interdisciplinary phenomenon*, Physica D **80**, 356 (1995).
- [4] S. Douady and Y. Couder, *Part I: The Spiral Modes Resulting from Time-Periodic Iterations.*, J. theor. Biol. **178**, 255 (1996).
- [5] S. Douady and Y. Couder, *Part II: The Spontaneous Formation of a Periodicity and the Coexistence of Spiral and Whorled Patterns*, J. theor. Biol. **178**, 275 (1996).
- [6] S. Douady and Y. Couder, *Part III: The Simulation of the Transient Regimes of Ontogeny.*, J. theor. Biol. **178**, 295 (1996).

Récepteur d'informations digitales basé sur la résonance stochastique

S. Morfu [†], J.C. Comte*, J.M. Billbault [†] and P. Marquié [†]

[†]*Université de Bourgogne, LE2I, (F.R.E.) C.N.R.S. 2309
BP 47870 - 21078 DIJON cedex, FRANCE*

**Physics Department, University of Crete and Foundation for Research
and Technology-Hellas*

P. O. Box 2208, 71003 Heraklion, Crete, Greece

smorfu@u-bourgogne.fr

Résumé

Nous présentons un récepteur d'informations digitales basé sur le phénomène de résonance stochastique, permettant de détecter des informations numériques modulées de faible amplitude. Nous montrons expérimentalement qu'une restauration complète des données est atteinte, que le bruit utilisé soit gaussien ou uniforme.

1 Introduction

Ces dernières années, la résonance stochastique (R.S.) a suscité un intérêt grandissant dans de nombreux domaines [1], tels que la biologie [2, 3], les circuits électroniques [3, 5, 6, 7] ou encore la perception visuelle [4]. Jusqu'à présent, la plupart des études portant sur la R.S. ont montré qu'une quantité appropriée de bruit améliorerait la réponse d'un système non linéaire à une excitation déterministe. Ce fut tout d'abord le cas d'excitations périodiques qui fut étudié en considérant un résonateur stochastique unique, tel qu'un comparateur par exemple [3, 9]. Plus récemment, cet effet fut montré dans une chaîne de résonateurs stochastiques couplés [5, 6, 12, 13, 14, 7] et fut étendu à des excitations aperiodiques dans le contexte neuronal, permettant de définir le terme de résonance stochastique aperiodique [16].

Cependant, aucune étude n'avait encore porté sur l'interprétation des signaux bruités disponibles en sortie du résonateur stochastique.

Dans ce travail, nous présentons un dispositif électronique de réception d'informations basé sur la résonance stochastique [8], qui permet de détecter un signal numérique modulé de faible amplitude et d'interpréter le signal ainsi détecté. Une restauration des données initiales de 100% est atteinte en utilisant un bruit gaussien ou uniforme.

2 Description du dispositif expérimental

Nous considérons la chaîne de transmission de la figure 1, composée d'une source qui émet une information digitale Modulée en Amplitude (A.M.) se propageant dans un milieu avec pertes.

A la réception, en raison des pertes du milieu de propagation, l'information reçue V_1 est de faible amplitude et considérée comme "subthreshold" (donc non détectable par un détecteur classique). C'est pourquoi, l'utilisation d'un résonateur stochastique peut sembler judicieuse pour détecter l'information reçue, encore faut-il pouvoir interpréter

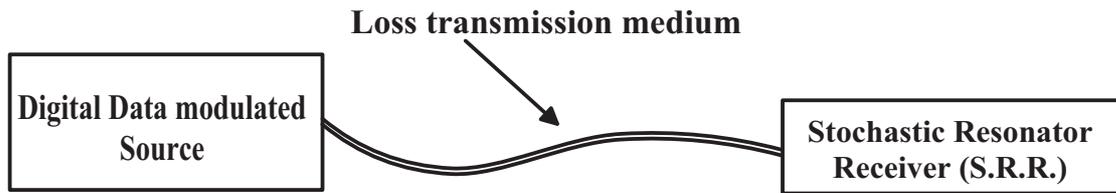


FIG. 1 – Schéma synoptique de la chaîne de transmission considérée.

l'information bruitée disponible en sortie du résonateur.

Ce récepteur, dont la structure est présentée figure 2 (S.R.R.), se compose d'un comparateur de seuil V_{th} suivi d'un détecteur d'enveloppe et d'un trigger de Schmitt.

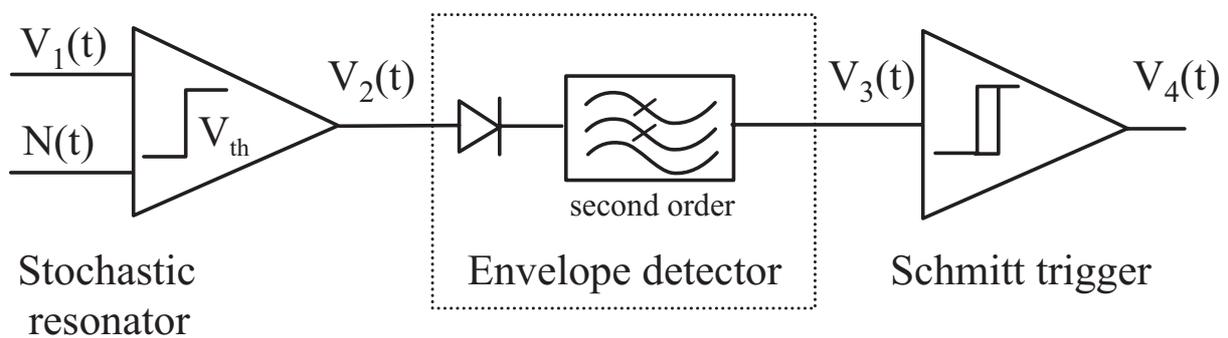


FIG. 2 – Schéma synoptique du récepteur stochastique S.R.R.

Le comparateur excité par le signal subthreshold V_1 issu du milieu de transmission (Figure 2.a) auquel est ajouté un bruit blanc $N(t)$ constitue un résonateur stochastique [3] et fournit un signal bruité de forte amplitude V_2 . D'après le relevé d'oscillogramme de la figure 2.b, le signal de sortie V_2 du comparateur apparaît comme un signal Modulé en Amplitude (A.M.) où le bruit semble jouer le rôle d'une pseudo-porteuse. Ainsi, l'utilisation d'un détecteur d'enveloppe classique permet de se débarrasser du bruit et de ne conserver que le signal cohérent (figure 2.c). Pour remettre le signal en forme un simple trigger de Schmitt permet de visualiser la séquence binaire reçue (figure 2.d).

3 Performances du récepteur stochastique

Le bruit uniforme, produit sous Matlab, est disponible à la sortie d'une carte son soundblaster 128PCI d'un ordinateur dont la fréquence d'échantillonnage est standard et de valeur $f_e = 44.1 \text{ kHz}$. Le bruit est ainsi limité à une fréquence de Nyquist $f_N = F_e/2 = 22.05 \text{ kHz}$.

Compte tenu de la localisation spectrale du signal digital d'information, le bruit peut être considéré comme blanc. En effet, le signal numérique d'information V_1 est un signal créneau de fréquence $f_i = 100 \text{ Hz}$ modulant une porteuse créneau de fréquence $f_c = 1 \text{ KHz}$. Le bruit ainsi produit est additionné au signal digital V_1 à l'aide d'un sommateur inverseur pour ensuite exciter un comparateur de seuil $U_{th} = 3.290 \text{ V}$. Pour chaque valeur R.M.S. de bruit, 2000 octets, correspondant à une succession périodique de 1 et de 0, sont produits et interprétés par notre récepteur expérimental. Le pourcentage d'octets correctement interprétés en sortie du trigger est alors estimé et tracé en fonction de l'amplitude R.M.S.

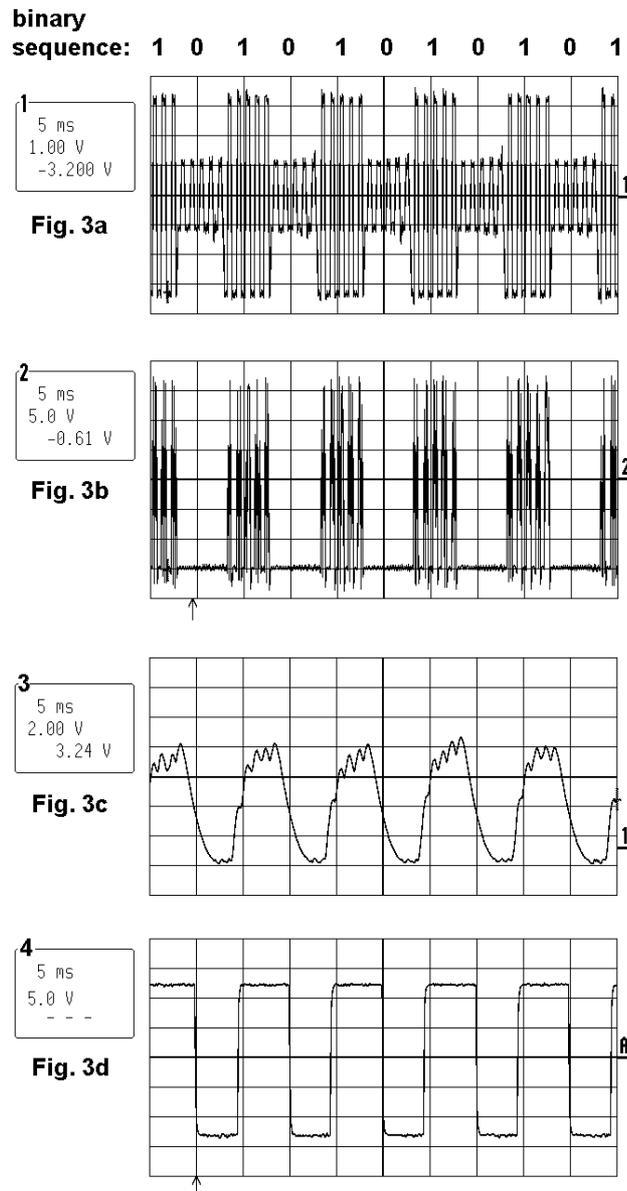


FIG. 3 – Oscillogrammes des signaux relevés aux différents noeuds de la figure 2. a, b, c, d correspondent respectivement aux signaux V_1 , V_2 , V_3 et V_4 . Le bruit utilisé est blanc uniforme de valeur R.M.S. 0.665 V , le seuil du comparateur est $U_{th} = 3.290\text{ V}$. Caractéristique du signal subthreshold V_1 modulé en amplitude: créneau de fréquence $f_i = 100\text{ Hz}$, porteuse créneau de fréquence $f_c = 1\text{ KHz}$, indice de modulation 50% .

du bruit sur la figure 3, en considérant une distribution uniforme de bruit puis une distribution gaussienne.

Dans les deux cas, le pourcentage d'octets correctement restitués est une fonction non monotone du bruit avec un maximum pour une plage donnée de bruit, ce qui est caractéristique du phénomène de résonance stochastique. Les maxima de performance atteints par notre récepteur sont de 100% pour une plage de bruit relativement large, soit

[0.665 V, 1.325V] pour un bruit uniforme et [0.825 V, 1.075 V] pour un bruit gaussien. Une réception parfaite est ainsi réalisée grâce au bruit.

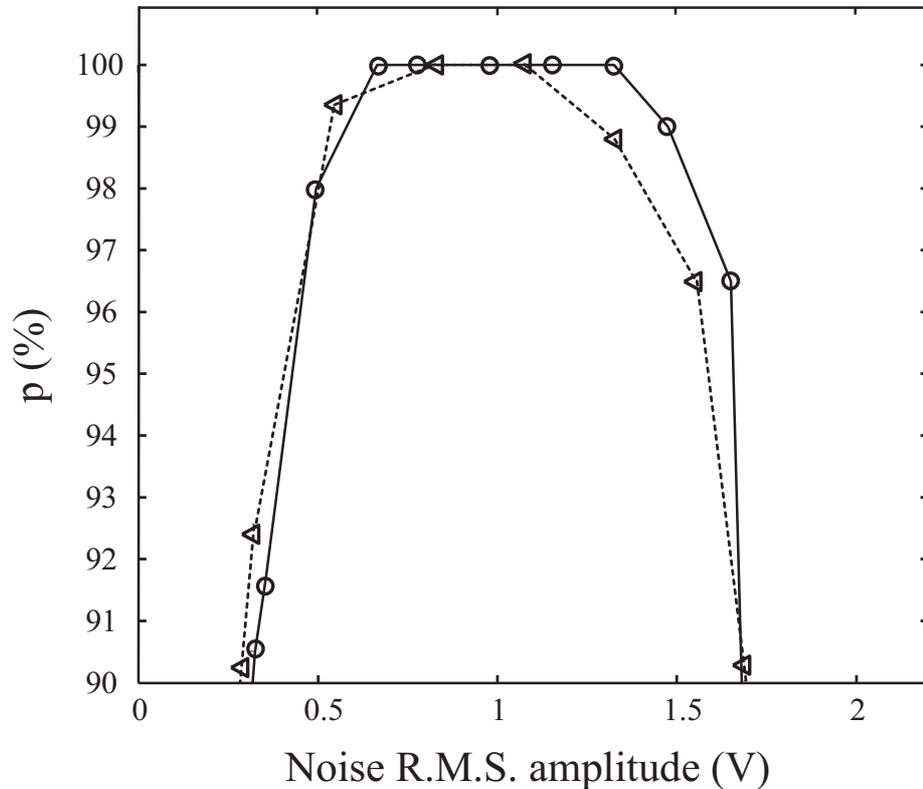


FIG. 4 – Pourcentage p d’octets correctement interprétés par le récepteur pour un signal à détecter V_1 modulé en amplitude. Le seuil est $U_{th} = 3.290$ V, caractéristique du signal: créneau de fréquence 100 Hz modulé en amplitude avec une porteuse créneau de fréquence $f_c = 1$ kHz. a) bruit uniforme, b) bruit gaussien.

Le cas d’autres séquences binaires (ainsi que celui de signaux non modulés) a été envisagé et fournit une réception parfaite.

De plus, la modulation F.S.K. permet d’obtenir un pourcentage d’informations correctement restituées d’environ 95%, ce qui est satisfaisant. D’autres modulations, comme la modulation en fréquence (F.M.), ont été envisagées et donnent de moins bon résultats comme l’on peut s’y attendre.

Par ailleurs, notre récepteur n’est pas adapté à la réception d’information analogique. En effet, la nature complexe de ces signaux (audio, vidéo, ...) est détruite par la résonance stochastique, tandis que les signaux numériques présentant une structure simple de "tout ou rien" conservent leur structure. Ces derniers sont par conséquent plus adaptés à être correctement reçus par notre récepteur basé sur la résonance stochastique.

4 Conclusion

Dans cet article, nous avons montré expérimentalement qu’un signal *A.M.* numérique de faible amplitude, provenant d’un milieu avec des pertes, pouvait être parfaitement reçu à l’aide de notre récepteur stochastique. Un résonateur stochastique convertit d’abord le

signal de faible amplitude reçu en un signal bruité de forte amplitude. En considérant le bruit comme une pseudo-porteuse, un détecteur d'enveloppe extrait ensuite l'information. Finalement un trigger de Schmitt régénère la séquence binaire initiale.

Dans un système réel, les signaux reçus sont souvent déjà bruités. Il suffit alors, si besoin, de n'ajouter que la valeur de bruit permettant d'obtenir le maximum de performance du récepteur.

De plus, contrairement aux récepteurs classiques qui ont besoin d'amplification et de filtrage des signaux bruités reçus, notre récepteur est un tout autre moyen assez original d'utiliser le bruit afin de recevoir une information digitale. Il confirme l'intérêt de la résonance stochastique dans le domaine de la transmission de l'information.

Références

- [1] L. Gammaitoni, P. Häng, P. Jung, & F. Marchesoni, *Stochastic Resonance*, Rev. Mod. Phys., **70**, 223-282 (1998).
- [2] A. Longtin, *Stochastic resonance in neuron models*, J. Statist. Phys., **70**, 309-327, (1993).
- [3] F. Zeng, *Human hearing enhanced by noise*, Brain Research, **869**, 251-255, (2000).
- [4] S. Fauve & F. Heslot, *Stochastic resonance in a bistable system*, Phys. Lett. A, **97**, 5-7 (1983).
- [5] F. Chapeau-Blondeau, *Input-output gains for signal in noise in stochastic resonance*, Phys. Lett. A, **232**, 41-48 (1997).
- [6] X. Godivier, J. Rojas-Varela & F. Chapeau-Blondeau, *Noise-assisted signal transmission via stochastic resonance in a diode nonlinearity*, Electron. Lett, **33**, 1666-1668 (1997).
- [7] J. Mason, J.F. Lindner, J. Neff, W.L. Ditto, R. Adi Bulsara & M.L. Spano, *Pulse-enhanced stochastic resonance*, Phys. Lett. A, **227**, 13-17 (2000).
- [8] E. Simonotto, M. Riani, C. Seife, M. Roberts, J. Twitty, & F. Moss, *Visual perception of stochastic resonance*, Phys. Rev. Lett, **6**, 1186-1189 (1997).
- [9] V.I. Melnikov *Schmitt trigger: a solvable model of stochastic resonance*, Phys. Rev. E., **48**, 2481-2489 (1993).
- [10] Y. Zhang, G. Hu & L. Gammaitoni *Signal transmission in one way coupled bistable systems: noise effect*, Phys. Rev. E, **3**, 2952-2956,(1998).
- [11] J. F. Lindner, S. Chandramouli, A. R. Bulsara, M. Löcher & W. L. Ditto, *Noise enhanced propagation*, Phys. Rev. Lett, **23**, 5048-5051,(1998).
- [12] M. Löcher, D. Cigna & E.R. Hunt, *Noise sustained propagation of a signal in coupled bistable electronic elements*, Phys. Rev. Lett, **80**, 5212-5215,(1998).
- [13] F. Chapeau-Blondeau, *Noise-assisted propagation over a nonlinear line of threshold element*, Electron. Lett, **13**, 1055-1056,(1999).
- [14] F. Chapeau-Blondeau & J. Rojas-Varela, *Nonlinear signal propagation enhanced by noise via stochastic resonance*, Int. J. Bifurcation and Chaos, **10**, 1951-1959,(2000).
- [15] S. Morfu, J.C. Comte, J.M. Bilbault, & P. Marquié, *Noise-enhanced propagation in a dissipative chain of triggers*, Int. J. Bifurcation and Chaos, **12**, (2002).
- [16] J.J. Collins, C. Carson, C. Chow & T. Imhoff *Aperiodic stochastic resonance*, Phys. Rev. E, **52**, (1995).
- [17] S. Morfu, J.C. Comte & J.M. Bilbault, *Digital Information Receiver Based on Stochastic Resonance*, Int. J. Bifurcation and Chaos, **13** (2003).

Modèle à trois champs de phase de la croissance eutectique: Asymptotique et simulations

R. Folch et M. Plapp

Laboratoire PMC, École Polytechnique, 91128 Palaiseau Cedex
rf@pmc.polytechnique.fr

La méthode du champ de phase est devenu un outil standard pour la résolution dynamique de problèmes à frontière libre. Les équations de mouvement sont du type Ginzburg-Landau et peuvent être obtenues à partir d'une fonctionnelle d'énergie libre. Le modèle de champ de phase standard (à un seul paramètre d'ordre) peut être généralisé à plusieurs paramètres d'ordre ou "champs de phase" pour décrire des problèmes tels que la solidification de matériaux composites ou polycristallins. Chaque paramètre d'ordre représente alors une phase thermodynamique ou une orientation cristalline distincte [1].

Récemment, une analyse approfondie du modèle de champ de phase standard a permis un gain énorme de temps de calcul et de précision [2]. En particulier, elle a rendu les simulations en trois dimensions faisables [3]. Ce progrès repose sur un développement asymptotique multi-échelle, où le paramètre de développement est le rapport entre l'épaisseur de l'interface dans le modèle du champ de phase et l'échelle caractéristique des structures simulées.

Il se trouve que l'extension de ces travaux aux modèles à plusieurs champs de phase n'est pas directe. Les généralisations disponibles de la fonctionnelle d'énergie libre standard à plusieurs phases donnent des équations d'évolution pour les champs de phase qui présentent les difficultés suivantes: (i) la condition d'équilibre pour les interfaces couple plusieurs champs, ce qui rend une solution analytique impossible; (ii) hors d'équilibre, ce couplage de plusieurs champs peut induire des effets cinétiques indésirables; et (iii) le développement multi-échelle qui est nécessaire pour obtenir un modèle efficace et quantitatif devient intractable.

Nous présentons un modèle qui résout ces problèmes par un choix spécifique du "paysage de potentiel" dans la fonctionnelle d'énergie libre, pour le cas de trois phases. Il a l'avantage supplémentaire de se réduire, sur les interfaces binaires, au modèle de champ de phase standard, de sorte qu'on puisse appliquer les résultats connus de l'analyse multi-échelle et établir une connection précise entre le modèle et le problème d'interface raide original.

Nous présentons des simulations de solidification dirigée d'alliages eutectiques afin d'illustrer la possibilité de reproduire des données expérimentales précises [4].

Références

- [1] I. Steinbach, *A phase field concept for multiphase systems*, Physica D **94**, 135 (1996).
- [2] A. Karma, W.-J. Rappel, *Quantitative phase-field modeling of dendritic growth in two and three dimensions*, Phys. Rev. E **57**, 4323 (1998); A. Karma, *Phase-Field Formulation for Quantitative Modeling of Alloy Solidification*, Phys. Rev. Lett. **87**, 115701 (2001).
- [3] A. Karma, W.-J. Rappel, *Numerical Simulation of Three-Dimensional Dendritic Growth*, Phys. Rev. Lett. **77**, 4050 (1996).
- [4] S. Akamatsu, S. Moulinet, G. Faivre, *The Formation of Lamellar-Eutectic Grains in Thin Samples*, Metall. Mater. Trans. A **32A**, 2039 (2001).

Transmission non linéaire à travers une couche mince au voisinage de l'angle limite. Cas d'un nouveau polymère octupolaire à fort effet Kerr non résonant.

¹R. Mountasser, ²H. Maillotte et ³F. Chérioux

¹*Département de Physique, Université Hassan II, BP 146, Mohammedia, Maroc.*

²*Laboratoire d'Optique P.M. Duffieux, UMR CNRS/Université de Franche-Comté n° 6603, Institut des Microtechniques de Franche-Comté, 25030 Besançon cedex, France.*

³*Laboratoire de Chimie Organométallique et de Catalyse Homogène, Institut de Chimie, Case Postale 2, CH-2007 Neuchâtel, Suisse.*

herve.maillotte@univ-fcomte.fr

Résumé

Nous présentons une nouvelle méthode très sensible de détermination de l'indice et de l'absorption non linéaires de matériaux en couches minces, basée sur la transmission non linéaire de la couche au voisinage de l'angle de réflexion totale. La méthode a été appliquée à un nouveau polymère octupolaire, élaboré pour procurer un fort effet Kerr optique non résonant.

1 Introduction.

Une couche mince à fort effet Kerr optique non résonant est un composé très prometteur pour des applications tout-optiques ultra-rapides (commutateurs, modulateurs, portes logiques, guides solitons reconfigurables...) dans des dispositifs intégrés. Dans cet objectif, nous avons développé plusieurs familles de nouveaux matériaux organiques dont l'originalité, par rapport aux composés dipolaires classiques (push-pulls), est de posséder des symétries moléculaires particulières (octupolaire, apolaire) leur permettant de procurer un indice de réfraction non linéaire n_2 important hors résonance et de minimiser les pertes par absorption linéaire ou non linéaire. A contrario, pour la quasi-majorité des dipôles organiques, des valeurs comparables de n_2 n'ont été obtenues que par contribution résonante des bandes d'absorption à un ou deux photons, ce qui confère à ces matériaux des figures de mérite (compromis efficacité non linéaire/transparence) souvent insuffisantes pour les applications. En raison de leur interdépendance étroite, la détermination de l'indice n_2 et de l'absorption non linéaire α_2 de couches minces est donc primordiale pour évaluer leur compatibilité en vue d'applications. Deux techniques permettent la mesure directe de ces deux paramètres. La première est la méthode Z-scan [1], très populaire en raison de sa simplicité et de son efficacité. Cependant, elle n'est pas assez sensible dans le cas d'échantillons d'épaisseur micrométrique lorsque ceux-ci possèdent des nonlinéarités de Kerr non résonantes. La deuxième technique, dite m-lines non linéaire, est adaptée à la mesure de n_2 et α_2 pour des couches minces formant des guides d'onde [2,3]. Mais la détermination exacte de l'intensité couplée dans le guide nécessite une modélisation poussée pour prendre en compte la complexité du couplage par prisme [2] ou par réseau [3]. Nous proposons une nouvelle méthode de mesure, similaire à la technique m-lines mais de mise en œuvre plus simple, basée sur la transmission non linéaire en incidence rasante à travers un film mince. De par sa grande sensibilité au voisinage de l'angle limite, cette

méthode permet de mesurer efficacement l'indice et l'absorption non linéaires [4]. Nous l'avons appliqué à la caractérisation d'une couche mince d'un nouveau polymère octupolaire [5]. Nos mesures sont en accord quantitatif avec la valeur n_2 extrapolée des mesures Z-scan sur ce matériau en phase diluée [5].

2 Analyse théorique.

2.1 Transmission optique au voisinage de l'angle limite.

Soit une couche mince non linéaire d'épaisseur e de quelques microns, d'indice de réfraction $n = n_0 + n_2I$ (effet Kerr optique), où n_0 est l'indice de réfraction linéaire, n_2 l'indice non linéaire et I l'intensité lumineuse locale. La couche mince est insérée entre deux milieux linéaires identiques d'indice n_1 (Fig. 1) et éclairée sous un angle d'incidence θ_1 légèrement inférieur à l'angle limite: $\theta_1 < \theta_c = \arcsin(n_0/n_1)$. Pour des faisceaux incidents suffisam-

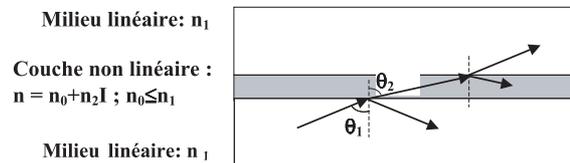


FIG. 1 – Transmission optique à travers une couche mince en incidence rasante.

ment larges, nous considérons que le dispositif est en régime résonant : l'onde réfractée par le premier dioptré et celle réfléchiée par la deuxième interface se recouvrent à l'intérieur de la couche. Dans une première approximation, l'analyse théorique est traitée par un modèle simple, considérant la couche mince comme équivalente à un étalon de Fabry-Pérot de faible finesse ($F = 1,7$ dans nos conditions expérimentales) éclairé par une onde plane en incidence oblique. La transmittance en intensité du résonateur a pour expression : $T = t.t^*$ [6], avec :

$$t = \frac{t_1 t_2 \exp(i\beta)}{1 + r_1 r_2 \exp(2i\beta)} \quad (103)$$

où t_1 , t_2 et r_1 , r_2 sont respectivement les coefficients de transmission et de réflexion en amplitude des dioptrés 1 et 2 de la couche :

$$t_1 = \frac{2n_1 \cos \theta_1}{n_1 \cos \theta_1 + n \cos \theta_2} \quad (104)$$

$$r_1 = \frac{n_1 \cos \theta_1 - n \cos \theta_2}{n_1 \cos \theta_1 + n \cos \theta_2} \quad (105)$$

t_2 et r_2 s'obtiennent en échangeant les angles et les indices dans les équations (2) et (3) et $\beta = \frac{2\pi}{\lambda_0} n e \cos \theta_2$ est le déphasage optique.

Pour l'analyse numérique, les paramètres sont ceux de la couche octupolaire étudiée expérimentalement : $n_0 = 1,580$; $n_1 = 1,595$; $e = 9,1 \mu\text{m}$ et $\lambda_0 = 1,064 \mu\text{m}$. A ces grandeurs correspond un angle limite $\theta_c \approx 82,136^\circ$. La figure 2 illustre le fonctionnement linéaire de la couche ($n_2 I \approx 0$). La transmittance optique résonante (R) présente des pics d'oscillation de plus en plus étroits à mesure que θ_1 s'approche de θ_c . A titre de comparaison, nous avons représenté la transmittance en régime non résonant (NR) : $T = (t_1.t_1^*).(t_2.t_2^*)$. Au voisinage de l'angle limite, les pentes des pics résonants sont bien supérieures à celle de la

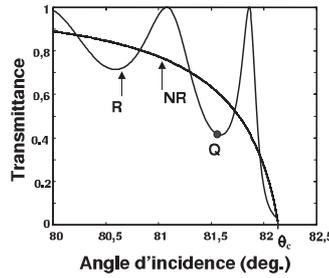


FIG. 2 – Transmittances linéaires de la couche mince au voisinage de l'angle limite (*R* : régime résonant ; *NR* : non-résonant). *Q* est le point de fonctionnement de l'étude expérimentale.

courbe non résonante. Ainsi, la couche mince devient très sensible à l'effet Kerr optique lorsque l'angle d'incidence s'approche de l'angle de réflexion totale.

2.2 Détermination de n_2 et de α_2 .

Considérons tout d'abord le cas d'un milieu sans absorption non linéaire ($\alpha_2 = 0$). A partir d'un point de fonctionnement *Q* situé par exemple sur un front descendant d'un pic de la figure 2, l'apparition de l'effet Kerr optique se traduit par un déplacement relatif du point *Q* sur la courbe (*R*). La transmittance augmente ou diminue avec l'intensité incidente I_0 selon que n_2 est respectivement positif ou négatif. Si le point de fonctionnement est situé sur un front montant, l'effet inverse se produit. Ainsi, la variation de l'intensité incidente autour d'un point de fonctionnement donné permet la détermination du signe de n_2 . Connaissant les paramètres optiques linéaires de la couche ($n_0 ; n_1 ; e ; \lambda_0$), on peut calculer la transmittance théorique $T_{th}(n_2 I)$ à partir des équations (1-3). D'autre part, on réalise une série de mesures expérimentales de la transmittance non linéaire en fonction de l'intensité incidente : $T_{ex}(I)$. La figure 5-a montre un exemple typique de cette procédure. Le n_2 de la couche mince se déduit alors par un 'fitting' de telle façon que l'expression :

$$\sum_{i=1}^{i=N} |(T_{th}^2)_i - (T_{ex}^2)_i| \quad (106)$$

soit minimale au sens des moindres carrés, N étant le nombre de relevés expérimentaux (Fig. 5-b). Dans le cas d'un milieu présentant de l'absorption non linéaire ($\alpha_2 \neq 0$), on montre que l'effet Kerr optique et l'absorption non linéaire agissent de manière indépendante [4]. Comme dans la technique m-lines [2,3], l'absorption non linéaire réduit la courbe de transmittance non linéaire (Fig. 5-a) dans la dimension verticale uniquement. En revanche, il ne se produit ni décalage horizontal, ni modification de la forme globale de cette courbe. Un double fitting sur n_2 et sur α_2 par minimisation des moindres carrés permet une caractérisation complète de la couche mince.

3 Application à un polymère octupolaire.

Dans le but d'améliorer les figures de mérite des matériaux organiques pour l'effet Kerr optique, nous avons développé des nouvelles molécules à structure octupolaire ainsi qu'un polymère dont les performances, extrapolées à partir de mesures Z-scan en solution, sont

très prometteuses [5]. La structure du polymère octupolaire - poly[2,4,6-tris(5'-thioallyl-2,2'-dithienyl)-1,3,5-triazine] - est représentée sur la figure 3. Le monomère possède un centre fortement attracteur d'électrons constitué de trois atomes d'azote et trois branches donneuses. Le polymère, sous forme solide de couleur jaune, se dissout très facilement dans le toluène.

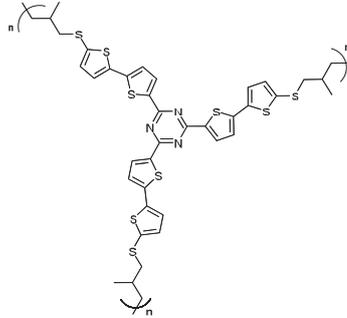


FIG. 3 – Structure du polymère octupolaire.

4 Etude expérimentale.

4.1 Préparation de la couche mince.

Une goutte de solution du polymère octupolaire est déposée en couche mince à la tournette sur un barreau de verre F3 de qualité optique et séchée ensuite pendant quelques heures dans un four. Après refroidissement, un deuxième barreau identique au premier est appliqué sur la face libre du film. Un serrage par vis téflon permet d'éliminer le gap d'air entre la couche et ce deuxième barreau. A la longueur d'onde $\lambda_0 = 1,064 \mu\text{m}$, l'indice des barreaux de verre a pour valeur $n_1 = 1,595$ et l'indice n_0 de la couche, mesuré par un réfractomètre d'Abbe, vaut $n_0 = 1,580$. L'épaisseur du film, $e = 9,1 \mu\text{m}$, a été déterminée par interférométrie. Le spectre d'absorption linéaire du film octupolaire présente un maximum à la longueur d'onde $\lambda_{max} = 0,380 \mu\text{m}$. A $1,064 \mu\text{m}$, l'absorption linéaire est faible ($< 90\%$); en revanche, l'absorption à deux photons est susceptible de se manifester en raison de l'absorption résiduelle à 532 nm .

4.2 Dispositif expérimental.

Nous avons utilisé un laser Nd:YAG émettant des impulsions de durée 35 ps à 10 Hz à la longueur d'onde $1,064 \mu\text{m}$ (Fig. 4). Le faisceau est TEM_{00} . La variation de I_0 est assurée par une lame demi-onde suivie d'un polariseur. Le faisceau incident est focalisé sur la couche mince par une lentille de focale $f' = 60 \text{ cm}$. Un faisceau de référence est prélevé en amont à l'aide de la séparatrice (BS). Les faisceaux transmis et référence sont détectés par une photodiode (Ph) connectée à un oscilloscope rapide qui nous permet de mesurer simultanément les deux impulsions, décalées par la ligne à retard [BS-M-Ph]. Les énergies des impulsions sont calibrées par un joulemètre. La taille du beam-waist au niveau de la couche mince, mesurée par caméra CCD, à un diamètre $2\omega_0$ de l'ordre de $80 \mu\text{m}$.

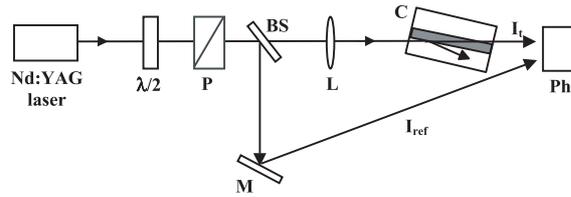


FIG. 4 – Montage optique. $\lambda/2$: lame demi-onde; P : polariseur; BS : séparatrice; M : miroir; L : lentille de focalisation; C : couche mince; I_t : intensité transmise; I_{ref} : intensité référence; Ph : photodétecteur.

4.3 Résultats expérimentaux.

Une série de mesures de la transmittance de la couche mince, $T_{ex} = I_t/I_0$, a été effectuée sur une gamme d'énergies incidentes croissantes. La figure 5-a montre la transmittance expérimentale (*) en fonction de l'intensité dans la couche pour le point de fonctionnement indiqué sur la figure 2, $Q(\theta_1 = \theta_c - 0,5^\circ; T = 0,4)$. Par comparaison avec les courbes théoriques (R) et (NR) de la figure (5-a), les données expérimentales montrent clairement que la transmittance non linéaire de la couche mince est en régime résonant ou pseudo-résonant.

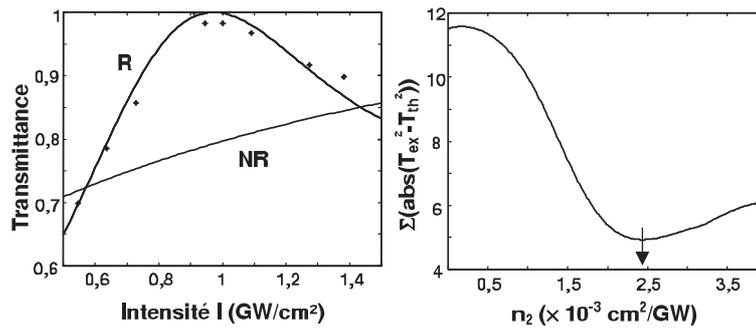


FIG. 5 – Transmittances non linéaires expérimentale (*) et théoriques (-) (R: résonante; NR: non résonante) de la couche mince octupolaire en fonction de l'intensité dans la cavité. (b): détermination de n_2 par régression des moindres carrés.

En effet, pour l'angle d'incidence $\theta_1 = 81,64^\circ$, la taille du faisceau au niveau du premier dioptré de la couche est égale à $2\omega_0/\cos(\theta_1) \approx 550 \mu\text{m}$. A un aller et retour dans la cavité Fabry-Pérot correspond une translation du faisceau de l'ordre de $2e \times \tan(\theta_2) \approx 360 \mu\text{m}$; où $\theta_2 = 87,141^\circ$ est l'angle de réfraction dans la couche. Ces valeurs montrent qu'il y a un recouvrement suffisant des faisceaux à l'intérieur du résonateur. Pour déterminer la transmittance théorique (Eqs 1-3), il faut connaître l'intensité locale I dans la cavité. Compte tenu de faible la finesse du résonateur ($F=1,7$), l'intensité I peut être approximée par sa valeur moyenne [7]:

$$I \approx [(1 + R)/(1 - R)] \times I_t = 1,64 \times I_t \approx 0,65 \times I_0 \quad (107)$$

où $R = |r|^2 = 0,2431$ est le coefficient de réflexion en intensité du premier dioptré et $T(0) = 0,65$. La figure 5-a montre que la transmittance augmente rapidement, à partir de sa valeur linéaire $T(0)$, pour atteindre un maximum proche de $T \sim 100\%$ lorsque l'intensité varie d'un seuil relativement bas ($0,8 \text{ GW/cm}^2$) à $1,4 \text{ GW/cm}^2$. Cet effet peut être directement utilisé

pour la commutation tout-optique ultra-rapide.

Le 'fitting' de la transmittance expérimentale par la transmittance théorique sur la figure 5-a est obtenu après calcul de l'expression (4) sur une grande plage de valeurs n_2 . D'après la courbe de régression (Fig. 5-b), la valeur optimale (minimum) de n_2 est de l'ordre de $240 \times 10^{-18} \text{m}^2/\text{W}$. Cette valeur est très importante ($\approx 68 \times n_2$ du standard CS₂). L'incertitude sur sa détermination, $\Delta n_2 \approx 15 \times 10^{-18} \text{m}^2/\text{W}$, est liée aux incertitudes sur les paramètres physiques de la couche ($\Delta n \approx 2 \cdot 10^{-3}$; $\Delta e \approx 0,1 \mu\text{m}$; $\Delta \theta \approx 0,01^\circ$) et aux fluctuations de l'intensité laser ($\Delta I_0/I_0 \approx 10\%$). Le n_2 de l'octupole a été mesuré préalablement en solution par la méthode Z-scan [5]. L'extrapolation des résultats Z-scan au polymère en phase solide a donné une valeur $n_2 \approx 220 \times 10^{-18} \text{m}^2/\text{W}$, en très bon accord avec celle que nous déterminons par la méthode en incidence rasante. La figure 5-a montre qu'au niveau du sommet, la transmittance expérimentale est légèrement inférieure à la transmittance théorique ($\approx \Delta T = 0.02$). Compte tenu des incertitudes de mesure, nous ne pouvons pas statuer sur la présence éventuelle d'une absorption à deux photons. En tout état de cause, si cette absorption existe, un double fitting sur n_2 et α_2 indique qu'elle est au plus de l'ordre de $0,1 \text{ cm/GW}$. Cette faible valeur conduit à une figure de mérite $T = \alpha_2 \cdot \lambda_0 / n_2 \approx 4 \times 10^{-3}$, très satisfaisante en vue des critères requis pour les applications en optique non linéaire intégrée.

5 Conclusion.

Une couche mince en polymère octupolaire a été synthétisée dans le but de procurer un fort effet Kerr optique non résonant. La détermination de l'indice de réfraction non linéaire de la couche mince a été effectuée par une nouvelle méthode, très sensible, basée sur la transmission non linéaire à travers une couche mince au voisinage de l'angle limite. Une valeur élevée de l'indice non linéaire ($n_2 = 240 \times 10^{-18} \text{m}^2/\text{W}$) a été déterminée, en concordance avec les extrapolations des mesures Z-scan effectuées sur l'octupole en solution.

Références

- [1] M. Sheik-Bahae et al., *Sensitive measurement of optical nonlinearities using a single beam*, IEEE J. Quantum Electron., **26**, 760 (1990).
- [2] K. Ueberhofen et al., *Nonlinear optical waveguide spectroscopy of a conjugated polymer: poly(p-phenylenevinylene)*, J. Opt. Soc. Am. B., **16**, 1921 (1999).
- [3] G. Vitrant et al., *Measurements of large nonresonant optical Kerr nonlinearities in functionalized polymers*, Nonlinear Opt., **18**, 251 (1994).
- [4] R. Mountasser et al., *Transmission through a nonlinear thin layer near the critical angle of incidence: application to the sensitive determination of the nonlinear refractive index*, soumis à J. Opt. A: Pure Appl. Opt., (2002).
- [5] F. Chérioux et al., *Synthesis and characterisation of an octupolar polymer and new molecular octupoles with off-resonant third order optical nonlinearities*, J. Chem. Soc., Chem. Commun., **20**, 2083, (1999).
- [6] M. Born and E. Wolf, *Principles of Optics*, Pergamon, 6th edition, New York, p.61 (1980).
- [7] M. Haelterman et al., *Transverse effects in nonlinear planar resonators. I. Modal theory*, J. Opt. Soc. Am. B, **1309** (1990).

Génération d'un large continuum spectral dans le mode fondamental d'une fibre de télécommunication standard pompée par un microlaser.

A. Mussot, L. Provino, T. Sylvestre et H. Maillotte

Laboratoire d'Optique P.M. Duffieux, UMR CNRS/Université de Franche-Comté n° 6603

16 route de Gray, 25030 Besançon cedex, France

tel: 03.81.66.64.26, fax: 03.81.66.64.23

arnaud.mussot@etudes.univ-fcomte.fr

Résumé

Nous avons obtenu un supercontinuum de plus de 600 nm de largeur spectrale dans le mode fondamental d'une fibre de télécommunication standard pompée par un microlaser Nd:YAG déclenché à 532 nm. Nous expliquons la formation du continuum et démontrons son évolution dans le mode fondamental.

1 Introduction

Actuellement, un grand intérêt est porté à la génération de continuums spectraux dans les fibres optiques par l'intermédiaire de processus non-linéaires d'ordre trois tels que la diffusion Raman stimulée (SRS), le mélange à quatre ondes (FWM), l'automodulation de phase (SPM) ou l'intermodulation de phase (XPM) [1-8]. Cet intérêt est suscité par de nombreuses potentialités d'applications, notamment en spectroscopie [9], en tomographie optique de cohérence [10], en microscopie en champ proche [11] et pour la réalisation de sources laser accordables performantes [12] ou la génération d'impulsions ultra-brèves [1, 2]. Les caractéristiques spectro-temporelles de la source laser utilisée sont déterminantes pour identifier les processus physiques assurant l'élargissement spectral du continuum. Avec des impulsions de quelques centaines de femtosecondes de durée, FWM, SPM et XPM sont les effets non-linéaires dominants [2, 7, 8], tandis que pour des impulsions picosecondes ou nanosecondes, SRS et FWM sont les processus majoritaires [3, 5, 6]. Différents types de fibres conventionnelles, ou combinaisons de fibres, ont été développés pour la génération de SC [1-3] et procurent des élargissements spectraux de 400 nm au maximum. Une avancée spectaculaire a été apportée récemment grâce aux fibres photoniques, ou grâce à des fibres standard étirées, dont le faible rayon de cœur et les caractéristiques de dispersion spécifiques ont permis d'obtenir des continuums sur plus de 1200 nm en régime femtoseconde [8]. Cependant à l'exception de la référence [6], tous ces systèmes utilisent des sources de pompage relativement complexes, mal adaptées pour les applications. D'autre part, l'utilisation de fibres spéciales en cours de développement (PCF, étirées) peut poser des problèmes de pertes et de connectique ce qui freine également la mise en application des SC. Enfin, le caractère spatialement unimodal du continuum généré est un critère de qualité supplémentaire à assurer. Dans cette étude, nous proposons de mettre à profit un pompage multimode transverse pour générer un SC dans le mode fondamental d'une fibre de télécommunication standard, par combinaison de SRS et FWM. Ce type de configuration nous a permis d'utiliser comme pompe un simple microlaser pour générer un SC spatialement unimodal s'étendant sur plus de 600 nm avec une densité spectrale moyenne de $6,3 \mu\text{W}/\text{nm}$. Nous montrons ainsi qu'il n'est pas nécessairement indispensable d'employer des fibres PCF pour générer de vastes continuums.

2 Configuration expérimentale

La fibre utilisée est une fibre à dispersion décalée (DSF) usuelle, sans maintien de polarisation, de longueur 1100 m dont le zéro de dispersion se situe à 1550 nm et la longueur d'onde de coupure à 1020 nm. Nous avons utilisé un microlaser Q-switch doublé en fréquence (Nanolase Nanogreen) dont la longueur d'onde d'émission est 532 nm, le taux de répétition 6,7 kHz et la puissance moyenne 6 mW. Les impulsions ont une durée de 0,8 ns et une largeur spectrale de 0,1 nm. Cette source permet d'exciter les quatre premiers modes transverses de la fibre DSF dans sa zone de dispersion normale. Les impulsions délivrées par le microlaser, monomodes transverses et polarisées linéairement, sont injectées dans la DSF au moyen d'un objectif de microscope $\times 20$. Le taux de couplage obtenu est voisin de 90%. Les impulsions émergent de la DSF sont analysées avec un analyseur de spectre optique. Pour observer la dynamique de formation du continuum, nous avons fait varier la puissance en entrée de fibre au moyen d'une lame $\lambda/2$ et d'un polariseur afin de conserver les conditions optimales d'injection.

3 Résultats et discussion

3.1 Formation du continuum

La figure 1 montre l'évolution de la formation du continuum en fonction de la puissance incidente. La longueur de fibre choisie, 1100 m, correspond au meilleur compromis entre l'étendue du continuum, limitée par le walk-off entre les différentes composantes spectrales, et la puissance moyenne de sortie, limitée par l'absorption de la fibre. Sur la Fig. 1-a, l'impulsion pompe génère le premier ordre Raman Stokes (S_1), séparé de 440 cm^{-1} pour une fibre en silice [13]. A puissance légèrement plus forte, une bande paramétrique Stokes (P_P) générée grâce à un accord de phase multimode apparaît à 5 nm de la pompe. S_1 et P_P jouent alors le rôle de deux nouvelles pompes qui créent à leur tour leurs propres ordres Raman Stokes S_2 et S_{P_1} (Fig. 1-(b-c)) [14]. Ainsi la pompe initiale à 532 nm (P), et la pompe paramétrique à 537 nm (P_P) sont à la base de deux cascades Raman simultanées. En augmentant la puissance de pompe, cette double cascade Raman est à l'origine d'un phénomène remarquable qui accélère l'élargissement des ordres Raman Stokes supérieurs par création d'une composante hybride S_{H_1} (Fig. 1-c). La poursuite du processus via la génération des composantes suivantes $S_{H_2}...$ toujours décalées de 440 cm^{-1} mais de plus en plus larges spectralement (Fig. 1-d), aboutit finalement sur la formation d'un super continuum sur plus de 600 nm et avec une puissance moyenne de 3,8 mW (Fig. 1-f).

3.2 Génération de la pompe paramétrique

Compte tenu des caractéristiques multimodales de la fibre DSF, la génération de la bande paramétrique P_P se fait grâce un accord de phase entre les différents modes transverses excités, selon une relation du type [13] :

$$\Delta k(\Delta\nu) + f(\Delta\nu) = 0 \quad (108)$$

où $\Delta k(\Delta\nu)$ et $f(\Delta\nu)$ représentent les désaccords de phase respectivement dus à la dispersion du matériau et à la dispersion modale du guide, pour un décalage fréquentiel $\Delta\nu$ à partir de 532 nm. Nous avons simulé cet accord de phase multimode, en modélisant la fibre DSF comme une fibre à saut d'indice dont les paramètres ($2,11 \mu\text{m}$ de rayon de cœur et

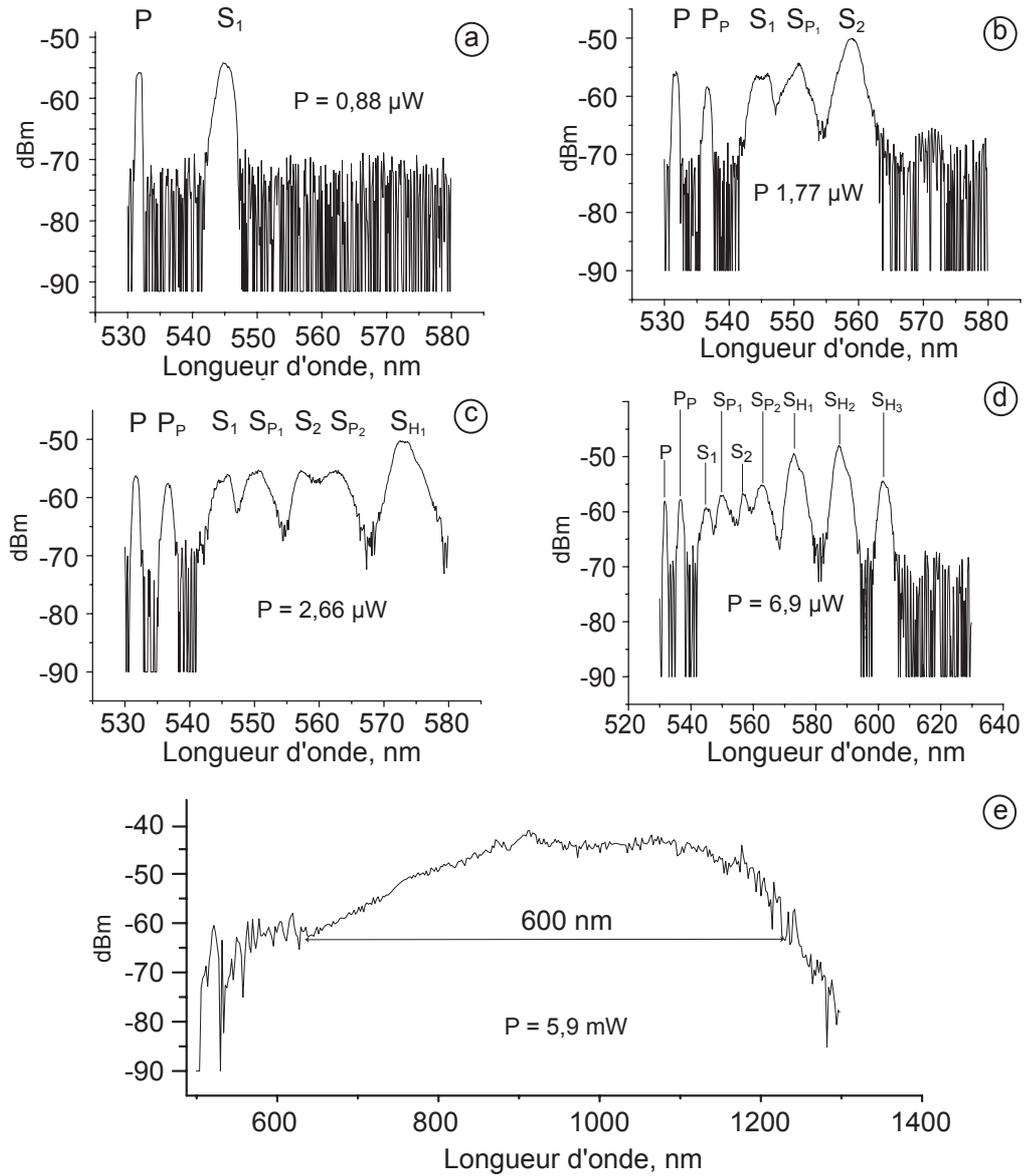


FIG. 1 – Formation du continuum à puissance de pompe croissante. Les puissances indiquées sont mesurées en entrée de fibre.

une différence d'indice cœur-gaine de 0.0123 à la longueur d'onde de la pompe) sont en bon accord avec les caractéristiques données par le constructeur. Ces simulations ainsi qu'une analyse expérimentale dans un court tronçon de fibre montrent que les quatre premiers modes, LP_{01} , LP_{02} , LP_{11} et LP_{12} , sont excités à 532 nm. Ces modes d'ordre supérieur, jouant le rôle de pompes, autorisent plusieurs configurations d'accord de phase avec de faibles décalages fréquentiels. Le deuxième terme de dispersion modale dans l'équation 108 est exprimé par :

$$f(\Delta\bar{\nu}) = 2\pi(n_c - n) \left[\frac{d(b_{01}V)}{dV} - \frac{d(b_{02}V)}{dV} \right] \Delta\bar{\nu} \quad (109)$$

où $V \approx 4.51$ est la fréquence normalisée [13], b_{01} et b_{02} sont les constantes de propagation des deux modes impliqués dans l'accord de phase, $\Delta\bar{\nu} = \Delta\nu/c$ est le décalage de fréquence

normalisé, et n_c et n sont respectivement les indices du cœur et de la gaine. En développant la constante de propagation au voisinage de la fréquence d'excitation de la pompe ν_P , le premier terme de dispersion matérielle de l'équation 108 s'exprime par :

$$\Delta k = 4\pi^2 \Delta\nu^2 \beta_2 \quad (110)$$

avec β_2 la dispersion de vitesse de groupe à la fréquence ν_P . La résolution des équations (108-110) montre qu'un pompage multimode transverse, $LP_{01} + LP_{02}$, permet de générer des bandes paramétriques Stokes et anti-Stokes respectivement dans les modes LP_{02} et LP_{01} , et ce, à 4,4 nm de part et d'autre des pompes à 532 nm, en relativement bon accord avec l'observation expérimentale (Fig. 1 b). En raison de l'absorption anti-Stokes par le SRS [13], seule la bande paramétrique Stokes P_P est observable.

3.3 Double cascade Raman et évolution en continuum

Dans le cas d'une simple cascade Raman, l'évolution des ordres Stokes discrets en continuum a déjà été démontrée expérimentalement [3]. L'élargissement spectral croissant au cours de la cascade provient d'une intermodulation de phase (XPM) entre deux ordres adjacents, permise dans le cas d'un laser déclenché par la présence de structures temporelles fines dans les impulsions initiales. Dans ce cas, compte tenu des fréquences mises en jeu et des caractéristiques non-linéaires de la fibre, chaque ordre généré a une largeur spectrale approximativement doublée par rapport à l'ordre précédent. Le recouvrement spectral progressif des ordres Raman supérieurs permet d'évoluer vers le continuum. Ce processus d'élargissement est accéléré par le fait que, dans notre expérience, deux cascades simultanées sont générées et se superposent dès le troisième ordre (Fig. 1-(c et d)), pour ne constituer plus qu'une seule cascade hybride dont la largeur de chaque ordre est encore plus importante.

3.4 Caractère spatialement unimodal du continuum

La figure 2 montre la décomposition spectrale du SC enregistrée après dispersion sur un réseau de diffraction. La distribution modale transverse observée pour les composantes discrètes de P jusqu'à S_{H_4} , avec un trou sombre central, est caractéristique en premier lieu du couplage qui s'établit entre les différents modes dans une fibre longue et également du profil d'indice de la fibre DSF.

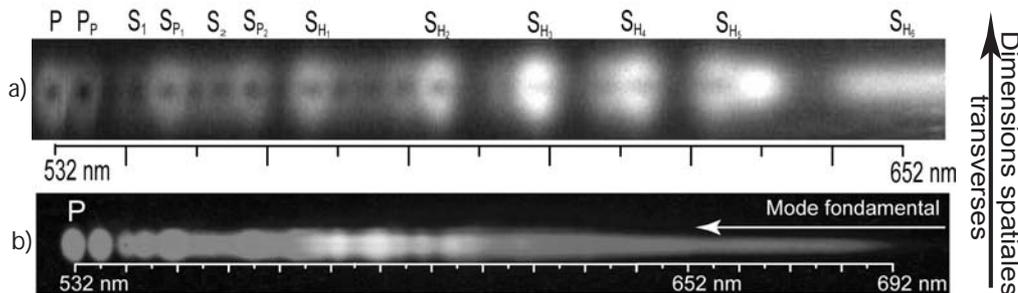


FIG. 2 – Distribution de l'intensité modale et spectrale du SC, dispersé par un réseau de diffraction, (a), enregistrée avec une caméra CCD, (b), avec un appareil photographique.

A partir de la composante S_{H_6} , on distingue un net rétrécissement de la distribution

modale transverse, qui suggère que le continuum se développe dans le mode fondamental au delà de 650 nm. Pour vérifier cette hypothèse, deux tests ont été effectués (Fig. 3). Premièrement, nous avons filtré les modes d'ordre supérieur en enroulant la sortie de la fibre autour d'un cylindre de 4 mm de diamètre et examiné le spectre résultant à l'aide de l'analyseur de spectre optique. La figure 3-b montre que les modes supérieurs, qui possèdent des composantes spectrales inférieures à 650 nm, sont éliminés tandis que le continuum à partir de 650 nm se répartit préférentiellement dans le mode fondamental de la fibre. Deuxièmement, nous avons filtré spectralement le spot de diffraction en sortie de fibre à

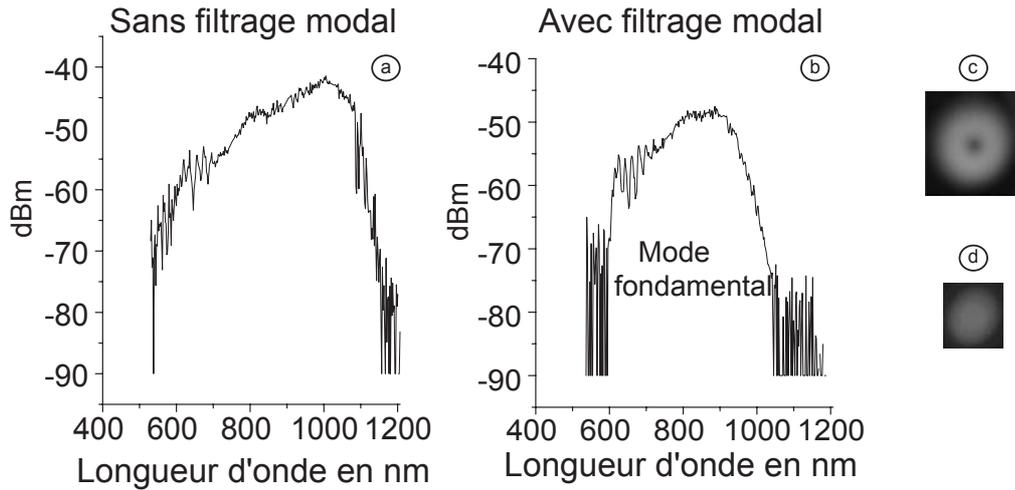


FIG. 3 – Spectres du continuum avec (a) et sans (b) filtrage modal et distribution d'intensité du spot de diffraction en sortie de fibre avec (c) et sans (d) filtre chromatique.

l'aide d'un filtre chromatique passe-bas dont la fréquence de coupure est à 650 nm (Fig. 3 d). La réduction de la taille du spot filtré ainsi que sa répartition d'intensité homogène confirme qu'à partir de cette longueur d'onde, le continuum occupe effectivement le mode fondamental. Ces résultats montrent que le processus de cascade Raman lui-même induit son propre couplage modal pour des longueurs de fibres suffisamment importantes [15] et agit donc comme un filtre transverse progressif au cours de la propagation. Notons que la valeur particulière à partir de laquelle le continuum évolue vers le mode fondamental est très certainement liée aux longueurs d'onde de coupure des modes LP_{02} et LP_{21} , à 643 nm et 650 nm respectivement.

4 Conclusion

Nous avons démontré et expliqué la formation d'un supercontinuum visible IR-proche de plus de 600 nm d'extension spectrale, formé dans le mode fondamental d'une fibre de télécommunication standard pompée à l'aide d'un microlaser commercial. Cette configuration est à notre connaissance la plus simple permettant d'obtenir de telles performances. Les caractéristiques du continuum, la compacité et la stabilité de ce montage simple, ainsi que son coût relativement faible sont des atouts importants pour le développement des nombreuses applications décrites en introduction.

Références

- [1] K. Mori, H. Takara and S. Kawanashi, *Analysis and design of supercontinuum pulse generation in a single-mode optical fiber*, J. Opt. Soc. Am. B, **12**, 18, 1780-1792 (2001).
- [2] G. A. Nowak, J. Kim and M. N. Islam, *Stable supercontinuum generation in short lengths of conventional dispersion-shifted fiber*, Appl. Opt., **38**, 36, 7364-7369 (1999).
- [3] I. Ilev, H. Kumagau, K. Tyoda and I. Koprnikov, *Highly efficient wideband continuum generation in a single mode optical fiber by powerful broadband laser pumping*, Appl. Opt., **35**, 15, 2548-2553 (1996).
- [4] P. A. Champert, S. V. Popov and J.R. Taylor, *Generation of multiwatt, broadband continua in holey fibers*, Opt. Lett., **27**, 2, 122-124 (2002).
- [5] S. Coen, A. H. Lun Chau, R. Leonhardt and J. D. Harvey, *White-light supercontinuum generation with 60-ps pump pulses in a photonic crystal fiber*, Opt. Lett., **26**, 17, 1356-1358 (2001).
- [6] L. Provino, J.M. Dudley, H. Maillotte, N. Grossard, R. S. Windeler et B. J. Eggleton, *Compact broadband continuum source based on microchip laser pumped microstructured fibre*, Electron. Lett., **37**, 9, 558-560 (2001).
- [7] J. K. Ranka, S. Windeler and A. J. Stenz, *Visible continuum generation in air-silica microstructure optical fibers with anomalous dispersion at 800 nm*, Opt. Lett., **25**, 1, 25-27 (2000).
- [8] K.T. A. Birks, J. Wadsworth and P. St. J. Russel, *Supercontinuum generation in tapered fibers*, Opt. Lett., **25**, 19, 1415-1417 (2000).
- [9] A.B. Fedotov, A. M. Zheltikov, A. A. Ivanov, M. V. Alfinov, D. Chorvat, V. I. Beloglazov, L. A. Mel'nikov, N.B. Skibina, A. P. Tarasevitch and D. von der Linde, *Supercontinuum generation holey fibers as new broadband sources for spectroscopic applications*, Laser Physics, **10**, 3, 723-726 (2000).
- [10] I. Hartl, X.D. Li, C. Chudoba, R.K. Ghanta, T.H. Ko and J.G. Fujimoto, *Ultra-high-resolution optical coherence tomography using continuum generation in an air-silica microstructure optical fiber*, Opt. Lett., **26**, 9, 608-610 (2001).
- [11] C. Vannier, C. Bainier and D. Courjon *Isotropic incoherent scanning tunneling optical microscope (P^2 STOM)*, Opt. Comm., **175**, 83-88 (2000).
- [12] P.A. Champert, S.V. Popov and J.R. Taylor, *Tunable, broad visible range, fiber-based Raman source*, Electron. Lett., **36**, 24, 2003-2004 (2001).
- [13] G. P. Agrawal, *Nonlinear fiber optics*, Accademic Press, Optics and Photonics series, third edition, San Diego (2001).
- [14] A. Sharma, M. Dokhanian, Z. Wu, A. Williams and P. Venkateswarlu, *Four-photon-mixing-mediated stimulated Raman scattering in a multimode optical fiber*, Opt. Lett., **19**, 15, 1122-1124 (1994).
- [15] King S. Chiang, *Stimulated Raman Scattering in a multimode optical fiber: evolution of modes in Stokes waves*, Opt. Lett., **17**, 5, 352-354 (1992).

La triple hélice : vers une mécanique du collagène

S. Neukirch¹ et G. H. M. van der Heijden²

1: *Lab. for Computation and Visualization in Mathematics and Mechanics
Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, CH-1015 Suisse*

2: *Centre for Nonlinear Dynamics and its Applications, University College London
Gower Street, London WC1E 6BT, U.K.*

sebastien.neukirch@epfl.ch

Résumé

Nous établissons l'équation d'équilibre d'un câble composé de n brins enroulés en hélice de pas constant. Nous montrons d'abord que les brins se touchent d'une façon particulière: le domaine de contact pour chacun des brins est une double hélice et non plus une ligne droite comme c'est le cas pour un câble à deux brins (A.D.N. par exemple). Cette géométrie nouvelle implique l'existence d'un jour entre les brins le long de l'axe. Nous montrons ensuite que la force de pression exercée sur un brin par les deux brins qui lui sont adjacents est perpendiculaire à l'axe de l'enroulement. Finalement, nous appliquons ces calculs à la triple hélice du collagène.

1 Introduction

Les torsades sont des structures de brins élastiques enroulés les uns autour des autres. Elles sont présentes dans des domaines aussi éloignés que l'ingénierie - textile (laine) et forage offshore (cable de mouillage) - et la biologie moléculaire - protéines fibreuses (collagène, kératine), génie génétique (A.D.N. artificiel). Nous étudions la géométrie (section 2), la mécanique (section 3) de ces torsades à n brins. Puis nous montrons dans quelles mesures ce modèle mécanique peut s'appliquer à la molécule de collagène (section 4).

2 Géométrie

Considérons une torsade formée de n brins de rayon r s'enroulant en hélice le long d'un cylindre imaginaire de rayon R (voir fig. 1). Les brins sont considérés comme des tubes élastiques inextensibles, de section circulaire et fait d'un matériel dont les propriétés élastiques sont isotropes. Dans ce cas l'équilibre mécanique des brins est décrit par les équations de Kirchhoff [1].

Dans le repère fixe orthonormé $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ la position de la ligne centrale d'un brin s'écrit :

$$\mathbf{r}_1(s) = \begin{pmatrix} +R \sin \psi \\ -R \cos \psi \\ s \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \psi' = \frac{\epsilon \sin \theta}{R}, \quad \psi(0) = 0, \quad (111)$$

où s est l'abscisse curviligne et $' \stackrel{\text{def}}{=} d/ds$. L'angle d'enroulement θ est l'angle complémentaire de l'angle du pas de l'hélice. Cet angle est considéré *constant* dans tout ce qui suit. Nous utilisons $\epsilon = \pm 1$ pour désigner le sens d'enroulement des hélices. Les lignes centrales des autres brins sont alors données par :

$$\mathbf{r}_{i+1} = \mathcal{R}_n^i \mathbf{r}_1 \quad (i = 1, \dots, n-1), \quad (112)$$

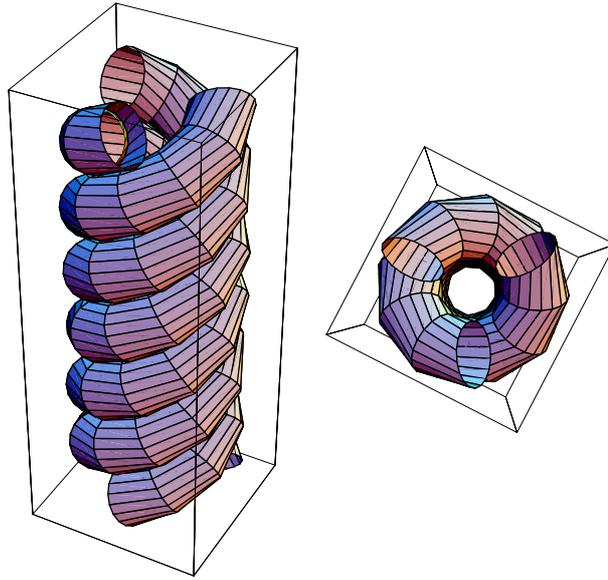


FIG. 1 – Deux vues d'un trio torsadé avec $\theta = \frac{\pi}{3}$. Le contact entre deux brins adjacents se fait le long d'une hélice.

où \mathcal{R}_n est la matrice de rotation d'angle $2\pi/n$ autour de \mathbf{e}_3 :

$$\mathcal{R}_n = \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi}{n} & -\sin \frac{2\pi}{n} & 0 \\ \sin \frac{2\pi}{n} & \cos \frac{2\pi}{n} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (113)$$

Le contact entre deux brins (\mathbf{r}_1 et \mathbf{r}_2 par exemple) est alors sujet aux deux conditions :

$$C_1: |\mathbf{r}_1(s_1) - \mathbf{r}_2(s_2)| = 2r \text{ (la distance entre brin doit être égale à leur diamètre).}$$

$$C_2: \mathbf{r}'_1(s_1) \cdot (\mathbf{r}_1(s_1) - \mathbf{r}_2(s_2)) = \mathbf{r}'_2(s_2) \cdot (\mathbf{r}_1(s_1) - \mathbf{r}_2(s_2)) = 0 \text{ (le contact doit être tangentiel).}$$

Ces conditions s'écrivent :

$$\frac{r^2}{R^2} = \frac{1}{2} \left(1 - \cos \left(\frac{2\pi}{n} - x \sin \theta \right) \right) + \frac{1}{4} x^2 \cos^2 \theta, \quad (114)$$

$$x \cos^2 \theta - \sin \theta \sin \left(\frac{2\pi}{n} - x \sin \theta \right) = 0, \quad (115)$$

avec $x = \epsilon(s_1 - s_2)/R$. Notons l'invariance de translation : ces équations ne dépendent de s_1 et s_2 que par l'intermédiaire de x .

La valeur du rayon r des filaments étant donnée, ces deux équations ont trois inconnues : l'angle d'enroulement θ , le décalage en abscisse curviligne x entre deux points en contact sur deux brins adjacents et le rayon R du cylindre imaginaire qui porte les brins. Nous avons à faire à un ensemble continu de solutions que nous allons décrire en fonction de θ croissant. Pour $n = 2$ et $\theta \leq \frac{\pi}{4}$, le rayon du cylindre porteur R est égal à r et il n'y a pas de décalage entre les points de contact ($x = 0$) : le contact se fait le long de l'axe \mathbf{e}_3 . Mais pour $n = 2$ et $\theta > \frac{\pi}{4}$ ou bien pour $n > 2$ et $\theta > 0$, un décalage apparaît ($x > 0$) et le

cylindre porteur est plus épais que les brins $R > r$. Ce qui introduit un jour au centre de l'enroulement (voir fig. 1). Lorsque $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$ alors $x \rightarrow \frac{2\pi}{n}$ et $R \rightarrow +\infty$.

Ecrivons (pour $\epsilon = +1$) l'équation de la ligne de contact entre les brins : $\mathbf{r}_c = \frac{1}{2}(\mathbf{r}_1(s_1) + \mathbf{r}_2(s_1 - Rx))$. En utilisant (111) et (112), nous obtenons :

$$\mathbf{r}_c = \begin{pmatrix} R \cos\left(\frac{1}{2}x \sin \theta - \frac{\pi}{n}\right) \sin\left[\frac{1}{R}(s_1 - \frac{1}{2}xR) \sin \theta + \frac{\pi}{n}\right] \\ -R \cos\left(\frac{1}{2}x \sin \theta - \frac{\pi}{n}\right) \cos\left[\frac{1}{R}(s_1 - \frac{1}{2}xR) \sin \theta + \frac{\pi}{n}\right] \\ (s_1 - \frac{1}{2}xR) \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (116)$$

Ceci est l'équation d'une hélice paramétrisée par s_1 , de rayon $R \cos\left(\frac{1}{2}x \sin \theta - \frac{\pi}{n}\right)$ et de même angle d'enroulement θ que les brins.

3 Mécanique

Pour décrire l'équilibre mécanique d'une torsade à n brins, il est nécessaire de considérer le twist présent dans chacun des brins. La théorie de Cosserat des filaments élastiques [2], introduit en plus de la donnée de la ligne centrale \mathbf{r} , un jeu de trois directeurs $\{\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3\}$ orthonormés qui permet de suivre les déformations de la section du filament (dont le twist). Nous restreignons ici l'étude au cas de filaments sans déchirement : $\mathbf{d}_3(s)$ est ainsi la tangente normée de la ligne centrale : $\mathbf{r}' = \mathbf{d}_3$. Nous avons donc :

$$\mathbf{d}_3(s) = \begin{pmatrix} \epsilon \sin \theta \cos \psi \\ \epsilon \sin \theta \sin \psi \\ \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (117)$$

Les vecteurs $\mathbf{d}_1(s)$ et $\mathbf{d}_2(s)$ engendrent la section d'un brin à l'abscisse s . L'évolution des directeurs en fonction de s est donnée par :

$$\mathbf{d}'_i = \mathbf{u} \times \mathbf{d}_i \quad (i = 1, 2, 3), \quad (118)$$

où \mathbf{u} est le vecteur des contraintes. Ses composantes écrites dans la base des directeurs $u_i = \mathbf{u} \cdot \mathbf{d}_i$ sont les courbures ($i = 1, 2$) et le twist ($i = 3$).

Afin de simplifier les calculs à venir, nous introduisons un repère cylindrique fixe $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\psi, \mathbf{e}_z\}$:

$$\mathbf{e}_r = \sin \psi \mathbf{e}_1 - \cos \psi \mathbf{e}_2, \quad (119)$$

$$\mathbf{e}_\psi = \cos \psi \mathbf{e}_1 + \sin \psi \mathbf{e}_2, \quad (120)$$

$$\mathbf{e}_z = \mathbf{e}_3. \quad (121)$$

L'équilibre de la force interne \mathbf{F} et du moment \mathbf{M} le long du filament s'écrivent (voir e.g., [2]) :

$$\mathbf{F}' + \mathbf{p} = \mathbf{0}, \quad (122)$$

$$\mathbf{M}' + \mathbf{r}' \times \mathbf{F} = \mathbf{0}. \quad (123)$$

Ici \mathbf{p} est la résultante des forces externes agissant sur le brin. Les relations de constitution linéaires (reliant la courbure et le moment de courbure par le coefficient B ainsi que le twist et le moment de torsion par le coefficient C) permettent d'exprimer le moment en fonction de la ligne centrale du filament :

$$\mathbf{M} = B \mathbf{d}_3 \times \mathbf{d}'_3 + C u_3 \mathbf{d}_3. \quad (124)$$

En décomposant la force sur le repère cylindrique $\mathbf{F} = (F_r, F_\psi, F_z)$ et en utilisant les équations (123) et (124) nous trouvons :

$$F_r = \left(\frac{3B}{R} \sin \theta \cos \theta - \epsilon C u_3 \right) \theta' \quad (125)$$

$$C u_3' = 0 \quad (126)$$

$$\epsilon B \theta'' = -\cos \theta F_\psi + \epsilon \sin \theta F_z - \frac{C u_3}{R} \sin^2 \theta + \frac{\epsilon B}{R^2} \sin^3 \theta \cos \theta \quad (127)$$

Nous voyons donc que le twist u_3 est constant le long des brins. Par ailleurs la résultante \mathbf{p} sur le brin 1 est la somme des forces de contact (sans friction) provenant des 2 brins adjacents $\mathbf{p}_{21} + \mathbf{p}_{31}$ où :

$$\mathbf{p}_{21}(s) = p_{21}(s) \frac{\mathbf{r}_1(s) - \mathbf{r}_2(s_2)}{|\mathbf{r}_1(s) - \mathbf{r}_2(s_2)|}, \quad \mathbf{p}_{31}(s) = p_{31}(s) \frac{\mathbf{r}_1(s) - \mathbf{r}_3(s_3)}{|\mathbf{r}_1(s) - \mathbf{r}_3(s_3)|}, \quad (128)$$

avec $s_2 = xR - s$ et $s_3 = xR + s$. Utilisons les propriétés $\mathbf{r}_2 = \mathcal{R}_n \mathbf{r}_1$ et $\mathbf{r}_3 = \mathcal{R}_n^{-1} \mathbf{r}_1$ et posons $p_{21} = p_{31} =: p_1$ par symétrie. Il vient alors simplement que :

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_{21} + \mathbf{p}_{31} = \frac{R}{r} p_1 \left(1 - \cos \left(\frac{2\pi}{n} - x \sin \theta \right) \right) \mathbf{e}_r =: p \mathbf{e}_r. \quad (129)$$

Ceci nous permet d'écrire le développement de (122) sur les trois composantes comme :

$$F_r' = \frac{\epsilon F_\psi}{R} \sin \theta - p \quad \Rightarrow \quad p = \frac{\epsilon F_\psi}{R} \sin \theta - F_r' \quad (130)$$

$$F_\psi' = -\frac{\epsilon F_r}{R} \sin \theta \quad \Rightarrow \quad F_\psi = \frac{M_0}{nR} - \frac{\epsilon B}{R^2} \sin^3 \theta - \frac{C u_3}{R} \cos \theta, \quad (131)$$

$$F_z' = 0 \quad \Rightarrow \quad F_z = \frac{F_0}{n}. \quad (132)$$

où F_0 et M_0 sont des constantes d'intégration qui, une fois les facteurs n et R pris en compte, correspondent à la tension et au moment axiaux qui agissent de manière globale sur la torsade (et non individuellement sur chaque brin). L'angle θ étant considéré constant, nous avons $\theta' = 0$ et donc $F_r = 0$. Nous obtenons depuis (130) une expression explicite pour la résultante de la force de contact entre les brins :

$$p = -\frac{B}{R^3} \sin^4 \theta - \frac{\epsilon C u_3}{R^2} \sin \theta \cos \theta + \frac{\epsilon M_0}{nR^2} \sin \theta, \quad (133)$$

et depuis (127) l'équation d'équilibre de la torsade, reliant l'angle d'enroulement au twist et aux charges externes :

$$0 = 2nB \sin^3 \theta \cos \theta + \epsilon nRC r u_3 \cos 2\theta + R^2 F_0 \sin \theta - \epsilon RM_0 \cos \theta. \quad (134)$$

Une fois les contraintes externes F_0 et M_0 données, l'équation (134) a deux inconnues : u_3 et θ . Dans le cas où la torsade est partie intégrante d'un système où l'on connaît le twist u_3 , il suffit d'utiliser cette valeur et de résoudre (134) pour θ . Mais dans le cas où la torsade est seule, ses bords étant "fondus" ou serrés dans des attaches terminales (comme un câble), il est nécessaire d'introduire une équation supplémentaire (contrainte topologique par exemple [3]) pour trouver le point de fonctionnement du système.

4 Collagène

Le collagène est une protéine fibreuse qui constitue en masse 1/4 de toutes les protéines du corps humain. Au contraire des filaments d'actine (muscles) et des filaments intermédiaires (ongles), le collagène est un filament extra-cellulaire. En effet les cordes de collagène forment une matrice qui supporte les cellules (cartilages, os). L'unité de base du collagène est une hélice triple : le tropocollagène.

Chacun des brins compte 1050 résidus. Le long d'un brin, un résidu sur trois est une glycine. Ces résidus participent aux liaisons hydrogène entre les brins, liaisons nécessaires pour assurer la cohésion de la triple hélice : les liaisons hydrogène vont empêcher le trio torsadé de perdre son twist. Ainsi u_3 a une valeur fixée même si aucune "pince" ne vient tenir les brins à leurs extrémités. Les autres actions mécaniques de ces liaisons hydrogènes ne sont pas prise en compte dans le modèle; la résultante \mathbf{p} , liée à l'encombrement stérique, sera positive. Les brins sont synthétisés dans le réticulum endoplasmique rugueux de la cellule. Ils sont enroulés selon une hélice primitive gauche de 3,33 résidus par tour. Le pas est de 2,86 Å par résidus et le rayon des C_α de 1,5 Å (ce rayon n'est pas le rayon r lié à l'encombrement stérique). Par groupe de trois, ces hélices primitives sont ensuite sur-enroulées en une triple hélice de rayon de 2,8 Å. Un tour de sur-enroulement correspond à un pas de 85,5 Å. Ces données ont été obtenues par diffraction au rayons X [4]. La formation de la triple hélice se faisant sans contrainte externe : $F_0 = M_0 = 0$, l'équation (134) devient :

$$\epsilon\gamma u_3 = -\frac{2\sin^3\theta\cos\theta}{R\cos 2\theta} \quad (135)$$

Nous obtenons l'angle d'enroulement grâce à la valeur du pas : $\Delta_z = 2\pi R/\tan\theta = 85,5$ Å. Ce qui donne

$$\theta = 0,202933 \text{ rad} \quad (136)$$

L'équilibre mécanique impose donc que

$$\gamma u_3 = -0,0062 \text{ rad}/\text{Å} \quad (137)$$

D'autre part la valeur du twist est aussi dépendante d'une contrainte géométrique : le twist u_3 , le twist interne ϕ' (aussi appelé twist de Love [5]) et la torsion de Frenet sont reliés par l'équation [6]:

$$u_3 = \phi' + \psi' \cos\theta = \phi' + \frac{\epsilon \sin 2\theta}{2R}. \quad (138)$$

Il nous faut maintenant trouver ϕ' . Remarquons d'abord que les résidus de Glycine, de par leur participation aux liaisons hydrogènes et compte tenu de leur faible encombrement stérique, sont tous tournés vers l'intérieur de la triple hélice. Si nous paramétrisons la ligne reliant les résidus de glycine par

$$\mathbf{d}_{Gly} = \cos(\hat{\tau}s)\mathbf{d}_1 + \sin(\hat{\tau}s)\mathbf{d}_2 \quad (139)$$

et que nous imposons que cette ligne n'ait pas de composante suivant \mathbf{e}_3 et que sa projection sur $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ soit égale à la propre projection de $-\mathbf{r}(s)/R$, nous voyons que cette condition s'écrit : $\hat{\tau} = -\phi'$. Il suffit donc de trouver la valeur $\hat{\tau}$ du twist de la ligne reliant les résidus de glycine dans une configuration connue e.g. celle en hélice primitive gauche. La présence de 3,33 résidus par tour implique un décalage positif de $\frac{\pi}{5}$ radians du $(n+1)^{ieme}$ résidu de Glycine par rapport au n^{ieme} (voir fig. 2). Etant donné le pas de 2,86 Å par résidus, le twist $\hat{\tau} = 0,0732 \text{ rad}/\text{Å}$. Insérons cette valeur dans la formule (138)

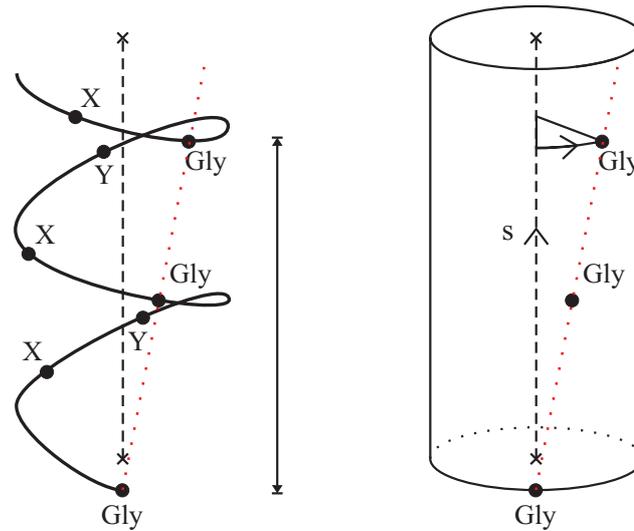


FIG. 2 – *A gauche, schéma de l'hélice primitive gauche : le résidus de Glycine sont décalés vers la droite. A droite : l'hélice primitive est considérée comme un filament plein : la ligne reliant les résidus de glycine a un twist positif. primitive gauche.*

avec $\epsilon = +1$ (superhélice droite) et θ donné par (136) pour trouver que les contraintes géométriques nécessitent

$$u_3 = -0,0027 \text{ rad}/\text{\AA}. \quad (140)$$

Les deux formules (137) et (140) nous permettent de donner une estimation du rapport γ de la rigidité de torsion à la rigidité de courbure pour l'hélice primitive : $\gamma = 2,3$. Cette grande valeur (silicone : $\gamma = 0,67$ / métal : $\gamma = 0,75$ / A.D.N. : $\gamma \simeq 1,5$) vient du fait que l'hélice primitive, lorsque considérée comme un filament plein, est beaucoup plus facile à courber qu'à tordre.

5 Conclusion

Nous avons montré comment un simple modèle mécanique de câble à 3 brins ouvre la voie à l'étude de la mécanique des protéines fibreuses et en particulier du collagène. Néanmoins plusieurs améliorations ou extensions sont nécessaires pour arriver à un modèle mécanique global des fibres de collagène : la prise en compte réelle des liaisons hydrogènes, mais aussi et surtout l'assemblage hiérarchique à plusieurs niveaux des fibrilles et autres fibres.

Références

- [1] E. H. Dill, *Archive for History of Exact Sciences* **44**, 1 (1992).
- [2] S. S. Antman, *Nonlinear Problems of Elasticity*, Springer-Verlag, New York, 1995.
- [3] S. Neukirch and G. van der Heijden, (2002), pre-print.
- [4] K. Beck and B. Brodsky, *Journal of Structural Biology* **122**, 17 (1998).
- [5] J. Alexander and S. S. Antman, *Quarterly of Applied Mathematics*, 83 (1982).
- [6] G. H. M. van der Heijden and J. M. T. Thompson, *Nonlinear Dynamics* **21**, 71 (2000).

Sources et puits dans les regimes absolument/convectivement instables

L. Pastur^a, M.T. Westra^b, W. van de Water^b^a*Istituto Nazionale di Ottica, Largo E. Fermi 6, 50125 Firenze, Italie.*^b*Eindhoven University of Technology, Fluid Dynamics Laboratory, P.O. Box 513, 5600 MB Eindhoven, Pays-Bas.*

pastur@ino.it

Résumé

Nous avons étudié le comportement dynamique de *structures cohérentes* (e.g. sources et puits) dans une expérience d'ondes progressives non-linéaires excitées à la surface libre d'un fluide chauffé par un fil immergé. Nous avons mis en évidence un changement qualitatif des propriétés des sources pour une valeur critique du paramètre de contrôle, associée à une transition *convective* \rightarrow *absolue* de l'instabilité. Le comportement observé des sources est en remarquable accord avec de récentes prédictions théoriques formulées dans le cadre d'un formalisme d'enveloppe, tandis que les propriétés des puits — dominées par des processus non-adiabatiques — sont hors du champ d'application de la théorie.

1 Introduction

La dynamique d'ondes progressives quasi-1D supercritiques faiblement non-linéaires peut en général être décrite au seuil par un système d'équations couplées de Ginzburg-Landau complexes [1]:

$$\begin{aligned} \tau_0(\partial_t A_{L,R} \pm s_0 \partial_x A_{L,R}) &= \epsilon A_{L,R} + \xi_0^2 (1 + ic_1) \partial_x^2 A_{L,R} \\ &- g_0 (1 - ic_3) |A_{L,R}|^2 A_{L,R} - g_2 (1 - ic_2) |A_{R,L}|^2 A_{L,R}, \end{aligned} \quad (141)$$

où $A_{G,D}$ représentent respectivement les enveloppes des modes critiques “gauche” et “droit” $e^{i(\omega_0 t \pm k_0 x)}$. Ces equations ont pour solutions des structures spatialement localisées, qui se propagent à vitesse constante sans se disperser (*structures cohérentes*) [3, 8, 13]. Parmi celles-ci, les *sources* émettent des ondes sortantes, et les *puits* annihilent des ondes entrantes (nous intéressent ici le cas dit *régulier*, dans lequel les vitesses de phase et de groupe sont de même signe.)

L'instabilité est contrôlée par ϵ . A $\epsilon = 0$, l'état uniforme est *convectivement instable* vis-à-vis d'une perturbation à $(\omega, k) \approx (\omega_0, k_0)$, qui se développe en se propageant à la vitesse de groupe s [4]. La transition devient *absolument instable* (la perturbation se développe là où elle est excitée), lorsque:

$$\epsilon = \epsilon_{abs} = \frac{(s_0 \tau_0)^2}{4 \xi_0^2 (1 + c_1^2)} > 0. \quad (142)$$

Les propriétés des sources et des puits dépendent du régime de l'instabilité [3]:

- Pour $\epsilon > \epsilon_{abs}$ (régime absolument instable), les sources seraient stables, avec une extension spatiale fixe à contrainte fixe, variant en $w \sim (\epsilon - \tilde{\epsilon})^{-1}$, $\tilde{\epsilon} < \epsilon_{abs}$, mais divergeant en $w \sim (\epsilon - \epsilon_{abs})^{-1/2}$ lorsque $\epsilon \rightarrow \epsilon_{abs}^+$.

- Pour $0 < \epsilon < \epsilon_{abs}$ (régime convectivement instable), les sources développeraient une instabilité de coeur [2, 3], qui se traduirait par une fluctuation erratique de w au cours du temps, avec une valeur moyenne qui varierait en $\langle w \rangle \sim \epsilon^{-1}$.
- Les puits quant à eux seraient toujours stables, avec une extension spatiale variant en ϵ^{-1} pour tout $\epsilon > 0$.

A notre connaissance les sources et puits ont toujours été étudiés expérimentalement dans le régime absolument instable [5, 6]. Dans notre expérience, nous avons été capables d'observer la transition entre les régimes absolument et convectivement instables, et d'en étudier pour la première fois les conséquences sur les propriétés des sources et des puits.

2 Le dispositif expérimental

Le système à l'étude est la surface libre d'un fluide [7], chauffée par un fil résistif (diamètre 0.2 mm, résistivité $50 \Omega \cdot \text{m}^{-1}$) immergé à une profondeur $h = 2 \text{ mm}$ ((1) sur la Fig. 1), qui délivre une puissance électrique permanente Q . Au-delà d'une valeur critique $Q_c \sim 3 \text{ W}$, la surface se déstabilise au profit d'ondes progressives (hydrothermales) supercritiques localisées au-dessus, et se propageant dans la direction du fil (ondes quasi-1D; longueur d'onde $\lambda \sim 2 \text{ cm}$ contre $L = 2 \text{ m}$ longueur du fil — rapport d'aspect ~ 100 —, période $T \sim 10 \text{ s}$) [10, 11]. Le paramètre de contrôle $\epsilon = Q/Q_c - 1$ est maintenu constant à l'aide d'une boucle de rétro-action. Le principe de l'expérience est illustré sur la Fig.1.

La pente locale de la surface, déformée par le passage de l'onde, est détectée par la réflexion d'un faisceau laser sur un détecteur de position (Fig. 1, (3)). Le profil de la surface est ensuite réalisé en déplaçant le système laser-détecteur dans la direction du fil à une vitesse constante $v_{obs} \sim 300 \text{ mm/s}$ (décalage Doppler $\sim 7\%$) (Fig. 1 (2, 4)).

De la mesure des coefficients de l'équation (1) nous estimons $\epsilon_{abs} \sim 0.14$ [11].

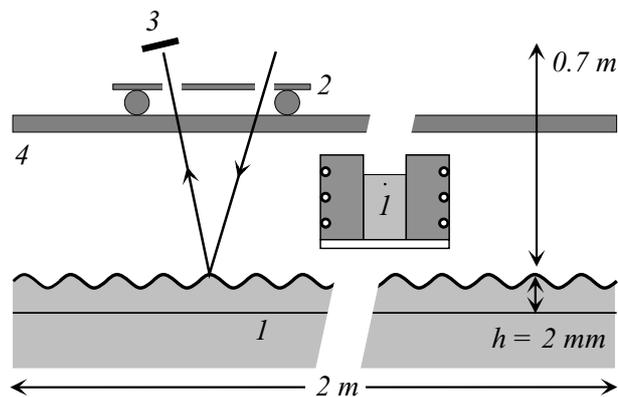


FIG. 1 – Principe de l'expérience (voir texte pour le détail).

3 Sources

Les propriétés des sources dans notre expérience dépendent de façon critique du paramètre de contrôle.

- Lorsque $\epsilon > 0.15$, les sources sont stables (Fig. 2.b,d), stationnaires ou non. Leur extension spatiale w est unique et bien définie à ϵ fixé, et évolue en $(\epsilon - \epsilon_a)^{-1/2}$, avec $\epsilon_a \sim 0.14$ — qui est la valeur attendue pour ϵ_{abs} (Fig. 2.a).
- Lorsque $\epsilon < 0.15$, le régime est convectivement instable (révélé par la direction commune de croissance de fronts de domaines d'onde spontanément excités au seuil). Les sources développent une instabilité de coeur: leur extension spatiale fluctue au cours du temps à ϵ fixé (Fig. 2.b), et s'accompagne de l'émission cyclique (non périodique) de structures de type *trou* (cf. plus loin) (Fig. 2.c). La largeur moyenne des sources varie en $\langle w \rangle \sim \epsilon^{-1}$, comme prédit théoriquement (Fig. 2.a).

A ce point, l'accord entre théorie et expérience est complet. Des simulations numériques sur l'équation (1) utilisant les coefficients expérimentaux ont également pu reproduire le processus d'émission de trous par les sources instables [12].

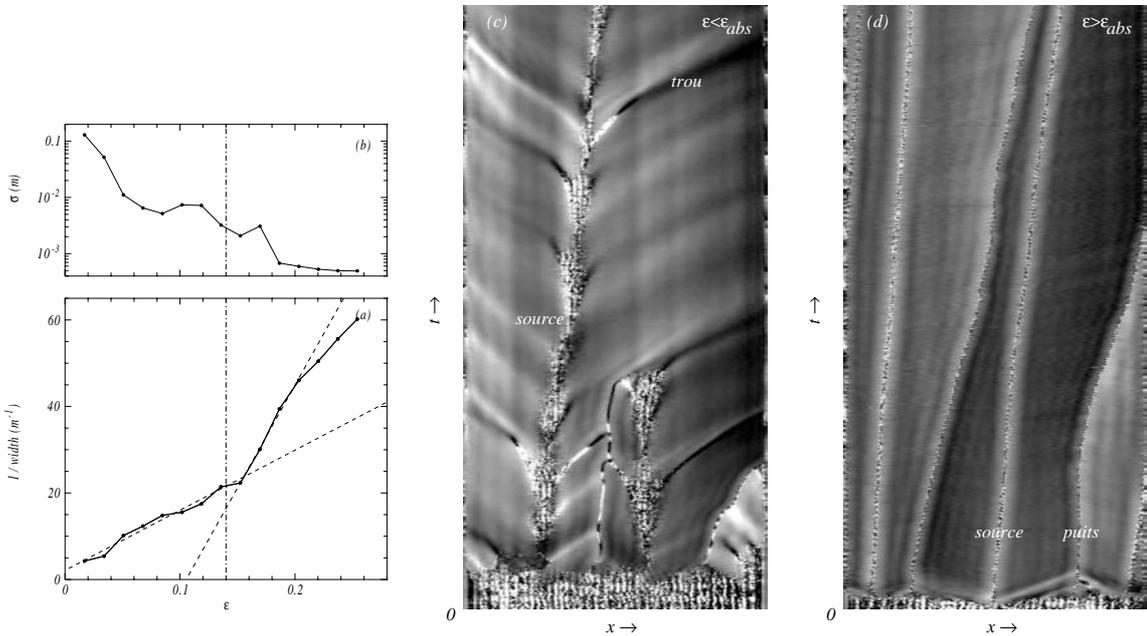


FIG. 2 – (a) inverse de la valeur moyenne de la largeur des sources en fonction de ϵ : points expérimentaux reliés en traits gras et régressions linéaires en pointillés. Ligne verticale à $\epsilon_{abs} = 0.14$. (b) Ecart-type de la largeur des sources en fonction de ϵ . (c,d) Diagrammes espace-temps dans les régimes convectif (c) et absolu (d). Les 256 niveaux de gris codent le champ du nombre-d'onde.

4 Puits

Les puits sont stables $\forall \epsilon > 0$ et leur extension spatiale, de l'ordre de λ , est quasi-indépendante de ϵ . Leur dynamique est dominée par des effets *non-adiabatiques*, tel que l'ajustement des phases des ondes entrantes (Fig. 3). Ce processus, qui implique des échelles de temps rapides, est par construction absent des équations d'enveloppe, qui reposent sur le découplage des différentes échelles d'espace et de temps. Les puits sont ainsi complètement hors du champ théorique de (1), et en contredisent les prédictions.

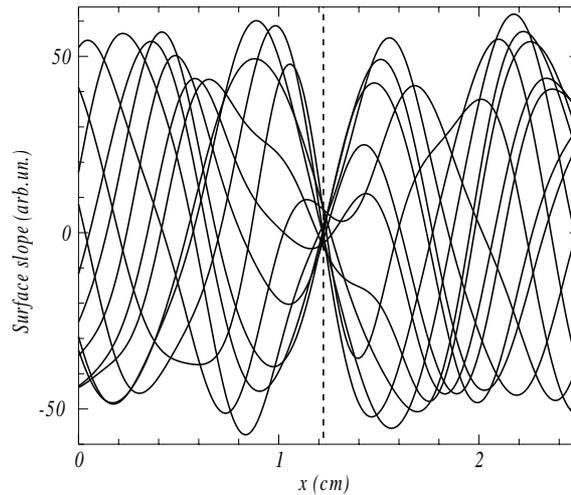


FIG. 3 – Ajustement de phase au coeur du puits, révélé par la superposition de plusieurs profils de surface.

5 Trous

Différents types de structures “trou” ont été observés dans cette expérience. Une première famille de *trous hétéroclines* est engendrée par l’annihilation d’une source et d’un puits. Ces trous pourraient être du type “Nozaki-Bekki”, mais une étude plus approfondie de leurs propriétés est nécessaire [13]. Les trous de la seconde famille sont émis par les sources instables, ou peuvent être spontanément excités à partir d’un domaine d’onde saturé. Ils sont caractérisés par des amplitudes et des nombres d’onde égaux (aux incertitudes expérimentales près) de part et d’autre du trou, ou légèrement différents, mais la différence est alors indépendante de la dépression d’amplitude. Leur vitesse est de l’ordre de la vitesse de groupe s lorsque la dépression d’amplitude est accompagnée d’une compression locale du nombre d’onde (trous de compression), les trous de dilatation se propageant plus rapidement que s . Ces trous, créés dans des conditions initiales aléatoires, évoluent vers un “attracteur” commun à un-paramètre libre (Fig. 4). Ils sont asymptotiquement instables. Des *trous homoclines* aux propriétés très semblables ont été découverts comme solutions numériques de l’équation (1) — avec cette différence que les trous de dilatation y sont “lents” ($v_{trou} < s$) et les trous de compression “rapides” ($v_{trou} > s$) [14].

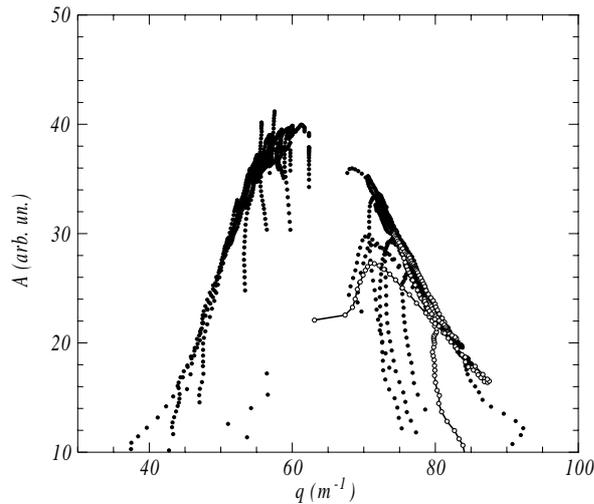


FIG. 4 – Minimum d’amplitude de trous en fonction de l’extrema du nombre d’onde au coeur du trou. Les différentes trajectoires de points correspondent à l’évolution au cours du temps de trous engendrés dans des conditions initiales différentes. Elles convergent vers un “attracteur” de forme parabolique, qui suggère l’existence d’une famille de solutions à 1-paramètre.

6 Régimes convectif et absolu

Dans l’expérience d’ondes hydrothermales décrite dans [6], la largeur des sources — situées à l’une des extrémités de la cellule — varie comme $w \sim \ln(\epsilon - \epsilon_a)$, où $\epsilon_a \neq 0$ est le ϵ critique pour lequel le mode global se développe. Ce résultat — combiné à d’autres résultats expérimentaux — serait la signature d’une transition non-linéaire absolument instable vers le mode global à $\epsilon_a = \epsilon_{abs}$ [15], mais aucune structure d’onde n’a pu être observée dans le régime convectif $0 < \epsilon < \epsilon_{abs}$ — les dimensions du système étant probablement trop petites et les réflexions sur les bords ne permettant pas d’entretenir la croissance du mode convectivement instable [16]. Vince & Dubois ont établi une divergence en ϵ^{-1} pour la largeur des sources [10], mais le changement de loi d’échelle à ϵ_{abs} et la transition aux sources instables — caractéristiques du régime convectif — n’a pas été observé. Le mode convectivement instable a pu néanmoins être transitoirement excité en perturbant le système sous ϵ_{abs} , mais ce mode n’a jamais pu être engendré spontanément et entretenu dans le système.

A notre connaissance, l’étude décrite ici est la première à rendre compte d’une transition (primaire) entre les régimes convectif et absolu dans une expérience d’ondes progressives, avec un net recouvrement des deux régimes à $\epsilon \sim \epsilon_{abs}$. Une étude très intéressante serait de suivre l’effet d’un confinement croissant sur la transition, et la façon dont la loi d’échelle de la largeur des sources s’en trouve modifiée.

7 Conclusion

L'accord entre théorie et expérience sur les propriétés des sources est remarquable. Il est étonnant dans ces conditions que les puits, dominés par des effets non-adiabatiques, échappent complètement au cadre théorique des équations d'amplitude. Cette dissymétrie source/puits n'est pas expliquée, mais pourrait provenir du terme convectif dans (1), qui viole la consistance de l'équation ($s_0 \sim \mathcal{O}(\epsilon^0)$) [2].

Références

- [1] M.C. Cross, P.C. Hohenberg, *Rev. Mod. Phys.* **65** (1993) 851.
- [2] P. Couillet, T. Frisch, F. Plaza, *Physica D* **62** (1993) 75.
- [3] M. van Hecke, C. Storm, W. van Saarloos, *Physica D* **134** (1999) 1.
- [4] A. Couairon, J.M. Chomaz, *Physica D* **132** (1999) 1.
- [5] A. Joets, R. Ribotta, *Phys. Rev. Lett.* **60**, 2164 (1988); M. Rabaud, S. Michalland, Y. Couder, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 184 (1990); A. Joets, R. Ribotta, *J. Stat. Phys.* **64**, 981 (1991); P. Bot, I. Mutabazi, *Eur. Phys. J. B* **46**, 6452 (1992); L. Pan, J.R. de Bruyn, *Phys. Rev. E* **49**, 2119 (1994); P. Habdas, M.J. Case, R. de Bruyn, *Phys. Rev. E* **63** (2001) 066305.
- [6] N. Garnier, A. Chiffaudel, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 75 (2001); N. Garnier, A. Chiffaudel, F. Daviaud, à paraître dans *Physica D*.
- [7] Huile silicone Tegiloxan 3 (Goldschmidt AG, Essen, Allemagne), dont les propriétés à 21°C sont: viscosité $\nu = 3.397 \cdot 10^{-6} \text{ m s}^{-2}$, densité $\rho = 892.4 \text{ kg m}^{-3}$, tension superficielle $\alpha = 18.3 \cdot 10^{-3} \text{ J m}^{-2}$, indice de réfraction $n = 1.395$.
- [8] G.T. Dee, W. van Saarloos, *Phys. Rev. Lett.* **60** (1988) 2641; W. van Saarloos, *Phys. Rev. A* **37** (1988) 211; W. van Saarloos, *Phys. Rev. A* **39** (1989) 6367; W. van Saarloos, P.C. Hohenberg, *Phys. Rev. Lett.* **64** (1990) 749.
- [9] M. Dubois, F. Daviaud, O. Ronsin, P. Berge, *Physica D* **61** (1992) 140.
- [10] J.M. Vince, M. Dubois, *Europhys. Lett.* **20** (1992) 505.
- [11] L.Pastur, M.T. Westra, W. van de Water, à paraître dans *Physica D*.
- [12] L. Pastur, M.T. Westra, W. van de Water, M. van Hecke, W. van Saarloos, soumis à *Phys. Rev. Lett.*.
- [13] K. Nozaki, N. Bekki, *J. Phys. Soc. Japan* **53** (1984) 1581; K. Nozaki, N. Bekki, *Phys. Lett. A* **102** (1984) 383; N. Bekki, K. Nozaki, *Phys. Lett. A* **110** (1985) 133.
- [14] M. van Hecke, *Phys. Rev. Lett.* **80** 1896 (1998).
- [15] J.M. Chomaz, A. Couairon, *Phys. Fluid* **11** (1999) 2977.
- [16] M.C. Cross, *Phys. Rev. A* **38** (1988) 3593.

Influence des surfactants sur la réorientation optique des cristaux liquides nématiques dopés par les colorants

A. Petrosyan (*) et S. Residori

Institut Non Linéaire de Nice

1361, Route des Lucioles, 06560 Sophia Antipolis

() Université d'Etat de Erevan, 1 rue Manoukian, 375049 Erevan, Arménie*

`residori@inln.cnrs.fr`

Résumé

Nous montrons qu'une grande non-linéarité optique est obtenue pour une intensité lumineuse extrêmement faible (de l'ordre de quelques dizaines de $\mu W/cm^2$) dans un cristal liquide nématique dopé par des colorants. Cette grande sensibilité du film nématique est due à l'action combinée des colorants et du surfactant utilisé comme agent d'ancrage.

1 Introduction

Parmi les différents milieux optiquement non linéaires, les cristaux liquides possèdent des propriétés très intéressantes telles qu'une grande biréfringence et sélectivité optique. La réorientation d'un cristal liquide nématique (CLN) par la lumière, dite transition de Freedericksz optique, a été étudiée en détail au cours des 20 dernières années [1]. La réorientation des molécules d'un CLN sous l'action de la lumière, commence généralement dans le volume de la cellule [2]. Des non-linéarités géantes ont été observées pour un choix approprié de la polarisation de la lumière et du directeur \vec{n} du CLN. Très récemment, des non-linéarités encore plus importantes ont été mises en évidence pour des CLN dopés avec des colorants. Ceux-ci possèdent non seulement une plus grande facilité de réorientation, comme il a été observé par Janossy [3], mais aussi des propriétés diverses comme la réorientation induite par la surface [4, 5, 6], phénomène qui est également lié à l'isomérisation trans-cis des molécules azo-dyes de colorants [7] et aux propriétés photoréfractives dues à la modulation de charge spatiale [8]. Des observations ultérieures effectuées par Khoo ont montré une sensibilité extrêmement grande pour un mélange particulier: une petite concentration ($< 1\%$) de Rouge de Methyl(MR) dans 5CB [9]. Dans ce cas des intensités lumineuses aussi faibles que $50 \mu W/cm^2$ peuvent moduler l'orientation du directeur. Cela a été interprété comme un effet photoréfractif qui est induit par le champ de charge spatiale en combinaison avec un champ appliqué.

Nous avons étudié l'interface entre le film de cristal liquide et les parois de la cellule et nous avons montré que l'effet photoréfractif est en fait fortement lié au type d'agent d'ancrage utilisé [6].

2 Description de l'expérience

Dans nos expériences, les cellules homéotropes ont une épaisseur de $10 \mu m$ et sont remplies avec du pentyl-cyanobiphényle (5CB) dopé par 0.3 % Rouge de Méthyl (MR). Nous avons utilisé différents types d'agents d'ancrage homéotropes, entre autres de la Lécithine d'œuf,

un polymère de Nissan Chemicals et des surfactants comme l'hexadécyltriméthylammonium bromure (HTAB) et chlorure (HTAC). Avec tous ces agents, nous observons un effet photovoltaïque, mais ce n'est que dans les cellules traitées avec HTAB ou HTAC que nous observons une réorientation optique extrêmement grande et qui dépend fortement de la polarisation de la lumière incidente.

La réorientation du film nématique est mise en évidence par des expériences optiques utilisant deux faisceaux pompes et un faisceau sonde. La cellule de cristaux liquides est éclairée par les franges d'interférences de deux faisceaux provenant d'un laser Ar^+ polarisé linéairement. Le faisceau sonde est engendré par un laser He-Ne de faible puissance.

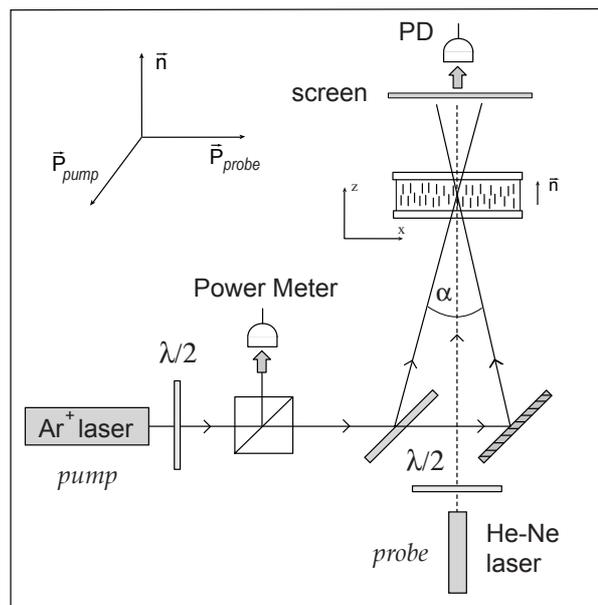


FIG. 1 – Montage expérimental (PD: photodiode).

3 Résultats expérimentaux et discussion.

Les cellules traitées avec HTAB ou HTAC montrent une grande efficacité de diffraction (jusqu'à six ordres dans la figure de diffraction) pour une très faible intensité lumineuse de la pompe ($I_{total} \simeq 100 \mu W/cm^2$). Une figure de diffraction typique est montrée dans la Fig.2 pour une intensité lumineuse de $250 \mu W/cm^2$. Nous avons testé deux géométries différentes, c'est à dire polarisation de pompe verticale et horizontale. Dans tous les cas la diffraction maximale s'obtient quand la polarisation de la sonde est orthogonale à celle des faisceaux de pompe. La Fig.2 montre l'efficacité de diffraction du premier ordre mesurée dans ce cas et pour la géométrie de pompe verticale. Si on utilise l'expression usuelle de la littérature [9], la variation d'indice de réfraction s'exprime sous la forme $\Delta n = n_2 I_{input}$ et nous pouvons estimer le coefficient n_2 à partir de l'expression pour l'efficacité de diffraction du premier ordre pour le régime de Raman-Nath, c'est à dire $\eta \simeq (\pi \Delta n d / \lambda)^2$. Si on substitue $\eta = 0.40$ pour $I_{input} = 100 \mu W/cm^2$, $\lambda = 0.632$ et $d = 10 \mu m$, on obtient $\Delta n \simeq 1.0 \times 10^{-2}$ et donc $n_2 \simeq 100 cm^2/W$, ce qui est un coefficient nonlinéaire très élevé. Les temps de réponse typiques sont de l'ordre de 20 secondes, comme on peut le constater Fig.3. Dans toute la plage de faibles intensités lumineuses utilisées dans nos expériences,

nous n'observons pas d'auto-diffraction de la pompe. Par contre, celle-ci apparaît pour des intensités plus élevées ou bien dans le transitoire qui caractérise le passage d'une géométrie à l'autre. L'apparition de ce phénomène transitoire est une preuve que dans tous les cas, la réorientation se produit d'abord dans le plan orthogonal à la polarisation de la pompe.

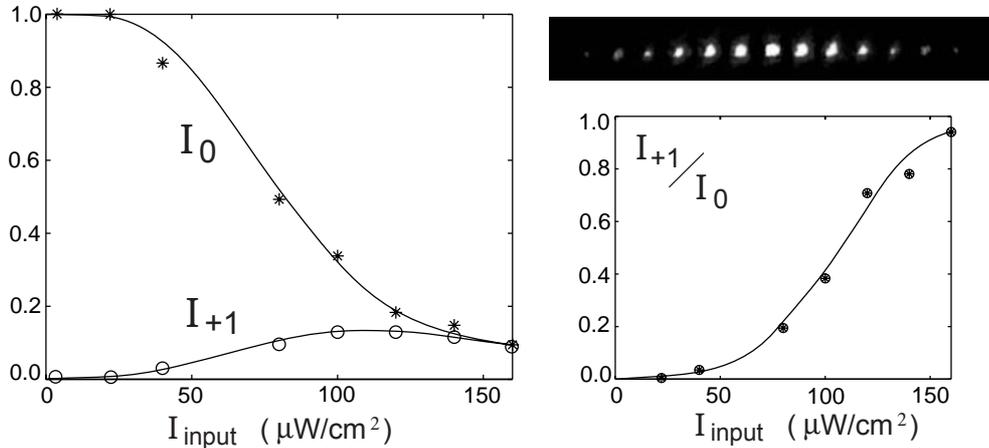


FIG. 2 – Figure de diffraction et efficacité de diffraction. I_0 and I_{+1} sont les intensités mesurées respectivement à l'ordre 0 et +1. Ces valeurs sont normalisées par l'intensité totale du faisceau de test.

Nos résultats sont en accord avec les résultats reportés dans [4, 5, 6] et avec la conjecture que la réorientation du cristal liquide a son origine dans la modulation de charge près de la surface. La tension induite par la lumière est de l'ordre de 10 millivolts pour $I_{input} = 2 \text{ mW/cm}^2$.

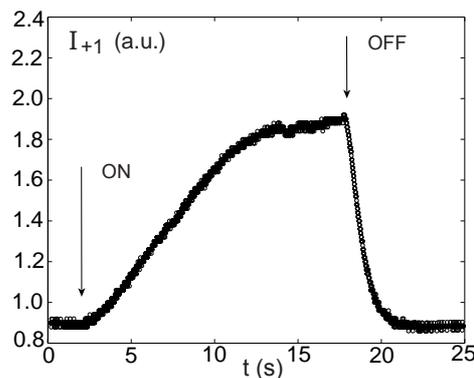


FIG. 3 – Réponse temporelle d'une cellule préparée par déposition de HTAB; les faisceaux d'écriture sont allumés (ON) et éteints (OFF).

Comme il l'a déjà été noté [5], le champ électrique associé est trop faible pour produire une réorientation du directeur, en particulier pour les faibles intensités que nous utilisons. Par contre, près de la surface de ITO la concentration des ions peut être influencée par ce champ photo-induit et l'orientation d'ancrage dépend de la concentration des ions près de la couche de surfactants [6]. Comme les ions sont attirés ou repoussés par l'action

du laser, une des surfaces induit la réorientation et l'autre stabilise le processus. Cela explique pourquoi nos observations sont toujours liées à la présence du surfactant qui, en association avec l'action du champ photo-induit dû à la présence de colorants, donne lieu à une réorientation qui commence près de la surface et se propage ensuite dans le volume. Aussi, nous avons fait des expériences avec un seul faisceau de pompe et en incidence normale. Le faisceau sonde est polarisé soit parallèle, soit orthogonal à la pompe, et analysé à l'aide d'un polariseur croisé après son passage dans la cellule. Le faisceau pompe a une intensité $I_{input} = 1 \text{ mW/cm}^2$ et il est bloqué par un filtre après son passage dans la cellule. Quand le faisceau pompe passe dans la cellule on observe sur la photo-diode un signal qui augmente, avec un temps de réponse de l'ordre de quelques centaines de secondes. Ces observations montrent que la réorientation du cristal liquide a lieu même en absence du réseau et qu'elle est principalement due à la réorientation locale près de la surface en association avec les autres mécanismes décrits dans la référence [9].

L'extrême sensibilité des cellules traitées avec HTAB or HTAC est à chercher dans l'action de la tension photovoltaïque induite sur la couche de surfactants. En fait, les surfactants sont des agents cationiques capables d'augmenter la réponse au champ photovoltaïque et de favoriser la transition de conformation des molécules de colorant. Cela engendre un mécanisme de réorientation qui débute à l'interface entre le cristal liquide et la couche des molécules d'ancrage.

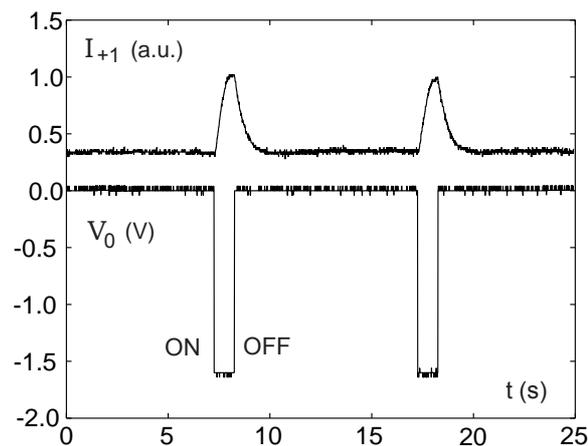


FIG. 4 – Réponse temporelle d'une cellule mixte; la tension V_0 appliquée est allumée et éteinte aux positions on et off.

Pour tester nos conjectures, nous avons aussi réalisé une cellule mixte, avec une paroi traitée HTAC et l'autre paroi traitée Lécithine. Dans le cas d'une épaisseur $10 \mu\text{m}$, l'intensité de seuil pour l'apparition de la diffraction augmente jusqu'à quelques mW/cm^2 . Pour cette raison nous avons diminué la concentration de MR à 0.05% pour éviter les effets thermiques et nous avons augmenté l'épaisseur de la cellule jusqu'à $50 \mu\text{m}$ pour assurer une complète decorrélation entre les deux surfaces de la cellule. Sans tension appliquée cette cellule mixte ne montre pas d'effet. Nous observons la diffraction seulement en présence d'un champ statique appliqué (1.6 V) et pour incidence oblique (angle d'incidence $\simeq 22.5^\circ$), avec une efficacité $\eta \simeq 0.1$. Aussi la polarité de la tension appliquée doit être négative sur le côté HTAC si la lumière arrive du côté HTAC. Si les faisceaux d'écriture arrivent du côté Lécithine, la polarité doit être renversée. Pour 2 V appliqués,

l'efficacité de diffraction augmente jusqu'à $\eta \geq 0.3$ et le réseau devient permanent. Il est possible d'effacer le réseau en coupant la tension. On montre Fig.4 une réponse typique de la cellule mixte quand on applique une série d'impulsions négatives d'amplitude 1.6 V. Le temps de montée est approximativement 250 ms, qui est le temps typique pour la réorientation du directeur.

D'un point de vue phénoménologique, on peut rendre compte de la dépendance du réseau de diffraction en fonction de la polarité du champ appliqué en introduisant dans l'expression de l'énergie libre du cristal liquide un terme lié à la présence de la tension photo-induite. Ce terme est de la forme $\mathbf{P}_s \cdot \mathbf{E}_{ph}$, où \mathbf{P}_s est la polarisation de la surface et \mathbf{E}_{ph} est la tension photo-induite. Comme le vecteur \mathbf{P}_s est dirigé normalement à la surface d'ITO et vers l'intérieur de la cellule, le produit $\mathbf{P}_s \cdot \mathbf{E}_{ph}$ donne lieu à une réduction du couplage sur un côté de la cellule et à une augmentation de la force d'ancrage sur l'autre côté [16].

4 Conclusion

Nous avons montré que l'extrême sensibilité d'un film nématique homéotrope et dopé par des colorants est due à la présence d'un surfactant ionique sur les parois de la cellule. La réorientation du cristal liquide commence sur la surface grâce à l'action de la tension photo-induite sur la concentration des ions. Une fois qu'elle est déclenchée sur la surface, la réorientation se propage ensuite dans le volume. Le réseau de diffraction qui en résulte montre une très grande efficacité de diffraction.

Nous avons aussi réalisé une cellule mixte qui peut être contrôlée soit par une faible tension continue (1 V), soit par la lumière. Ce nouveau type de cellule se comporte comme un interrupteur à la fois optique et électrique, ce qui est également très intéressant du point de vue des applications.

Références

- [1] I.C. Khoo, *Liquid Crystals: Physical Properties and Nonlinear Optical Phenomena* (Wiley Interscience, New York, 1994).
- [2] N.V. Tabiryan, A.V. Sukhov and V.Y. Zeldovich, *Mol. Cryst. Liq. Cryst.* 136, 1 (1986).
- [3] I. Janossy and A.D. Lloyd, *Mol. Cryst. Liq. Cryst.* 203, 77 (1991).
- [4] A. G.-S. Chen and D. Brady, *Opt. Lett.* 17, 1231 (1992).
- [5] F. Simoni, L. Lucchetti, D.E. Lucchetta and O. Francescangeli, *Optics Express* 9, 85 (2001).
- [6] V.G. Nazarenko, V.M. Pergamenshchik, O.V. Koval'chuk, A.B. Nych and B.I. Lev, *Phys. Rev. E*, 60, 5580 (1999).
- [7] W.M. Gibbons, Paul J. Shannon, Shao-Tang Sun and B.J. Swetlin, *Nature*, 351, 49 (1991); Shao-Tang Sun, W.M. Gibbons and Paul J. Shannon, *Liquid Crystals* 12, 869 (1992).
- [8] E.V. Rudenko and A.V. Sukhov, *JETP* 78, 875 (1994); E.V. Rudenko and A.V. Sukhov, *JETP Lett.* 59, 143 (1994).
- [9] I.C. Khoo, S. Slussarenko, B.D. Guenther, M.-Y. Shih, P. Chen and W.V. Wood, *Opt. Lett.* 23, 253 (1998); I.C. Khoo, M.V. Wood, M.Y. Shih and P.H. Chen, *Optics Express* 11, 432 (1999).

- [10] A. Petrosyan, S. Residori, *Surfactant Enhanced Reorientation in Dye-Doped Nematic Liquid Crystals*, submitted to Opt. Lett., 2002.
- [11] J.E. Proust, L.T.-M. Saraga and E. Guyon, Solid State Commun. 11, 1227 (1972).
- [12] J.Zhang, V. Ostroverkhov, K.D. Singer, V. Reshetnyak and Yu. Reznikov, Opt. Lett. 25, 414 (2000).
- [13] J. Cognard, Mol. Cryst. Liq. Cryst. Suppl. Series, 1, 1-78 (1982).
- [14] D.M. Taylor and G.F. Bayes, Phys. Rev. E, 49, 1439 (1994).
- [15] T. Uchida, H. Watanabe and M. Wada, Jap. J. of Appl. Phys. 11, 1559 (1972).
- [16] U. Kühnau, A.G. Petrov, G. Klose and H. Schmiedel, Phys. Rev. E 59, 578 (1999).

Analyse des régimes d'intermittence spatio-temporelle à la périphérie d'une colonne de plasma en champ magnétique.

M. Matsukuma, Th. Pierre, A. Escarguel, G. Leclert, D. Guyomarc'h,
F. Brochard[†], et E. Gravier[†]

Laboratoire PIIM, Université de Provence, 13397 Marseille Cedex 20

[†]*Laboratoire PMIA, Université Henri Poincaré, BP 239, 54506 Vandoeuvre cedex*
tpierre@up.univ-mrs.fr

Résumé

Nous avons étudié les régimes d'intermittence que l'on observe sur le bord d'une colonne droite de plasma soumise à un champ magnétique. Dans un premier temps, les régimes réguliers sont étudiés et une analyse spatio-temporelle met en évidence une structure spirale qui se développe autour de la colonne. L'analyse linéaire du système s'appuie sur les dérives des particules induites par le gradient de densité radial, le champ électrique radial et la force centrifuge. Cette analyse linéaire rend compte de nos observations. Le paramètre principal qui gouverne la transition vers la turbulence est le profil du champ électrique radial autour de la colonne de plasma. Nous montrons que l'apparition d'un régime de chaos spatio-temporel au sein de la colonne de plasma induit l'intermittence de la densité du plasma autour de la colonne. Les conséquences sur le transport anormal convectif sont analysées. Le contrôle dynamique par Autosynchronisation Retardée permet de régulariser les régimes en appliquant le signal de contrôle sur une électrode extérieure à la colonne de plasma. Le transport anormal est ainsi réduit.

1 Le dispositif expérimental

Des expériences en dynamique non-linéaire ont été réalisées sur un nouveau dispositif à plasma en champ magnétique (MISTRAL). Ce dispositif est composé d'une chambre source de plasma de grand diamètre (140 cm) connectée à un tube (longueur 100 cm, diamètre 40 cm) placé dans un solénoïde appliquant un champ magnétique d'une intensité maximale de 500 gauss. La colonne droite est prolongée par un demi-tore de grand rayon 60 cm qui permet d'étudier les instabilités spécifiques de cette géométrie. Le plasma est créé par les électrons énergétiques issus d'une cathode formée d'une série de 32 filaments placés dans la chambre source. Typiquement, le plasma obtenu dans la colonne droite présente un profil radial parabolique avec une largeur de 30 cm environ. Dans les expériences analysées ici, on place un diaphragme à l'entrée de la colonne. Ce diaphragme limite le diamètre de la colonne à 14 cm. La colonne est limitée axialement par un disque collecteur placé au bout de la section droite. D'autres collecteurs concentriques polarisables de façon indépendante sont placés autour de ce disque principal. Derrière le limiteur à l'entrée de la colonne, il n'y a aucun processus d'ionisation, et la diffusion radiale du plasma est le seul mécanisme conduisant à la présence de plasma dans cette zone. L'objectif de notre travail est d'étudier cette diffusion et de mettre en évidence les mécanismes du transport radial.

Pour cela, nous utilisons différentes sondes électriques mobiles et des réseaux de sondes matriciels ou disposés en couronne. Les fluctuations du courant collecté sont directement proportionnelles aux fluctuations locales de la densité du plasma.

2 Analyse des régimes réguliers

L'équilibre de la colonne de plasma est essentiellement défini par les flux de particules chargées dans les directions axiales et radiales. Sur l'axe de la colonne, l'injection des électrons ionisants est contrôlée par le potentiel appliqué à la chambre source. Ils contribuent à une charge négative de l'axe de la colonne. D'autre part, les ions sont moins bien confinés que les électrons (beaucoup plus légers) et contribuent, par leur fuite radiale, à imposer un potentiel négatif à la colonne. Ces deux effets conduisent à l'existence d'un champ électrique radial d'équilibre de symétrie cylindrique.

L'un des mécanismes fondamentaux en physique des plasmas est l'existence de dérives induites par l'interaction entre les mouvements cyclotroniques des particules et les champs continus ou variables appliqués. En particulier, l'application d'un champ électrique transverse au champ magnétique induit une dérive dite $E \times B$, ou dérive électrique, qui convecte le plasma dans la direction perpendiculaire. Ici, la dérive est azimutale et induit une rotation de la colonne autour de son axe. Cette rotation est du type rotateur rigide si le champ électrique varie linéairement avec la position radiale. Cette situation correspond à un profil de potentiel parabolique. A cette dérive s'ajoute une dérive diamagnétique induite par le gradient radial de densité : cette dérive induit l'existence d'ondes de dérive qui se propagent dans la direction de la dérive des électrons lorsque les conditions d'une instabilité sont réunies.

Dans notre système, nous observons qu'il existe des régimes instables cohérents très fortement non-linéaires. Les modes $m=1$ et $m=2$ sont préférentiellement excités dans notre système. Nous avons étudié la structure spatio-temporelle de ces modes réguliers en utilisant un couple de sondes, l'une fixe servant de référence, et l'autre mobile se déplaçant sur une grille de pas 15 mm. La référence de phase étant choisie sur la sonde fixe, la sonde mobile enregistre à chaque position une série temporelle correspondant à plusieurs périodes du mode étudié et permet ainsi de reconstituer a posteriori l'évolution spatio-temporelle des fluctuations. La figure 1 montre une carte typique de la densité électronique dans la colonne dans le cas d'un mode $m=2$.

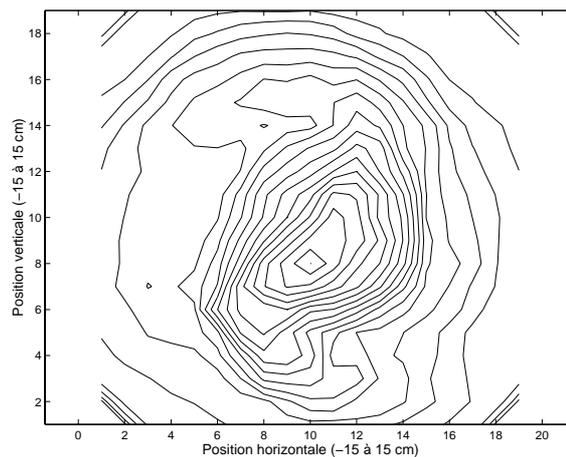


FIG. 1 – Structure spirale sur la carte de densité

On voit clairement le plasma dense au centre et l'existence de deux bras spiraux qui s'enroulent autour de la colonne. L'enregistrement de l'évolution temporelle de la densité

en un point derrière le limiteur montre un signal présentant des bouffées périodiques de plasma correspondant au passage de l'un des bras spiraux. L'analyse de la forme des bras montre qu'il existe un cisaillement de vitesse azimutale derrière le diaphragme : le plasma est convecté azimutalement moins vite derrière le limiteur. L'analyse du mode $m=1$ conduit exactement aux mêmes conclusions. Il est clair qu'une perturbation de densité qui existe en bord de la colonne tournante peut atteindre un très fort niveau de non-linéarité.

3 Analyse linéaire de la stabilité du système

L'observation de structures spirales dans une colonne de plasma a été rapportée il y a quelques années dans un plasma créé par un canon à plasma [1, 2]. Nous avons repris l'étude théorique publiée à cette occasion en l'appliquant à nos conditions expérimentales. Comme nous l'avons signalé au §2, 2 paramètres importants sont les deux fréquences de dérive, dérive diamagnétique ω^* (déterminée par le profil radial de densité), et dérive ExB ω_E (déterminée par le profil radial de potentiel). Ces deux quantités ont été modélisées en accord avec les variations expérimentales mesurées. A l'aide des équations de conservation de la densité et de la quantité de mouvement pour les ions et les électrons, dans l'hypothèse de perturbations quasi-neutres de faible amplitude, on obtient une équation différentielle linéaire pour le potentiel perturbé ϕ .

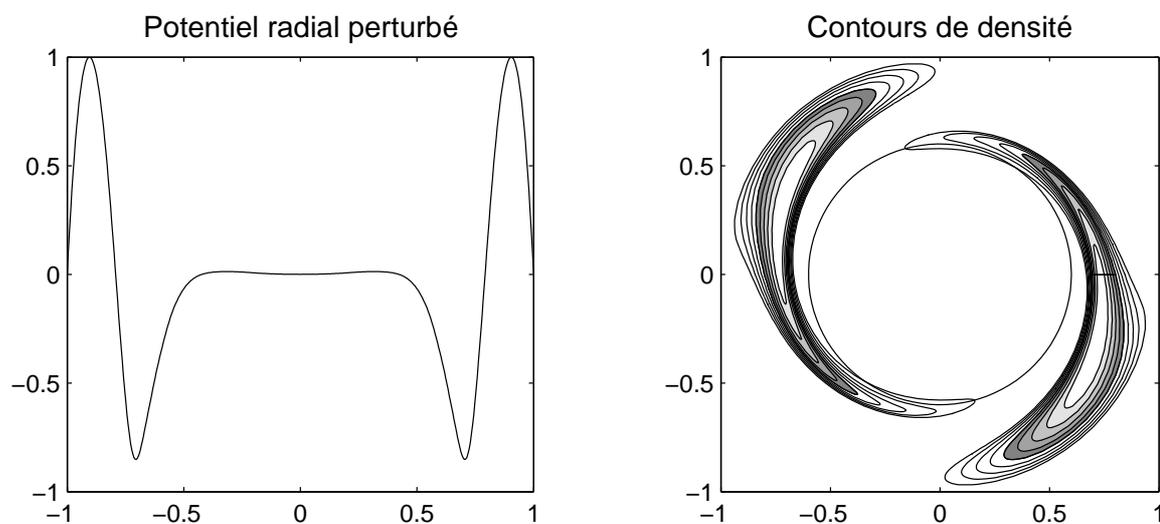


FIG. 2 – Profil radial de la perturbation de potentiel (à gauche) et contours de densité perturbée (à droite).

Pour des petites valeurs du nombre d'onde axial (ce qui correspond à notre cas), et pour un mode $m=2$, la solution conduit pour la densité perturbée à une structure spirale de faible développement, voisine de l'observation expérimentale. Un exemple de perturbations de potentiel et de densité est donné sur la figure 3. On note que la structure spirale se développe dans la région de forts gradients. Evidemment, ce calcul linéaire n'est pas auto-cohérent puisque l'amplitude de la perturbation spirale est quasiment arbitraire et que l'existence de cette structure ne modifie pas en retour les paramètres de calcul.

4 Des régimes réguliers aux régimes turbulents

Une faible variation du paramètre de contrôle (potentiel du collecteur en bout de colonne) provoque la transition vers un régime de chaos spatio-temporel. L'étude préliminaire indique que les modes $m=1$ et $m=2$ sont excités simultanément et que leur compétition et leur interaction non-linéaire induit ce régime de turbulence faible [3]. Les séries temporelles enregistrées au bord de notre plasma présentent ainsi une forte intermittence. La figure 2 montre un enregistrement typique.

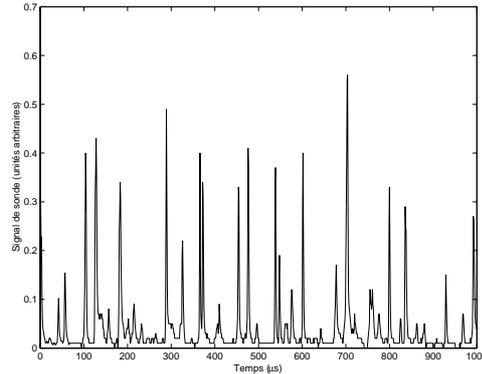


FIG. 3 – Intermittence de la densité au bord de la colonne

Il est possible de calculer la distribution des temps de récurrence des bursts. Celle-ci présente une distribution en loi de puissance. L'analyse numérique des séries temporelles enregistrées à la périphérie de la colonne centrale montre qu'il n'est pas possible de déterminer une dimension de corrélation. Cependant, il est clair que nous ne sommes pas en présence d'un régime de turbulence développée. Nous ne disposons pas actuellement d'un moyen de visualisation de ce régime de turbulence faible dans lequel le caractère spatial du chaos est évident. Le développement au laboratoire d'une caméra rapide (250.000 images/sec) est en cours et permettra à court terme d'obtenir toutes les informations sur le mécanisme de transition vers le régime de chaos spatio-temporel et sur ce régime lui-même. Une méthode de moyenne conditionnelle a permis dans un premier temps de mettre en évidence la propagation azimuthale de structures dans la section du tube dans l'ombre du limiteur. D'autre part, un réseau rectangulaire de 30 sondes (5x6) couvrant une surface de (4 cm x 5 cm) et couplé à un système d'acquisition multivoies synchrone met en évidence le détachement de tubes de plasma qui sont convectés vers la paroi dans un mouvement hélicoïdal. Cette observation est à rapprocher de mesures récentes en plasma de bord de tokamak mettant en évidence de tels tubes de plasma détachés. L'analyse du transport anormal de l'énergie en bord de tokamak en termes de transport diffusif est ainsi remis en cause par ces observations. Notre expérience nous permet de tester en laboratoire cette théorie du transport anormal convectif.

Il est clair que ce régime fortement intermittent en bord de plasma a pour origine le régime de chaos spatio-temporel existant dans la colonne centrale. D'autre part, les propriétés statistiques de cette intermittence sont liées à l'évolution spatio-temporelle des structures quittant la colonne dans la couche de cisaillement derrière le limiteur. On peut supposer que, dans les régimes permettant le détachement des structures, les distributions des bouffées de plasma derrière le limiteur ont un caractère stochastique.

5 Contrôle de la dynamique spatio-temporelle

Le système étendu que constitue la colonne de plasma en champ magnétique présente des régimes de chaos spatio-temporel. Il est intéressant d'essayer d'agir de façon dynamique sur ce système pour le régulariser. Nous avons choisi d'utiliser la méthode d'Autosynchronisation Retardée [4] qui fut employée avec succès récemment sur des régimes chaotiques de basse dimensionnalité [5]. Dans notre système, une électrode concentrique à la colonne est placée à l'extrémité du tube et positionnée radialement au milieu de la zone ombrée par le limiteur. Cette électrode est polarisée à une valeur positive par rapport à l'électrode de collection centrale et elle est soumise au signal de contrôle dynamique. Celui-ci est élaboré de façon classique en faisant la différence en temps réel entre le signal d'une sonde placée dans la colonne et le même signal retardé d'une période du mode à stabiliser.

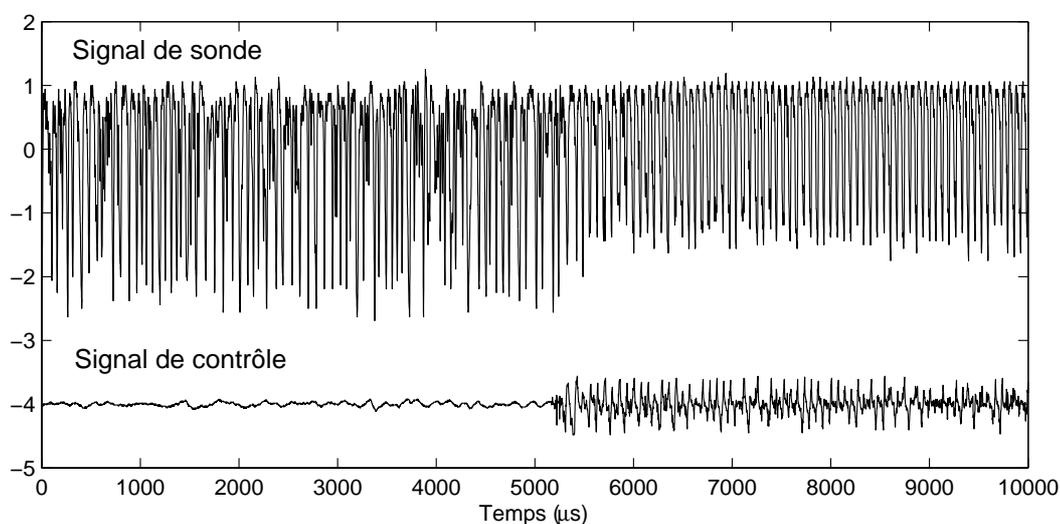


FIG. 4 – Régularisation des fluctuations de densité (en haut) par application d'un signal de contrôle (en bas)

Nous avons choisi de stabiliser le mode $m=2$. La figure 4 montre le transitoire de contrôle du système : avant le contrôle, le signal dans la colonne est chaotique et il est régularisé après l'application du contrôle.

Il faut noter que le signal de contrôle ne tend pas à s'annuler. Dans la phase régularisée, le système est plutôt forcé par feedback interne. C'est intrinsèquement le caractère spatio-temporel du chaos qui empêche de contrôler de système de façon optimale, avec un signal de contrôle tendant vers une très faible valeur. Nous projetons de réaliser ultérieurement un contrôle réparti qui devrait être plus efficace de ce point de vue.

Le changement de régime dynamique n'est pas sans influence sur le transport radial du plasma. Nous avons enregistré les profils de densité en réalisant une moyenne temporelle sur des enregistrements suffisamment longs. La figure 5 montre les profils de densité enregistrés dans un cas turbulent et dans un cas régularisé.

On note qu'au-delà du limiteur, la densité moyenne est plus forte dans le cas turbulent (en pointillé) que dans le cas régulier. Nous avons représenté la variation relative de densité dans cette zone sur la même figure. Le passage d'un régime turbulent à un régime régulier induit une réduction importante (30%) du transport radial.

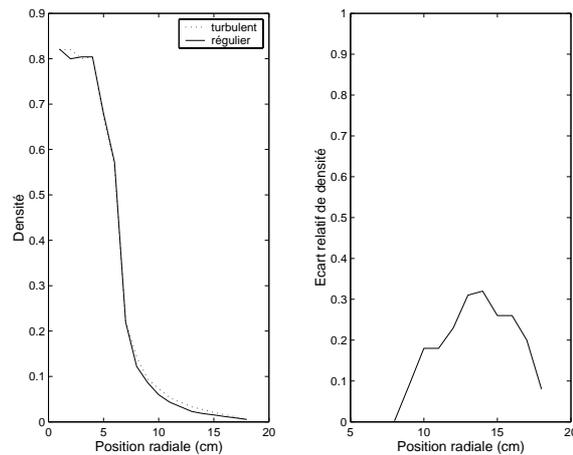


FIG. 5 – Profil radial de densité dans l'état régulier (trait plein) et l'état turbulent (trait pointillé). La courbe de droite illustre l'importance de l'augmentation relative de la densité au bord dans le cas turbulent.

6 Conclusion

En conclusion, la transition vers le chaos spatio-temporel observée dans une colonne de plasma en champ magnétique induit un transport radial turbulent autour de cette colonne. Les différentes dérives du plasma liées à l'application du champ magnétique déterminent l'évolution spatio-temporelle des bouffées de plasma autour de la colonne. Dans la plupart des régimes, un mouvement spiral autour de l'axe est enregistré.

L'application à une électrode placée autour de la colonne de plasma de signaux de contrôle élaborés à partir des fluctuations de densité dans la colonne instable permet de régulariser les régimes et a pour conséquence de réduire le transport radial anormal. Ce résultat pourrait être mis en application dans le cas des plasmas de bord de tokamak pour lesquels le contrôle du transport anormal de l'énergie est un objectif de première importance.

Références

- [1] T. Ikehata, H. Tanaka, N. Y. Sato, and H. Mase *Persistent spiral arm structure of a rotating plasma in a stationary gas*, Phys. Rev. Lett. **81**, 1853 (1998).
- [2] M. Kono and M. Y. Tanaka, *Spiral structures in magnetized rotating plasmas*, Phys. Rev. Lett. **84**, 4369 (2000).
- [3] S. Ciliberto and J. P. Gollub, *Pattern competition leads to chaos* Phys. Rev. Lett. **52**, 922 (1984).
- [4] K. Pyragas *Continuous control of chaos by self-controlling feedback*, Phys. Lett. **A 170**, 421 (1992).
- [5] E. Gravier, X. Caron, G. Bonhomme, Th. Pierre, *Control of the chaotic regimes of nonlinear drift waves in a magnetized laboratory plasma*, Phys. Plasmas **6**, 1670 (1999).

Structuration bidimensionnelle d'un film visqueux sous gravité déstabilisante avec alimentation continue

Ch. Pirat, Ph. Maïssa, Ch. Mathis et L. Gil

Institut du Non Linéaire de Nice

1361, Route des Lucioles, 06560 Sophia Antipolis

pirat@inln.cnrs.fr

Résumé

Une étude systématique des instabilités spatio-temporelles dans l'expérience à une dimension dite "de la gouttière" a été réalisée à l'ESPCI [1]. Nous avons mis au point à l'INLN, une expérience d'hydrodynamique à deux dimensions avec des temps et des longueurs caractéristiques conviviaux. On considère un film d'huile de silicone sous un plan horizontal: l'instabilité de Rayleigh-Taylor fabrique un réseau hexagonal [2]. Dans notre expérience, nous avons utilisé une grille horizontale perforée jouant le rôle d'un filtre poreux et permettant une visualisation performante. Le système est alimenté en continu en huile de silicone.

Nous présentons ici les premiers résultats concernant la stabilité des différentes solutions: gouttes, intermittence gouttes-colonnes, réseau de colonnes, nappes... en fonction de la viscosité et du débit.

1 Introduction

Dans les milieux dissipatifs hors d'équilibre unidimensionnels, les instabilités des structures stationnaires périodiques ont fait l'objet de nombreuses études expérimentales: écoulement de Couette-Taylor [3], de Rayleigh-Bénard [4], de Rayleigh-Taylor [1], solidification dirigée [5], instabilité de l'imprimeur [6]. Des mécanismes génériques de destabilisation tels que l'apparition d'une structuration spatiale à la longueur d'onde double [7], de l'existence de structures localisées propagatives [1, 5, 8], de structures localisées oscillantes (cellules anormales) [6, 8] et de régimes d'intermittence spatio-temporelle [9, 4, 6] ont été mis en évidence.

A la recherche de comportement génériques similaires mais à 2 dimensions, nous avons développé une version bidimensionnelle de l'expérience de la gouttière [1].

2 Le dispositif expérimental

L'appareillage est constitué d'une grille circulaire (tôle perforée) jouant le rôle d'un filtre poreux, placée horizontalement dans le fond d'une chambre cylindrique en dépression stable et contrôlée (Fig. 1). On établit une hauteur d'huile constante au dessus de la grille, hauteur qu'il est possible de faire varier en jouant sur la dépression. A l'équilibre, la dépression compense exactement le poids de l'huile: il n'y a pas d'écoulement. Un apport même très faible d'huile rompt alors l'équilibre et un flux s'amorce dans le but de rétablir cet équilibre. La chambre est alimentée en continu en huile de silicone qui s'écoule à travers la grille. Une hauteur d'huile suffisamment importante (de l'ordre d'une dizaine de centimètres), combinée à une arrivée homogène de l'huile, garantit une bonne

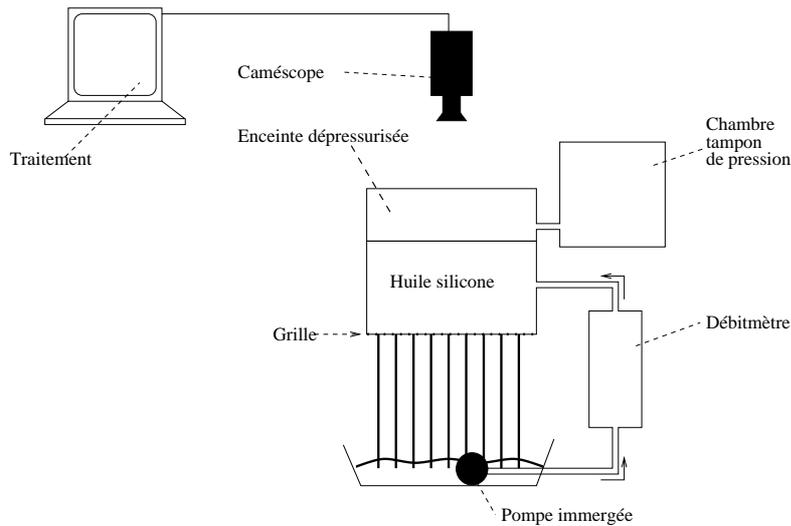


FIG. 1 – Schéma du montage

uniformité du débit à travers toute la surface, ce dernier étant mesuré avec un débitmètre à flotteur et contrôlé par une vanne. D'un diamètre utile de 18.8 cm et d'une épaisseur de 1 mm, la grille est une plaque d'acier circulaire perforée suivant un motif hexagonal. Les trous circulaires et identiques espacés de 2 mm font 1 mm de diamètre. Le pas de la grille et la dimension des trous sont beaucoup plus petits que la longueur d'onde λ_m de l'instabilité de Rayleigh-Taylor (Fig. 2). Nous avons vérifié que l'écoulement n'est pas résonnant avec le pas de grille. En particulier, il n'y a pas d'alignement du réseau sur la grille. Nous avons utilisé de huile silicone (Polydiméthylsiloxane) de tension de surface 20.6 dyn.cm^{-1} mais avec des viscosités différentes: 20, 100 et $350 \text{ mm}^2\text{s}^{-1}$. Cette huile est amenée à la chambre par deux pompes immergées. Le débit est mesuré par un débitmètre à flotteur ShoRate GT 1000 avec flotteur 10-RV-64.

Dans le but d'avoir une visualisation correcte en fonctionnement, la chambre cylindrique a été conçue en Plexiglas. L'observation se fait par le haut. Un éclairage rasant périphérique est disposé autour de la chambre, à la naissance de l'écoulement, donc légèrement sous le niveau de la grille. La réfraction par le fluide rend compte de la variation de l'épaisseur du film sous la grille, la luminosité étant localement associée à cette épaisseur (Fig. 2b). Un caméscope numérique de type Thomson VMD 20 est disposé à la verticale et relié à un ordinateur pour acquisition puis traitement.

3 Les premiers résultats expérimentaux

3.1 Les différents régimes d'écoulement

Bien que les résultats obtenus pour le moment soient trop succincts pour tracer un espace des phases précis dans le plan des paramètres (viscosité, débit), on peut cependant identifier le scénario typique suivant: A débit quasiment nul, l'instabilité de Rayleigh-Taylor déstabilise le film présent sous la grille. Des gouttes se forment sous sa surface et chutent avec une fréquence de plus en plus élevée lorsque l'on augmente le débit (Fig. 3a). Il apparaît alors un régime de colonnes de liquide. Les deux régimes coexistent sur une certaine plage de débit (Fig. 3b) mais pour un débit un peu plus élevé, seul le régime de colonnes

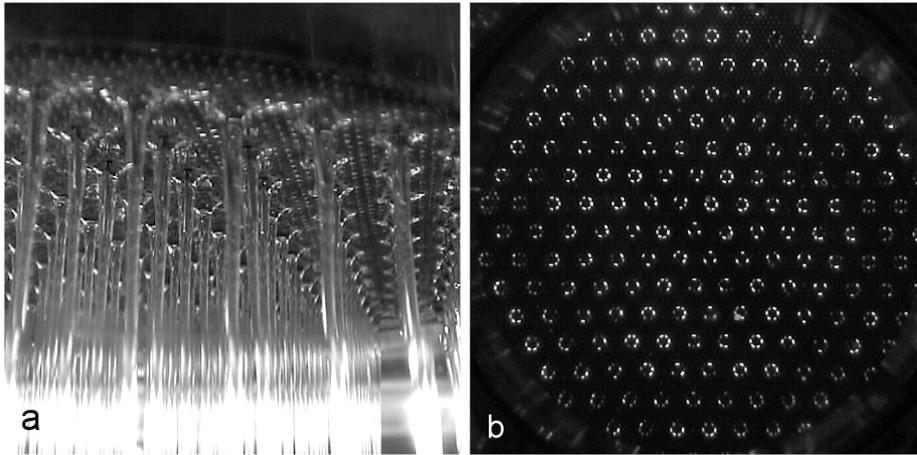


FIG. 2 – Réseau parfait de colonnes liquides vu: (a) par le côté, (b) par le haut, à travers les trous de la grille (viscosité $20 \text{ mm}^2/\text{s}$)

persiste: un réseau hexagonal stationnaire s'établit (Fig. 2b). Si le débit augmente encore, le fluide de faible viscosité subit directement une transition colonne-nappe alors qu'un fluide de viscosité élevée connaît un régime turbulent où chaque colonne se déplace de façon chaotique (Fig. 3d). En intégrant sur un grand nombre de temps caractéristiques (celui-ci est défini par la durée moyenne d'un cycle arrêt-déplacement-arrêt pour une colonne), on retrouve le réseau hexagonal de base (Fig. 3c). Le passage du réseau hexagonal parfait au régime turbulent se fait en perturbant localement et fortement le réseau (déplacement d'une colonne). Le système une fois établi dans le régime turbulent ne revient jamais dans l'état hexagonal stationnaire. Pour les débits encore plus grands, on observe une transition colonnes-nappes (Fig. 3e). Les nappes apparaissent sous la forme d'ondes progressives (Fig. 4a), s'organisent en structures spiralantes (Fig. 4b) puis en cellules (Fig. 4c) pour un débit toujours croissant.

3.2 Le régime de colonnes

On cherche à observer les modes de déstabilisation d'un réseau hexagonal de colonnes liquides [10]. La condition préalable à cette observation est l'instauration de la structure hexagonale stationnaire. Il est apparu sans surprise que le réseau n'arrivait pas à se stabiliser sur le bord en conditions limites circulaires. Nous avons donc cherché à le stabiliser par des conditions aux limites hexagonales en imposant une zone hexagonale d'écoulement fixée à la périphérie de la grille avec des épingle glissées par des trous (retenues par leurs têtes). Chaque épingle déstabilise le film localement et force l'apparition d'une colonne là où elle se trouve. En aucun cas l'une de ces colonnes ne peut se mettre à se déplacer. Nous n'avons pas mesuré de différence de débit entre colonnes avec et sans épingle (pas de problème de drainage). Les conditions d'une limite hexagonale sont de fait fortement remplies. Un réseau non perturbé apparaît alors spontanément sur une large plage de débit.

3.2.1 Destruction du réseau hexagonal par des structures localisées oscillantes

Il est possible d'obtenir un réseau imparfait en partant d'un débit faible que l'on augmente brusquement. Il arrive alors qu'un ou plusieurs défauts topologiques (penta-hepta) se re-

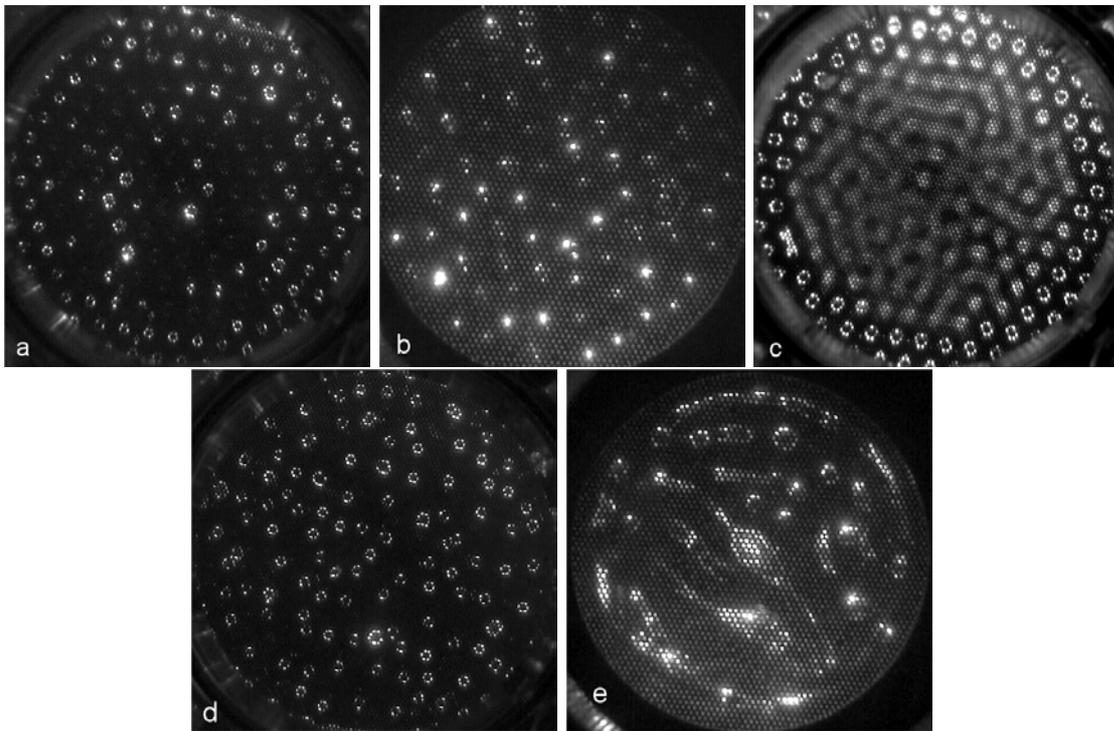


FIG. 3 – Pour un débit croissant (a) Gouttes (viscosité $350 \text{ mm}^2/\text{s}$), (b) Régime mixtes gouttes-colonnes; les gouttes se distinguent visuellement des colonnes par une variation périodique de l'intensité lumineuse. (viscosité $100 \text{ mm}^2/\text{s}$), (c) colonnes en régime turbulent: moyenne sur 20 secondes (viscosité $350 \text{ mm}^2/\text{s}$), (d) colonnes en régime turbulent (viscosité $350 \text{ mm}^2/\text{s}$), (e) régime mixte colonnes-nappes (viscosité $100 \text{ mm}^2/\text{s}$)

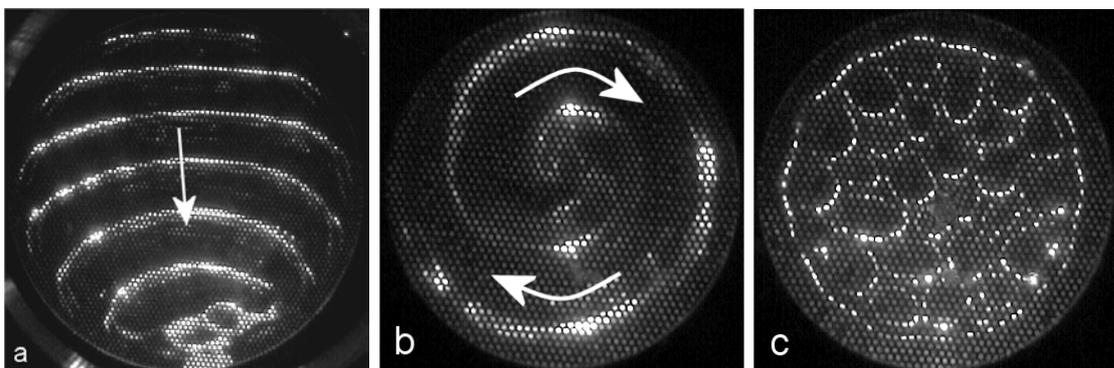


FIG. 4 – Pour un débit croissant: (a) ondes progressives, (b) structure spiralante, (c) cellules. (viscosité $100 \text{ mm}^2/\text{s}$)

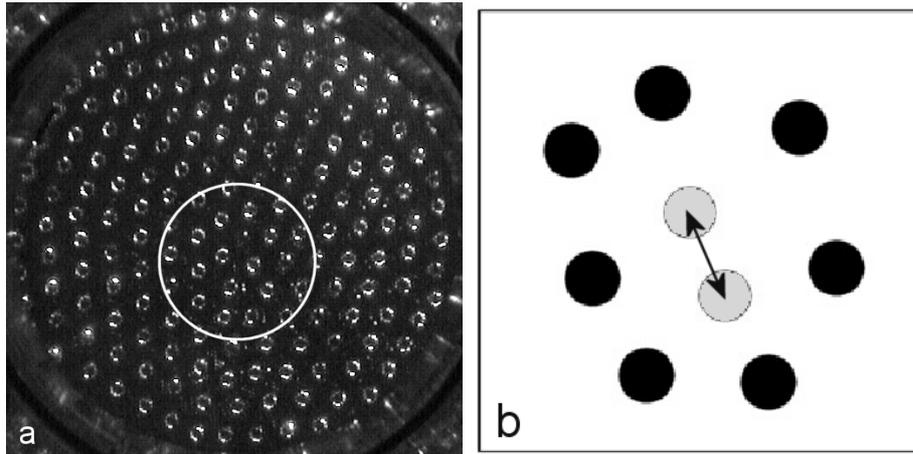


FIG. 5 – (a) Une paire pentagone-heptagone, (b) L'oscillation se caractérise par le mouvement de va et vient du centre d'un heptagone entre les deux positions extrêmes en gris. (viscosité $20 \text{ mm}^2/\text{s}$)

trouvent piégés. Génériquement oscillants à leur création, ils peuvent évoluer de différentes façons :

- après quelques oscillations, réarrangement des colonnes vers un réseau parfait
- les oscillations s'arrêtent brusquement et il persiste un défaut stationnaire de type pentagone-heptagone
- déplacement du défaut de deux façons différentes: un déplacement lent par processus de création-destruction successifs de proche en proche ou disparition d'un défaut et réapparition plus loin (peut-être un couplage global par conservation du débit).
- enfin, de façon plus intéressante, le défaut peut continuer à osciller. Typiquement, on observe alors, au coeur d'un heptagone, une colonne mobile dont la position oscille périodiquement (Fig. 5). On constate également un mouvement faible des colonnes alentour.

3.2.2 Les modes de déstabilisation d'un réseau d'hexagones centrés de colonnes liquides

Nous avons systématiquement obtenu une déstabilisation du réseau hexagonal en diminuant le débit. Génériquement, une oscillation localisée d'une colonne ou d'un petit groupe de colonnes démarre au bord et gagne les colonnes voisines. Lorsque le débit diminue, les oscillations gagnent d'autres colonnes par les bords (en évitant la zone de plus grande stabilité au centre) et leurs amplitudes augmentent.

Pour un débit suffisamment faible, il apparaît un mouvement d'ensemble sous la forme d'oscillations de lignes de colonnes en opposition de phase avec une période d'une seconde (Fig. 6). On constate seulement trois directions d'oscillation. Celles-ci ne semblent pas être liées à des conditions aux limites hexagonales imposées par les épinglets puisqu'elles apparaissent également avec les conditions aux limites circulaires. Ce mode de déstabilisation de la structure hexagonale est le strict analogue des oscillations en opposition de phase observées à 1D. C'est aussi un mode de déstabilisation générique prévu par le calcul des résonances fortes d'un réseau hexagonal [10].

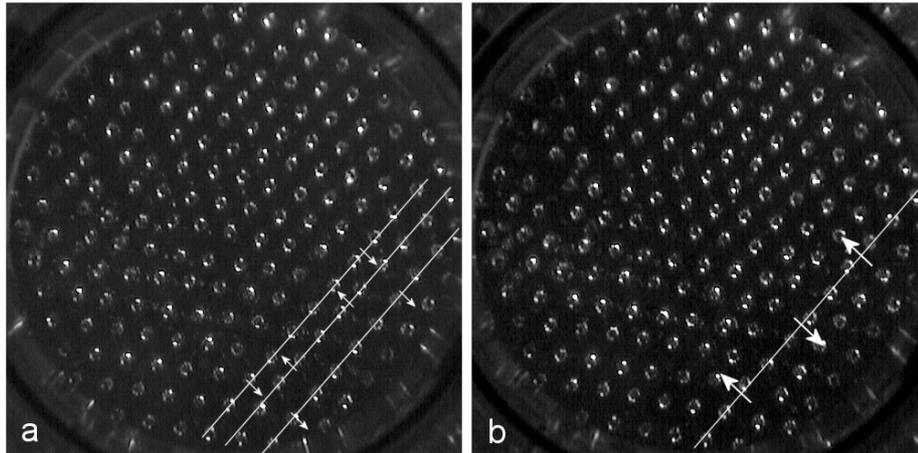


FIG. 6 – (a) Oscillations de lignes: les flèches indiquent le sens de déplacement (Période $T=1$ s) (b) Ondes de déphasage. (viscosité $20 \text{ mm}^2/\text{s}$)

En diminuant davantage le débit, l'amplitude des oscillations de lignes croît et des ondes de déphasage le long des lignes de colonnes viennent se superposer à la dynamique précédente (Fig. 6b). Une diminution supplémentaire conduit à la destruction de toute la structure.

Références

- [1] F. Giorgiutti, A. Bleton, L. Limat, J.E. Westfreid, Phys. Rev. Lett. **74**, p 538, 1995. C. Cournillon, L. Daudet, T. Podgorski and L. Limat, 1998, Phys. Rev. Lett. **80**, p 2117. P. Brunet, J-M Flesselles et L. Limat, *Dérive et chaos spatio-temporel dans la fontaine circulaire*, Rencontre du non-linéaire 2000, Paris.
- [2] D.H. Sharp, Physica D, **12**, 3, 1984.
- [3] C.D. Andereck, S.S. Liu and H.L. Swinney, (1986) J. Fluid Mech. **164**, p 155.
- [4] S. Ciliberto and P. Bigazzi, 1988, Phys. Rev. Lett. **60** p286 et M. Dubois, R. Da Silva, F. Daviaud, P. Bergé and A. Petrov, Europhys. Lett. **8** p135.
- [5] A.J. Simon, J. Bechhoeffer and A. Libchaber, 1988, Phys. Rev. Lett. **61**, p 2574. M. Ginibre, S. Akamatsu and G. Faivre, 1997, Phys. Rev. E **56** p 56.
- [6] M. Rabaud, S. Michalland and Y. Couder, 1990, Phys. Rev. Lett. **64**, p 184 et S. Michalland and R. Rabaud, 1992, Physica D **61** p197.
- [7] P. Coulet and G. Iooss, 1990, Phys. Rev. Lett. **64** p866.
- [8] L. Gil, 2000, Physica D **147**, p 300.
- [9] H. Chaté and P. Manneville, 1987, Phys. Rev. Lett. **58** p112.
- [10] C. Pirat and L. Gil, *Wave vectors selection at the threshold of a generic instability of a hexagonal stationary pattern*, soumis à Physica D (octobre 2001).

Une nouvelle approche pour étudier les effets non linéaires dans les réseaux de Bragg fibrés

S. Pitois, M. Haelterman* et G. Millot

*Laboratoire de Physique de l'Université de Bourgogne,
Unité Mixte de Recherche CNRS 5027,
9 Avenue Alain Savary, 21078 Dijon Cedex, France*

**Service d'Optique et d'Acoustique, Université Libre de Bruxelles,
50 Avenue Roosevelt, B-1050 Bruxelles, Belgique
spitois@u-bourgogne.fr*

Résumé

Nous avons étudié théoriquement et expérimentalement la propagation non linéaire de la lumière dans un réseau de Bragg dynamique. Un tel réseau est obtenu par l'intermédiaire de l'inter-modulation de phase en injectant dans une fibre optique biréfringente à dispersion normale le battement temporel de deux faisceaux laser de fréquences différentes. Le principal avantage d'un réseau de Bragg dynamique est qu'il permet d'étudier expérimentalement la propagation non linéaire de la lumière près de la bande interdite, ce qui est particulièrement délicat avec un réseau de Bragg statique.

1 Introduction

Un réseau de Bragg fibré est obtenu en modulant périodiquement l'indice de réfraction le long d'une fibre optique. Cette modulation périodique se traduit au sein de la relation de dispersion par l'apparition d'une bande de fréquences interdites centrée sur la longueur d'onde de Bragg. La présence de cette bande interdite, combinée aux propriétés non linéaires de la silice, est à l'origine de nombreux phénomènes physiques comme la bistabilité [2], la formation de solitons [2, 3, 4] ou l'instabilité de modulation [2, 1, 4]. Malheureusement, la majorité de ces effets ne se manifestent que lorsque la lumière se propage dans la fibre avec une longueur d'onde voisine de la longueur d'onde de Bragg. Pour ces longueurs d'ondes, le réseau est fortement réfléchissant et il devient alors délicat d'y injecter de la lumière. En conséquence, la plupart des phénomènes non linéaires qui ont été étudiés théoriquement au cours des dix dernières années n'ont pu être observés expérimentalement que très partiellement.

2 Réseau de Bragg dynamique

L'approche que nous proposons pour contourner cette limitation consiste à générer un réseau de Bragg dynamique. Notre système repose sur la dépendance en intensité de l'indice de réfraction au sein d'une fibre optique. La modulation périodique de l'indice de réfraction est en effet induite en injectant dans la fibre le battement temporel de deux ondes, appelées "ondes réseaux", de fortes puissances et de fréquences légèrement différentes (voir Fig.1). Le réseau ainsi créé est dit "dynamique" car il se déplace dans la fibre à la vitesse moyenne des deux ondes réseaux. L'intérêt de cette configuration est que l'onde pompe et les ondes réseaux peuvent être superposées avant d'être injectées dans la fibre, contournant ainsi le

problème de la forte réflectivité des réseaux statiques.

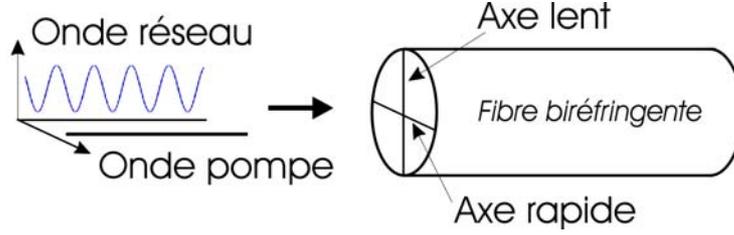


FIG. 1 – Schéma de principe de l'expérience : l'onde réseau, qui provient du battement temporel de deux faisceaux laser de fréquences différentes, est injectée selon l'axe lent d'une fibre fortement biréfringente. L'onde pompe est envoyée selon l'axe rapide.

Supposons que les ondes réseaux se propagent le long de l'axe lent d'une fibre optique fortement biréfringente en régime de dispersion normale. Le battement sinusoïdal créé par ces ondes module périodiquement l'indice de réfraction le long de l'axe rapide grâce au phénomène d'inter-modulation de phase (ou effet Kerr croisé). La modulation d'indice peut alors s'écrire sous la forme :

$$\Delta n(t) = (2/3)n_2(a^2/2)\cos(2\Omega t) \quad (143)$$

où n_2 est l'indice non linéaire, 2Ω représente l'écart de fréquence entre les ondes réseaux d'amplitude $a/2$ et t est le temps défini dans le repère se déplaçant à la vitesse du réseau dynamique. La propagation de l'onde pompe suivant l'axe rapide de la fibre est alors modélisée par l'équation de Schrödinger non linéaire suivante :

$$\frac{\partial E}{\partial z} = -\frac{i}{2}\beta_2 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + i\frac{\gamma}{n_2}\Delta n(t)E + i\gamma |E|^2 E, \quad (144)$$

où E est l'enveloppe du champ électrique, β_2 est le coefficient de dispersion de vitesse de groupe et γ est le coefficient de non linéarité. Pour décrire l'évolution du champ de pompe E en présence du réseau dynamique, nous utilisons l'approche des modes couplés en décomposant le champ E en la somme d'une onde propagative F et d'une onde contra-propagative B [2] :

$$E(z, t) = F(z, t)\exp[i(-\Omega t + Kz)] + B(z, t)\exp[i(\Omega t + Kz)] \quad (145)$$

En insérant cette expression dans l'équation (2), nous obtenons le système d'équations non linéaires suivant :

$$\frac{\partial F}{\partial z} = -\frac{i}{2}\beta_2 \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} - \Omega\beta_2 \frac{\partial F}{\partial t} + i\kappa B + i\gamma(|F|^2 + 2|B|^2)F \quad (146)$$

$$\frac{\partial B}{\partial z} = -\frac{i}{2}\beta_2 \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} + \Omega\beta_2 \frac{\partial B}{\partial t} + i\kappa F + i\gamma(|B|^2 + 2|F|^2)B \quad (147)$$

avec $\kappa = \gamma a^2/6$. Les termes proportionnels à κ représentent le couplage entre l'onde propagative F et l'onde contra-propagative B induit par le réseau dynamique alors que ceux proportionnels à $\Omega\beta_2$ modélisent la contrapropagation des ondes pompes dans le

repère attaché au réseau dynamique. Nous remarquons à présent que ces équations sont analogues aux équations qui décrivent la propagation non linéaire de la lumière dans les réseaux de Bragg statiques et nous pouvons ainsi appliquer la théorie développée pour ces réseaux [2]. Nous recherchons dans un premier temps des solutions stationnaires de ces équations sous la forme d'ondes continues :

$$F(t, z) = A^+ \exp[i(\beta z - \omega t)] \quad (148)$$

$$B(t, z) = A^- \exp[i(\beta z - \omega t)] \quad (149)$$

où β représente le désaccord entre le nombre d'onde de la pompe et le nombre d'onde du réseau alors que ω est le désaccord en fréquence correspondant. Nous définissons les paramètres suivants : la puissance totale $P = (A^+)^2 + (A^-)^2$ et le rapport des amplitudes $r = A^+/A^-$. La figure (2) représente la relation de dispersion $\beta(\omega)$ pour $\kappa = 1 \text{ m}^{-1}$ et $P = 15 \text{ W}$.

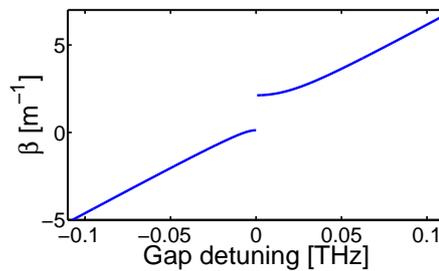


FIG. 2 – Relation de dispersion pour une onde se propageant dans le réseau de Bragg dynamique.

La relation de dispersion fait apparaître l'ouverture d'une bande interdite (gap) représentant une plage de nombre d'ondes pour lesquels la propagation n'est pas permise. La vitesse de propagation de la solution dans le réseau est donnée par la pente de la courbe et s'annule aux bords du gap. Sur la branche supérieure ($r < 0$), la dispersion de vitesse de groupe **du réseau** est positive (dispersion normale) alors qu'elle devient négative (dispersion anormale) sur la branche inférieure ($r < 0$).

3 Instabilité modulationnelle de Bragg

3.1 Analyse théorique

L'instabilité modulationnelle (IM) de Bragg se manifeste par la modulation en amplitude d'une onde lumineuse continue se propageant dans un réseau d'indice à une longueur d'onde voisine de la longueur d'onde de Bragg. Pour étudier l'IM dans notre réseau dynamique, nous avons généralisé la procédure développée par de Sterke dans la référence [1] pour un réseau statique. Notre analyse tient compte notamment des effets de dispersion chromatique intrinsèques à la fibre en silice. La méthode consiste à étudier la stabilité linéaire des solutions stationnaires (6) et (7) calculées ci-dessus en regardant l'évolution du système en présence de perturbations de faibles amplitudes [2, 5]. La figure (3) représente l'évolution de la fréquence d'instabilité modulationnelle et du gain correspondant en fonction du désaccord de fréquence ω . Loin du gap, la fréquence de modulation d'IM augmente linéairement avec le désaccord en fréquence alors que le gain correspondant diminue. Ce

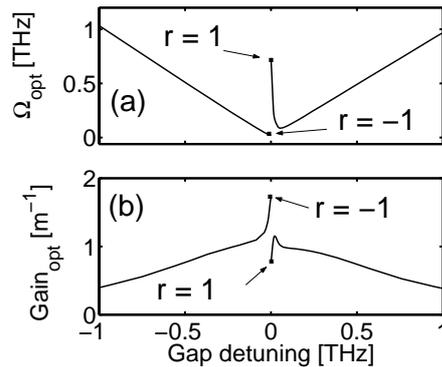


FIG. 3 – (a) Fréquence de modulation optimale calculée à partir de l’analyse de stabilité linéaire en fonction du désaccord de fréquence. (b) Gain correspondant.

dernier résultat est logique car l’influence du réseau diminue lorsque la longueur d’onde de la lumière s’éloigne de la longueur d’onde de Bragg, le système redevenant alors stable pour une fibre à dispersion normale.

3.2 Observations expérimentales

Nous avons réalisé l’expérience avec une fibre fortement biréfringente d’une longueur de 11 m (la différence d’indice entre les deux axes est $\delta n = 3.75 \times 10^{-4}$). La première onde réseau est obtenue à partir d’un laser Nd:YAG doublé en fréquence émettant de la lumière à $\lambda_1 = 532$ nm. La seconde onde réseau est produite à partir d’un laser à colorant amplifié et émettant au voisinage de $\lambda_2 = 575$ nm. Ces deux ondes réseaux qui forment le battement temporel sinusoïdal ont une durée temporelle d’environ 4.5 ns. L’onde pompe est obtenue en décalant en fréquence par effet Raman une partie du faisceau du laser Nd:YAG dans une cuve contenant du dioxyde de carbone. L’onde pompe ainsi générée a une longueur d’onde de $\lambda_p = 574.78$ nm pour une durée temporelle de 2 ns. Ces ondes peuvent être considérées comme quasi-continues car environ trois ordres de grandeur séparent les durées temporelles de ces impulsions des périodes de modulation attendues. L’onde pompe et les ondes réseaux sont alors injectées dans la fibre optique avec des états de polarisation orthogonaux, l’onde pompe se propageant selon l’axe rapide et les ondes réseaux selon l’axe lent (voir Fig.1). En sortie de fibre, l’onde pompe est analysée spectralement à l’aide d’un monochromateur.

La figure (4a) représente un spectre expérimental typique d’IM obtenu pour une valeur du désaccord de fréquence $\omega = -0.8$ THz. Le pic central correspond à la longueur d’onde de l’onde pompe injectée dans la fibre. Les raies d’instabilité Stokes et anti-Stokes sont clairement visibles de part et d’autre de la raie pompe. La figure (4b) illustre le bon accord entre les fréquences de modulation mesurées et celles prédites par l’analyse de stabilité linéaire [5].

4 Soliton de Bragg

Comme de nombreux systèmes non linéaires, les réseaux de Bragg sont susceptibles de donner lieu à des phénomènes de localisation d’énergie ayant une grande durée de vie. Cette

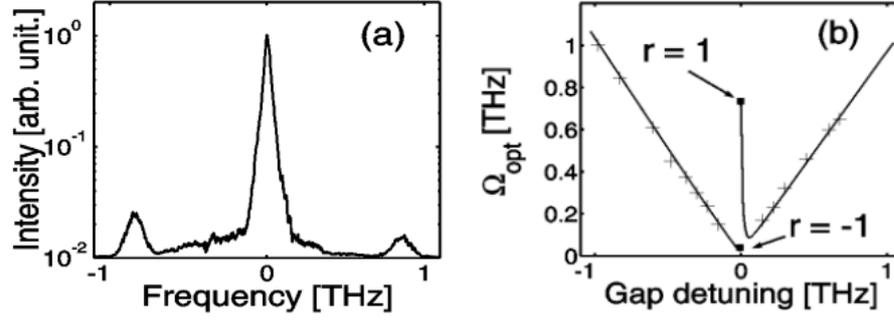


FIG. 4 – (a) Spectre expérimental d’IM obtenu pour $\omega = -0.8$ THz. (b) Fréquence de modulation d’IM en fonction du désaccord en fréquence ω . La courbe en trait plein est calculée à partir de l’analyse de stabilité linéaire et les croix représentent les mesures expérimentales.

possibilité d’auto-localisation de la lumière dans les réseaux de Bragg a été mentionnée pour la première fois en 1987 par Chen et Mills sous la forme d’un soliton particulier appelé ”soliton de Bragg” [6]. Ce soliton peut se propager sans déformation dans le réseau avec une fréquence située dans la bande interdite et une vitesse comprise entre la vitesse nulle et la vitesse de la lumière. De manière analogue au soliton conventionnel dans une fibre standard, le soliton de Bragg doit son existence aux effets combinés de l’auto-modulation de phase et de la dispersion de vitesse de groupe induite par le réseau. En 1999, Eggleton et al. ont réalisé l’observation expérimentale d’un soliton de Bragg se propageant à 50 % de la vitesse de la lumière [7]. L’inconvénient majeur avec un réseau statique est que si un soliton de vitesse nulle est généré, il restera piégé au sein du réseau et ne pourra être observé. Nous pensons que notre système peut être exploité avantageusement pour réaliser une étude expérimentale du soliton de Bragg. En effet, un soliton de vitesse nulle dans notre réseau dynamique se déplace à la vitesse moyenne du réseau, la vitesse du soliton étant définie relativement au repère attaché au réseau, et pourra donc être étudié en sortie de fibre. Avec notre configuration, le soliton de Bragg est formé par la superposition de deux impulsions de fréquences différentes et il existe une expression analytique décrivant un soliton de vitesse nulle :

$$F(z, t) = \sqrt{\frac{\kappa}{3\gamma}} \sin(\rho) \operatorname{sech} \left(\frac{\kappa}{\Omega\beta_2} \sin(\rho)t - i\frac{\rho}{2} \right) \exp[-i\kappa\cos(\rho)z] \quad (150)$$

$$B(z, t) = -\sqrt{\frac{\kappa}{3\gamma}} \sin(\rho) \operatorname{sech} \left(\frac{\kappa}{\Omega\beta_2} \sin(\rho)t + i\frac{\rho}{2} \right) \exp[-i\kappa\cos(\rho)z]. \quad (151)$$

La figure (5) illustre l’évolution de l’intensité de l’onde pompe lorsqu’un soliton de Bragg est injecté dans la fibre. Quand aucun réseau n’est présent dans la fibre, les deux impulsions qui forment le soliton se propagent à des vitesses de groupe différentes et se séparent rapidement (voir Fig.5a). Lorsque le réseau dynamique est présent, les deux impulsions forment un soliton qui se propage dans la fibre à la vitesse moyenne du réseau (voir Fig.5b).

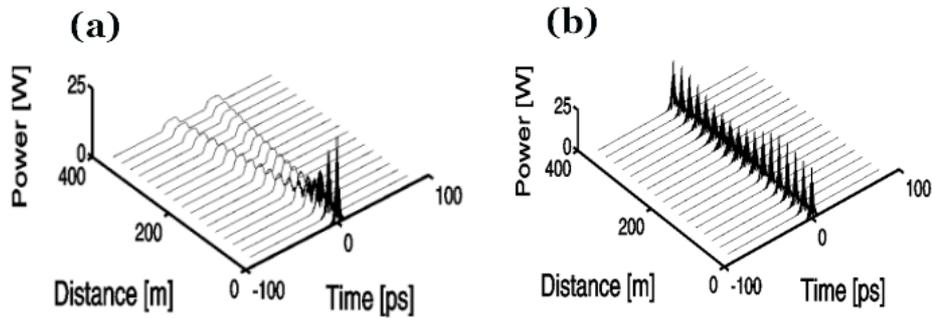


FIG. 5 – Simulation numérique montrant l'évolution de l'intensité de l'onde pompe sur une distance de propagation de 400 m : (a) sans réseau, (b) avec le réseau dynamique.

5 Conclusion

En conclusion, nous avons étudié théoriquement et expérimentalement la propagation non linéaire de la lumière dans un réseau de Bragg dynamique. Un tel réseau est obtenu par l'intermédiaire de la modulation de phase croisée en injectant le battement de deux ondes de fortes puissances dans une fibre optique standard. Le principal avantage de ce réseau est qu'il permet d'étudier la dynamique non linéaire de la propagation de la lumière arbitrairement près de la bande interdite, ce qui demeure très délicat avec les réseaux statiques habituels.

Références

- [1] C.Martijn de Sterke and J.E. Sipe , *Progress in Optics XXXIII*, (ed. Elsevier, Amsterdam, 1994), Chap. III, pp.203-260.
- [2] C.Martijn de Sterke, *J. Opt. Soc. Am. B* 15, 2660 (1998).
- [3] B.J. Eggleton, R.E. Slusher, C. Martijn de Sterke, P.A. Krug and J.E. Sipe, *Phys. Rev. Lett.* 76, 1627 (1998).
- [4] B.J. Eggleton, C. Martij de Sterke, A.B. Aceves, J.E. Sipe, T.A. Strasser and R.E. Slusher, *Opt. Comm.* 194, 267 (1998).
- [5] S. Pitois, M. Haelterman and G. Millot, *Opt. Lett.* 26, 780 (2001) ; *J. Opt. Soc. Am. B* 19, March 2002.
- [6] W. Chen and D.L. Mills, *Phys. Rev. Lett.* 58, 160 (1987).
- [7] B.J. Eggleton, C. Martijn de Sterke and R.E. Slusher, *J. Opt. Soc. Am. B* 16, 587 (1999).

Amplification paramétrique à très large bande spectrale et gain plat dans un arrangement multi-tronçons de fibres non-linéaires.

L. Provino, A. Mussot, E. Lantz, T. Sylvestre et H. Maillotte

Laboratoire d'Optique P.M. Duffieux

U.M.R. CNRS/Université de Franche-Comté n° 6603

25030 Besançon cedex. tél. 03.81.66.64.26, fax: 03.81.66.64.23

`laurent.provino@univ-fcomte.fr`

Résumé

Un nouveau système d'amplification paramétrique optique basé sur un arrangement multi-tronçons de fibres à forte non-linéarité est théoriquement démontré. Il génère des bandes spectrales de gain plates de largeur double à quintuple de celles des amplificateurs erbium usuels. Un choix judicieux des longueurs de tronçons, de leur nombre, de leurs paramètres de dispersion de vitesse de groupe et de leur ordre d'arrangement permet d'obtenir, soit une bande de gain paramétrique plate de largeur 100 nm autour de 1550 nm pour une puissance de pompe $P_0 = 500 \text{ mW}$, soit un gain plat sur 200 nm pour une puissance de pompe $P_0 = 5 \text{ W}$.

1 Introduction

En raison de la disponibilité récente de lasers de pompe continus puissants et fiables, l'amplification paramétrique sur fibre optique apparaît maintenant comme une solution prometteuse pour les systèmes de transmissions multiplexées en longueur d'onde (WDM) et ouvre de nouvelles voies pour couvrir les fenêtres de télécommunications optiques actuelles et futures [1-6]. En plus de procurer des bandes spectrales de gain larges, les amplificateurs paramétriques optiques (OPA) présentent de nombreux avantages en comparaison des amplificateurs optiques Raman ou terres rares : souplesse spectrale, conversion simultanée en longueur d'onde, puissances de saturation élevées et facteurs de bruit faibles. Expérimentalement, il a été démontré qu'ils peuvent générer une bande de gain de plus de 200 nm de large [2], un gain net atteignant 49 dB et une efficacité de conversion de 38 dB [3]. Par ailleurs, l'homogénéité du gain est un critère primordial dans les transmissions WDM. L'obtention directe en sortie d'amplificateur de bandes spectrales de gain plates éviterait de recourir à des systèmes complexes d'égalisation de gain, sièges de pertes. Théoriquement, il a été montré que les OPA peuvent directement générer de tels profils plats autour de la dispersion nulle des fibres en utilisant, soit deux lasers de pompe de fréquences différentes [4], soit une pompe unique en gérant la dispersion de vitesse de groupe dans plusieurs tronçons de fibres successifs [5]. L'approche expérimentale de ce dernier cas a été tentée récemment, avec deux tronçons différents de fibres standard à dispersion décalée, montrant une bande de gain de largeur 75 nm lissée en son centre [6]. Cependant, les fortes puissances de pompe requises constituent une limitation majeure des OPA. Pour y remédier, l'emploi de fibres (NLF) à fort coefficient non-linéaire γ [2, 3, 7] se révèle être le meilleur choix. Dans ce travail, nous proposons et étudions théoriquement une nouvelle configuration d'OPA, composé d'un arrangement judicieux de quatre tronçons de fibres NLF présentant chacun des longueurs d'onde de dispersion

nulle λ_0 correctement ajustées. Ce système peut générer une bande de gain paramétrique large et plate. D'autres résultats sont aussi présentés, illustrant les effets des fluctuations aléatoires de λ_0 dans chaque tronçon et le fonctionnement de l'OPA multi-tronçons dans des configurations réalistes de transmissions WDM.

2 Réalisation d'une amplification paramétrique à large bande plate

Dans les OPA en configuration insensible à la phase (pas d'onde idler injectée en même temps que le signal), la forme de la courbe de gain dépend essentiellement de la fréquence de pompe, de la puissance des ondes interagissantes (pompe, signal et idler) ainsi que des caractéristiques de la fibre optique (dispersion de vitesse de groupe β_2 , coefficient γ et longueur L). Globalement, la largeur spectrale maximale de la bande de gain est fixée par le produit du coefficient γ et de la puissance de pompe P_0 , tandis que les caractéristiques de dispersion régissent le profil de la courbe de gain à faible signal et que la longueur de fibre contrôle la valeur du gain. Dans une fibre unique et avec une seule pompe, l'obtention d'un profil de gain large, dépourvu d'oscillations très prononcées, n'est pas possible pour des valeurs de gain typiquement supérieures au dB.

Le principe général de notre amplificateur multi-tronçons à gain plat est représenté schématiquement sur la figure 1 : le premier tronçon de fibre procure une bande de gain large tandis que les tronçons de fibres suivants lissent progressivement la courbe de gain générée dans la première fibre. Le nombre N minimal de fibres, ainsi que les valeurs optimales de leurs longueurs L_i ($i = 1, \dots, N$) et de leurs longueurs d'onde de dispersion nulle λ_0^i sont obtenus en résolvant l'équation de Schrödinger non-linéaire (NLSE) incluant les coefficients de dispersion de deuxième β_2 , troisième β_3 et quatrième ordre β_4 pour chaque fibre. En pratique, la valeur λ_0 peut être ajustée sur un intervalle de quelque nm autour de 1550 nm en modifiant le dopage du coeur et/ou sa dimension transverse.

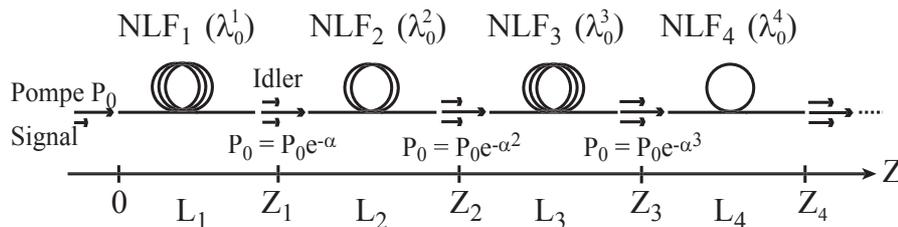


FIG. 1 – Architecture de l'amplificateur paramétrique optique à multi-tronçons de fibres.

3 Résultats numériques

Pour résoudre l'équation NLSE, nous avons utilisé la méthode numérique *split-step Fourier* [8] et la théorie analytique du mélange à quatre ondes [5, 7]. Sur l'ensemble des résultats obtenus, les deux méthodes sont en très bon accord l'une par rapport à l'autre. Les calculs prennent également en compte les pertes de puissance ($\alpha = 0.6$ dB) entre chaque tronçon de fibre [3]. Dans ce travail, nous présentons deux configurations différentes d'OPA, l'une et l'autre constituées de quatre tronçons de fibres, ce qui est le nombre minimum requis

pour obtenir une bande de gain plate. Pour tous les tronçons, le coefficient de dispersion β_3 est égal à $5,04 \times 10^{-41} \text{ s}^3.\text{m}^{-1}$, le coefficient non-linéaire γ et la dispersion du quatrième ordre β_4 sont des valeurs réalistes dans les fibres NLF [4, 7].

Pour la première configuration, nous avons utilisé une puissance de pompe de 5 W à la longueur d'onde $\lambda_p = 1550 \text{ nm}$ dans un arrangement multi-tronçons de courte longueur. Les paramètres des différentes fibres sont regroupés dans la table 2. $\Delta\lambda_0$ représente le décalage spectral de λ_0^i par rapport à la longueur d'onde de dispersion nulle $\lambda_0^1 = 1550 \text{ nm}$ de la première fibre.

TAB. 2 – Longueurs de fibres, décalages spectraux de leur longueur d'onde de dispersion nulle, coefficients de dispersion de vitesse de groupe, coefficients non-linéaires et dispersion d'ordre quatre des tronçons de fibres NLF utilisés dans la première configuration (puissance de pompe $P_0 = 5 \text{ W}$).

| Fibre | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|------------------------|------------------------|-------------------------|------------------------|
| Longueur (m) | 22 | 9 | 14 | 3 |
| $\Delta\lambda_0$ (nm) | 0 | 3,1 | -3 | -8,61 |
| β_2 ($\text{s}^2.\text{m}^{-1}$) | 0 | $1,23 \times 10^{-28}$ | $-1,19 \times 10^{-28}$ | $-3,4 \times 10^{-28}$ |
| γ ($\text{km}^{-1}.\text{W}^{-1}$) | 18 | 18 | 18 | 18 |
| β_4 ($\text{s}^4.\text{m}^{-1}$) | $-1,5 \times 10^{-55}$ | $-1,5 \times 10^{-55}$ | $-1,5 \times 10^{-55}$ | $-1,5 \times 10^{-55}$ |

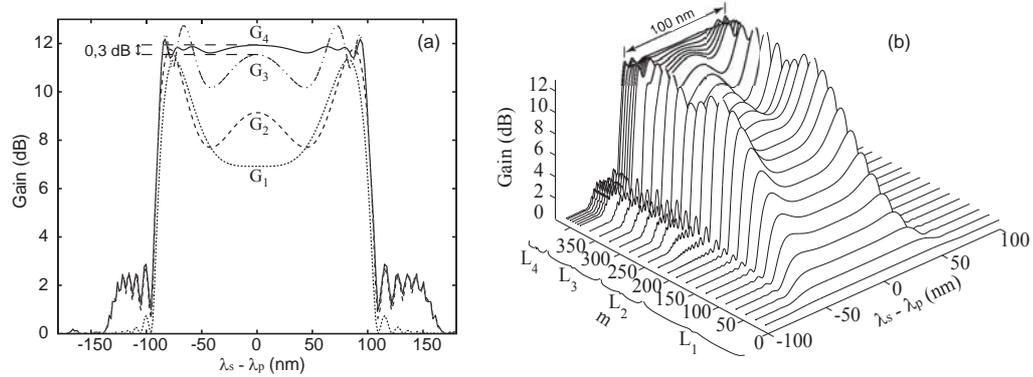


FIG. 2 – Bandes spectrales de gain d'amplificateurs paramétriques à multi-tronçons de fibres NLF pour une puissance de pompe (a) $P_0 = 5 \text{ W}$ et (b) $P_0 = 500 \text{ mW}$ (λ_s est la longueur d'onde du signal). Les courbes G_1 à G_4 représentent les spectres de gain successifs en sortie de chaque tronçon de fibre.

La figure 2 (a) montre que le système procure un gain paramétrique quasiment plat sur une bande de largeur 200 nm pour une longueur totale d'amplificateur de 48 m. L'évolution des bandes de gain paramétrique successives (G_1 à G_4) en sortie de chaque tronçon illustre la compensation progressive de l'oscillation du gain paramétrique. Les valeurs optimales de L_i et λ_0^i sont ajustées de manière telle que le gain maximum dans un tronçon considéré corresponde au gain minimum dans le tronçon précédent.

La seconde configuration étudiée est destinée à démontrer la faisabilité d'un amplificateur à faible puissance de pompe. Les résultats théoriques sont présentés sur la figure 2 (b) avec les paramètres de la table 3, montrant l'aplatissement progressif du profil de gain à faible

signal au cours de la propagation le long de la ligne d'amplification. Un gain paramétrique quasiment plat sur une bande spectrale de largeur 100 nm est obtenu pour une longueur totale d'amplificateur de 422 m et une puissance pompe $P_0 = 500$ mW à la longueur d'onde $\lambda_p = 1550$ nm. L'uniformité du gain pic-à-pic est de 0,3 dB sur 70 nm avec 11,8 dB de gain maximum.

TAB. 3 – Longueurs de fibres, décalages spectraux de leur longueur d'onde de dispersion nulle, coefficients de dispersion de vitesse de groupe, coefficients non-linéaires et dispersion d'ordre quatre des tronçons de fibres NLF utilisés dans la deuxième configuration (puissance de pompe $P_0 = 500$ mW).

| Fibre | 1 | 2 | 3 | 4 |
|-------------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| Longueur (m) | 200 | 77 | 118 | 27 |
| $\Delta\lambda_0$ (nm) | 0 | 1,49 | -1,53 | -4 |
| β_2 ($s^2.m^{-1}$) | 0 | $5,89 \times 10^{-29}$ | $-6,07 \times 10^{-29}$ | $-1,65 \times 10^{-28}$ |
| γ ($km^{-1}.W^{-1}$) | 20 | 20 | 20 | 20 |
| β_4 ($s^4.m^{-1}$) | -2.85×10^{-55} | -2.85×10^{-55} | -2.85×10^{-55} | -2.85×10^{-55} |

4 Gain paramétrique avec variation aléatoire de la longueur d'onde de dispersion nulle et performances de l'amplificateur

En raison des tolérances de fabrication, les paramètres des fibres (en particulier leur longueur d'onde de dispersion nulle) peuvent cependant fluctuer. Ceci modifie les conditions d'accord de phase entre les ondes le long d'un tronçon donné [9] et, en conséquence, change le profil du gain paramétrique. Afin d'évaluer les effets des fluctuations de λ_0 dans notre OPA, nous avons supposé que β_2 peut être exprimé statistiquement sous la forme suivante :

$$\beta_2 = A \sum_{i=1}^n \sin(\kappa_i z + \chi_i)$$

où A est une constante, $\kappa_i = \kappa_0 + r_i \Delta\kappa$, avec r_i un entier variant aléatoirement entre -1 et +1 et χ_i est la phase variant aléatoirement entre 0 et 2π . la fréquence κ_i est comprise dans l'intervalle $[\kappa_{min}, \kappa_{max}]$ dont les bornes sont déterminées par transformée de Fourier à partir de mesures précises de λ_0 faites dans une fibre à dispersion décalée [10].

Comme le montre la figure 3 (a), notre modèle statistique des fluctuations aléatoires de λ_0 est en bon accord avec les résultats expérimentaux présentés dans la référence [10] puisque la valeur moyenne et l'écart-type σ sont très proches. En incorporant ce modèle simplifié dans les simulations de l'équation NLSE, nous avons établi que l'écart-type $\sigma = 3 \times 10^{-29} s^2 m^{-1}$ de λ_0 ajoute une ondulation d'environ 2 dB dans la bande de gain et réduit la largeur de celle-ci de 20 nm. Finalement, comme les fluctuations de λ_0 sont principalement dues à la variation du rayon de coeur le long de la fibre [11], nous trouvons que la platitude initiale des OPA et leur largeur de bande seraient maintenues à condition de pouvoir assurer une fluctuation maximale $\Delta r < 0,02$ % du rayon de coeur de chaque fibre.

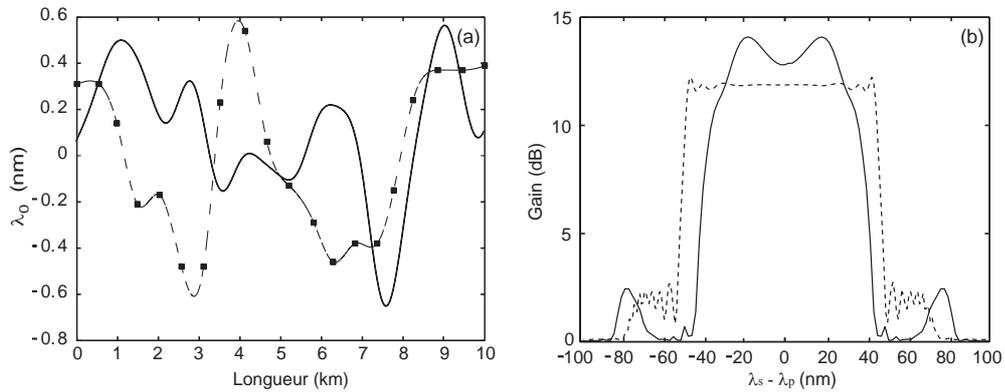


FIG. 3 – (a) Mesures expérimentales (pointillés) et modélisation théorique (trait plein) de la fluctuation aléatoire de λ_0 . (b) Gain paramétrique avec (trait plein) et sans (pointillés) fluctuations de λ_0 .

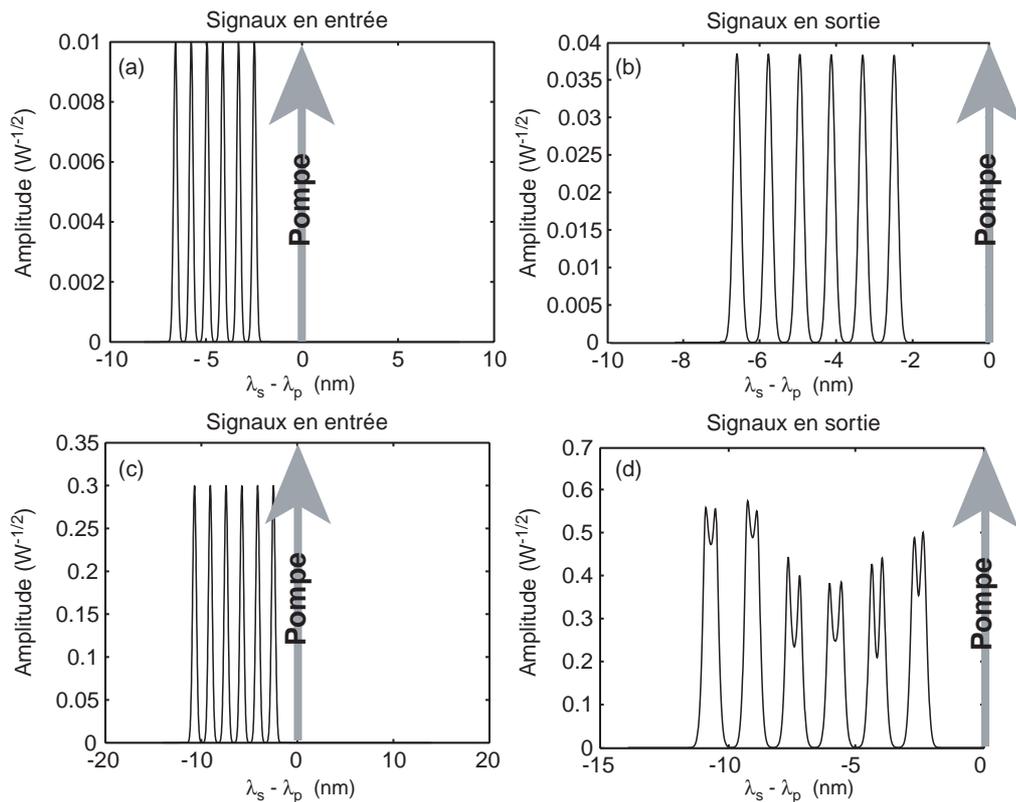


FIG. 4 – Amplification de signaux WDM dans l'OPA multi-tronçons (configuration 2; $P_0 = 500$ mW). (a) et (b) Le système est caractérisé par un espacement entre canaux de 0,8 nm et par un taux de répétition de 20 Gb/s par canal. La puissance crête d'un canal en entrée est de 0,1 mW. (c) et (d) Espacement entre canaux de 1,6 nm, taux de répétition 40 Gb/s. La puissance crête d'un canal en entrée est de 90 mW.

Enfin, nous avons analysé les conditions de fonctionnement de ce type d'OPA dans diverses configurations de transmissions WDM correspondant à la norme ITU-TG 692. Les figures 4 (a) et (b) montrent dans ce cas de signaux faibles, l'OPA ne déforme pas le peigne WDM et n'apporte pas de diaphonie. Un tel système pourrait supporter un taux de répétition total de 400 Gb/s (40x10 Gb/s, 0,8 nm d'espacement entre les canaux ou 10x20 Gb/s, 1,6 nm d'espacement entre les canaux) sans détérioration du signal. Avec une pompe de 500 mW, les figures 4 (c) et (d) montrent la déformation du peigne WDM pour des signaux relativement forts. Dans ce cas, la puissance de saturation de sortie est estimée aux environs de 100 mW.

5 Conclusion

Nous avons proposé et étudié théoriquement une nouvelle architecture d'OPA pouvant fournir un gain paramétrique presque plat sur une grande largeur de bande (100 à 200 nm selon les configurations) sans filtre d'égalisation de gain. Cet OPA est composé d'un arrangement multi-tronçons de fibres non-linéaires à dispersion contrôlée et d'une pompe unique satisfaisant les exigences des télécommunications actuelles.

Références

- [1] M.E. Marhic *et al*, *Broadband fiber-optical parametric amplifiers*, Opt. Lett. **21**, 573 (1996).
- [2] G.C. Ho *et al*, *200-nm-bandwidth fiber optical amplifier combining parametric and Raman gain*, J. Lightwave Technol. **19**, 677 (2001).
- [3] J. Hansryd et P.A. Andrekson, *Broadband continuous-wave-pumped fiber optical parametric amplifier with 49 dB gain and wavelength conversion efficiency*, IEEE Photon. Technol. Lett. **13**, 194 (2001).
- [4] M.E. Marhic *et al*, *Broadband fiber-optical parametric amplifiers and wavelength converters with low-ripple Chebyshev gain spectra*, Opt. Lett. **21**, 1354 (1996).
- [5] L. Provino *et al*, *Broadband and nearly flat parametric gain in single-mode fibers*, In Conference on Lasers and Electro-Optics'2000, Conference digest, papier Ctu12, Nice (2000).
- [6] S.E. French et J.L. Blows, *Continuous wave optical fibre parametric amplifier with flattened gain*, Optical Amplifiers and Their Applications'2001, papier PD7, Stresa, Italie (2001).
- [7] M.E. Marhic *et al*, *High-nonlinearity fiber optical parametric amplifier with periodic dispersion compensation*, J. Lightwave Technol. **17**, 210 (1999).
- [8] G.P. Agrawal, *Nonlinear fibers optics*, (Optics and Photonics, Academic Press, third edition, 2001).
- [9] M. Karlsson, *Four-wave mixing in fibers with randomly varying zero-dispersion wavelength*, J. Opt. Soc. Am. B **15**, 2269 (1998).
- [10] M. Eiselt *et al*, *Nondestructive position resolved measurement of the zero dispersion wavelength in an optical fiber*, J. Lightwave Technol. **15**, 135 (1997).
- [11] N. Kuwaki et M. Ohashi, *Evolution of longitudinal chromatic dispersion*, J. Lightwave Technol. **8**, 1476 (1990).

Génération de la fréquence somme pour les ondes optiques en milieu dissipatif

S. Residori A. Petrossian (*) et L. Gil

Institut du Non Linéaire de Nice

1361, Route des Lucioles, 06560 Sophia Antipolis

() Université d'Etat de Yerevan, 1 Manoogian Street, 375049 Yerevan, Arménie*

`residori@inln.cnrs.fr`

Résumé

Nous montrons dans un système expérimentale 1D un nouveau mécanisme d'instabilité secondaire pour une onde, qui consiste dans la génération de la fréquence somme à partir de l'onde primaire, issue de la première bifurcation.

1 Introduction

Les instabilités secondaires des structures spatiales stationnaires ont été largement étudiées autant d'un point de vue théorique qu'expérimental [1]. Par des arguments de symétrie, on montre que le doublement de période est la situation la plus fréquemment observée [2, 3]. Dans le cas des ondes, tout mécanisme général de déstabilisation doit comporter non seulement une résonance pour les longueurs d'ondes spatiales mais aussi pour les fréquences temporelles associées aux modes de base. Cela peut conduire à l'apparition de nouvelles fréquences spatiales et temporelles qui ne sont pas simplement des harmoniques des fréquences primaires. Par analogie avec les systèmes conservatifs, comme l'optique non linéaire [4] et la physique des plasmas [5], nous avons proposé un mécanisme basé sur l'interaction à trois ondes. Pour les systèmes dissipatifs, l'onde primaire, issue de la première bifurcation, agit comme onde de pompe et donne naissance à deux ondes filles, dont les fréquences spatiales et temporelles sont telles que leur sommes ou différences correspondent à celles de l'onde de base [6, 7]. Nous avons étudiée l'apparition des ondes filles sur une expérience comprenant une valve optique à cristaux liquides, LCLV (de l'anglais *Liquid Crystal Light Valve*), dans une boucle de rétroaction optique [8].

2 Description de l'expérience

L'expérience contient une LCLV dans une boucle de rétroaction optique. Cette expérience est déjà bien connue pour la formation de structures spatiales [9]. Nous l'avons modifiée en introduisant un masque en forme d'anneau, ce qui rend le système quasi-unidimensionnel et satisfait des conditions aux bords périodiques. Ceci permet la comparaison avec le modèle théorique. Quand l'intensité lumineuse dépasse le seuil de la première bifurcation, une rotation de l'image de rétroaction donne lieu à des ondes se propageant le long de l'anneau [10].

Un schéma simplifié est présenté dans la Fig.1. La LCLV se compose essentiellement d'un film nématique pris en sandwich entre une lame de verre et une lame photoconductrice sur laquelle un miroir diélectrique est déposé. Les deux parois en contact avec le cristal

liquide sont traitées de façon à induire un ancrage planaire (directeur nématique \vec{n} parallèle aux parois). Le photoconducteur se comporte comme une résistance variable qui diminue lorsque l'intensité lumineuse augmente. On applique sur la LCLV une tension sinusoïdale à la fréquence $f = 20 \text{ KHz}$ et d'amplitude r.m.s. V_0 .

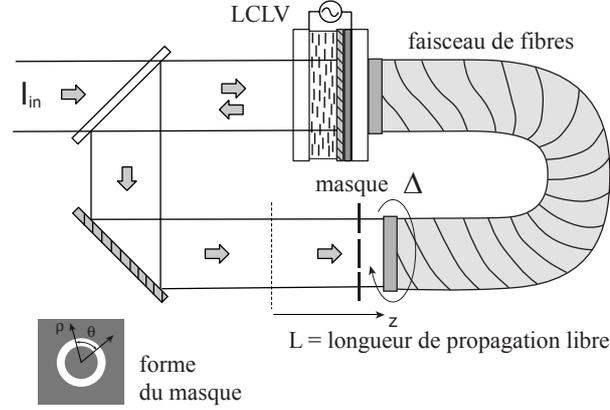


FIG. 1 – Schéma de l'expérience: la LCLV, à qui on applique une tension V_0 , est illuminée par une onde plane; l'onde réfléchie par le miroir de la LCLV est dirigée vers le photoconducteur grâce à un faisceau de fibres optiques (en gris dans le dessin). La forme du masque est montrée en bas à gauche, avec les coordonnées sur le plan transverse. Δ est l'angle de rotation de la fibre par rapport à la face avant de la LCLV.

3 Description du modèle théorique

Comme le rapport d'aspect D/l , entre le diamètre D et l'épaisseur l de l'anneau, est assez grand, le système peut être considéré quasi-1D ($D = 5 \text{ mm}$ et $l = 0.5 \text{ mm}$). Pour la géométrie choisie une rotation de la fibre d'un angle Δ correspond à un déplacement le long de l'anneau. La longueur de propagation libre de la lumière L est fixée à 5 cm . Si on adopte un système de coordonnées cylindriques $(\theta, z, r = D/2)$, et qu'on appelle I_{in} l'intensité de la lumière à l'entrée, $B(\theta, z, t)$ l'amplitude du champ optique réfléchi et $n(\theta, t)$ la variation d'indice de réfraction dans le film de cristal liquide, les équations modèle de notre système sont données par [11]

$$\begin{cases} B(\theta, z = 0, t) = \sqrt{I_{in}} e^{i(2\chi_0 d n(\theta, t))} \\ B(\theta, z = L, t) = \left[e^{\frac{iL\partial_{\zeta\zeta}}{2k_0 r^2}} B(\zeta, z = 0, t) \right]_{\zeta=\theta+\Delta} \\ \tau \frac{\partial n}{\partial t} + n - \left(\frac{l_d}{r} \right)^2 \frac{\partial^2 n}{\partial \theta^2} = |B(\theta, z = L, t)|^2 \end{cases} \quad (152)$$

où χ_0 est la nonlinéarité de la LCLV, d l'épaisseur du film nématique, $k_0 = 2\pi/\lambda$ le nombre d'onde optique, τ le temps de réponse caractéristique et l_d la longueur de diffusion de la réorientation du cristal liquide.

Le rapport entre la longueur de diffusion et celle de diffraction est exprimé par le nombre sans dimensions $\sigma = L/(k_0 l_d^2)$. Dans notre expérience, où l'on peut estimer que l_d est

approximativement de $40 \mu m$, $\sigma \simeq 3$ et le système peut être considéré comme fortement dissipatif. En fait, pour cette valeur de σ tous les modes linéaires sont fortement amortis par la diffusion, comme on peut facilement le vérifier par l'analyse linéaire du modèle Eq.(152) [11, 10]. On peut aussi vérifier que la partie imaginaire de la valeur propre associée au premier mode instable est très proche de zéro. Par conséquent, près du point de bifurcation l'onde primaire est presque stationnaire. Quand on augmente l'intensité incidente I_{in} , la vitesse de phase de l'onde augmente. La bifurcation secondaire a lieu quand les conditions de résonances sont satisfaites simultanément pour les fréquences spatiales et temporelles.

4 Résultats expérimentaux et comparaison avec le modèle.

Dans les conditions expérimentales choisies, l'onde primaire se compose de 43 cellules le long de l'anneau. En augmentant l'intensité lumineuse incidente on observe une instabilité secondaire caractérisée par l'apparition simultanée de cellules plus grandes et plus petites. Dans la Fig.2 nous montrons deux images instantanées des ondes qui se propagent le long

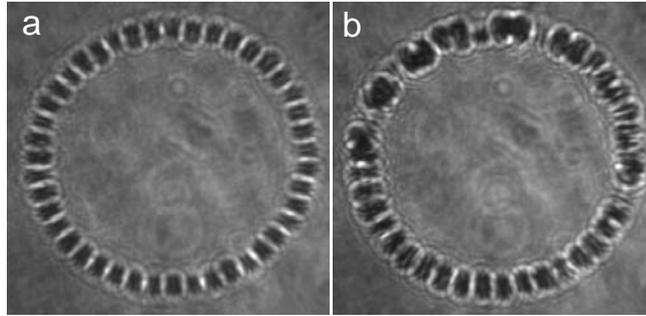


FIG. 2 – Images des ondes se propageant le long de l'anneau: a) $I_{in} = 5 \text{ mW/cm}^2$ et b) $I_{in} = 11 \text{ mW/cm}^2$.

de l'anneau. L'angle de rotation de la fibre est fixé à $\Delta = 13^\circ$. Les images correspondent à deux valeurs différentes d'intensité de la lumière incidente I_{in} , respectivement en dessous et au dessus du seuil de la bifurcation secondaire. La longueur d'onde primaire est de $365 \mu m$, ce qui donne un nombre d'onde $q_1 = (2\pi/\text{Lambda})/(2\pi/L) = 43$, où q , normalisé à la longueur L de l'anneau, mesure directement le nombre de cellules le long de l'anneau. Quand l'instabilité secondaire se développe, on observe l'apparition simultanée des cellules plus grandes et plus petites. Cela montre que l'onde primaire a donné naissance à deux ondes filles, chacune à une fréquence spatiale respectivement plus grande et plus petite.

Sur la Fig.3 on voit le diagramme spatio-temporel qui illustre le phénomène. La résolution temporelle entre deux lignes successives est de 0.1 sec dans a,b et de 0.04 sec dans c,d. Il faut noter que la vitesse de phase de l'onde augmente avec l'intensité incidente.

Pour montrer que l'accord de fréquence est réalisé en même temps pour les fréquences spatiales et celles temporelles nous avons fait une transformée de Fourier à 2D du diagramme spatio-temporel correspondant à une instabilité secondaire bien développée ($I_{in} = 11 \text{ mW/cm}^2$). Le résultat est montré dans le cadre en bas de la Fig.3. Même si la résolution temporelle n'est pas optimale (à cause de la dynamique qui est très lente), on peut distinguer clairement trois composantes qui correspondent aux trois ondes (q_i, ω_i) , $i = 1, 2, 3$, dans le plan $q - \omega$. Si on appelle (q_1, ω_1) l'onde primaire, on peut voir que la somme vecto-

rielle de (q_1, ω_1) et (q_2, ω_2) satisfait les conditions de résonance $q_1 + q_2 = q_3$ et $\omega_1 + \omega_2 = \omega_3$. Les composantes les plus externes du spectre correspondent aux harmoniques de l'onde primaire. Pour vérifier plus précisément les conditions de résonance nous avons mesuré le

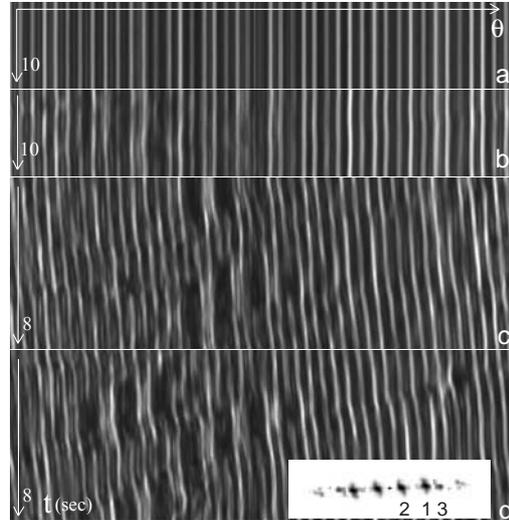


FIG. 3 – Diagrammes spatio-temporaux des ondes pour $I_{in} = 5, 8, 9, 11 \text{ mW/cm}^2$ en a, b, c et d, respectivement. Dans le cadre en bas: spectre spatio-temporel correspondant au cas d; 1, 2 et 3 marquent les trois ondes qui participent au mélange.

nombre d'onde en faisant une transformée de Fourier 1D le long de la direction spatiale et en moyennant le résultat le long de la direction temporelle. On obtient ainsi le spectre spatial correspondant à chaque diagramme spatio-temporel. La somme de fréquence dans le domaine spatiale est donnée par $q_1 = 43$, $q_2 = 17$ et $q_3 = q_1 + q_2 = 60$. En correspondance, dans le spectre temporel on trouve trois composantes $\nu_i = \omega_i/2\pi$ $i = 1, 2, 3$, tels que $\nu_1 = 0.09 \pm 0.01$, $\nu_2 = 0.06 \pm 0.01$ et $\nu_3 = 0.15 \pm 0.01 \text{ sec}^{-1}$. En analysant le spectre 2D associé à cette mesure nous avons vérifié que la fréquence temporelle ν_1 est associée avec l'onde primaire à q_1 et que ν_2 et ν_3 sont associées à q_2 et q_3 , respectivement. Aussi nous avons vérifié qu'aucune des ondes filles coïncide avec le deuxième mode instable de l'analyse linéaire. En analogie avec l'optique nonlinéaire [4], les conditions de résonance ne sont pas en général satisfaites. En fait nous observons la somme des fréquences seulement pour une intensité incidente suffisamment élevée et pour un angle de rotation suffisamment grand. L'intensité doit être assez grande pour assurer que les modes linéaires associés aux ondes filles ne soient pas trop amortis et l'angle Δ doit être différent de zéro pour que l'on puisse parler de relation de dispersion. Dans la Fig.4a on reporte le nombre d'onde q mesuré pour différents angles de rotation de la fibre Δ et pour une valeur de l'intensité incidente $I_{in} = 9 \text{ mW/cm}^2$. Pour $\Delta = 0$ ou petit, le spectre de puissance spatial est constitué d'une seule composante qui correspond à l'onde primaire. Pour Δ plus grand que 13° , on peut clairement distinguer trois composantes dans le spectre de puissance. L'onde primaire, qui correspond à l'amplitude la plus élevée, est décomposée en deux ondes filles, l'une à fréquence plus élevée et l'autre à fréquence plus petite. Les deux ondes filles sont indiquées par les flèches sur la figure. Dans la Fig.5a on reporte les amplitudes de l'onde primaire et de l'onde secondaire en fonction de l'intensité incidente I_{in} et pour $\Delta = 13^\circ$. Les amplitudes normalisées sont données par $\alpha_i = A_i/\sum_i A_i$, où A_i est l'amplitude de

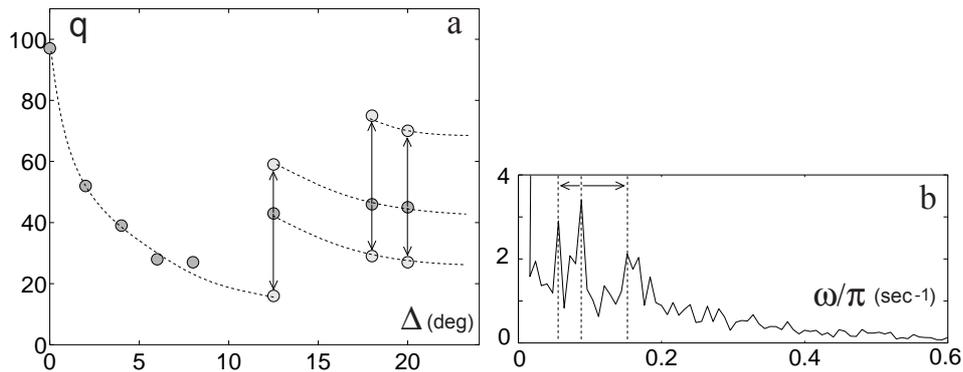


FIG. 4 – a) Nombre d'onde q mesuré en fonction de l'angle Δ de rotation de la fibre; les cercles plus foncés correspondent à l'onde primaire. b) Spectre temporel à $\Delta = 13^\circ$. Les flèches indiquent les composantes de la fréquence somme; les lignes en pointillé sont des guides pour les yeux.

chaque onde pour $i = 1, 2, 3$. On peut voir que l'onde primaire α_1 est fortement diminuée par le processus et qu'il y a une bifurcation pour la quelle la plus part de l'énergie initiale est associée à l'onde secondaire α_2 . En correspondance, α_3 reste à peu près constante. Si on trace le rapport α_2/α_1 , comme on montre dans la Fig.5b, on observe un scaling avec la distance au seuil. Dans la Fig.5b on montre aussi une partie du diagramme spatio-temporel enregistré pour $I_{in} = 14 \text{ mW/cm}^2$, quand l'onde secondaire α_2 est dominante.

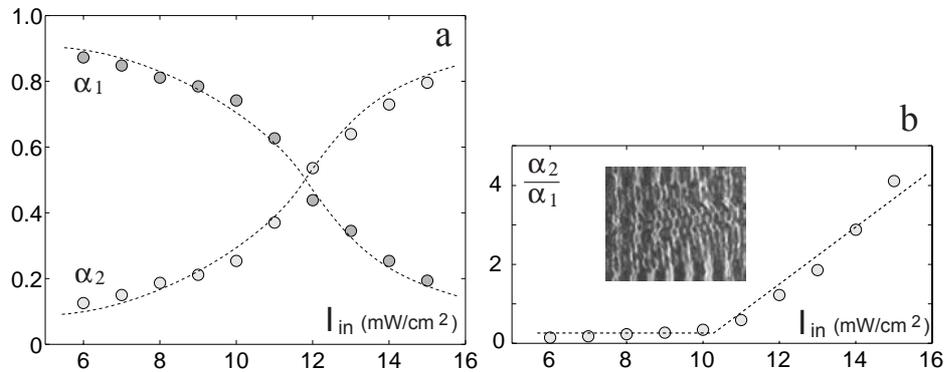


FIG. 5 – a) Amplitudes normalisées α_1 et α_2 en fonction de I_{in} . b) Diagramme de bifurcation pour le rapport α_2/α_1 ; inseré dans la figure: une portion du diagramme spatio-temporel pour $I_{in} = 14 \text{ mW/cm}^2$.

5 Conclusions

Tous les résultats ici montrés sont en accord avec la prédiction théorique qu'une possible instabilité secondaire pour une onde est la génération de la fréquence somme. D'autres instabilités secondaires peuvent apparaître. En particulier on pourrait imaginer que l'onde primaire passe par une bifurcation de Hopf donnant lieu à une nouvelle fréquence temporelle. Cette fréquence se mélangeant avec la première, elle donnerait ensuite la troisième

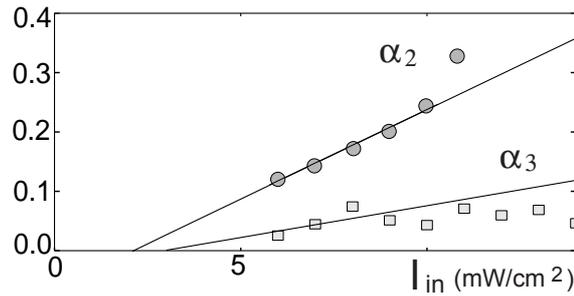


FIG. 6 – α_2 et α_3 en fonction de I_{in} et près du seuil pour l'instabilité secondaire. Les lignes sont un fit linéaire.

onde. Il est possible décider entre ce mécanisme et la génération de la fréquence somme en regardant les taux de croissance linéaire des ondes filles. En fait dans le cas d'une bifurcation de Hopf l'onde associée à la nouvelle fréquence devrait croître plus vite que l'onde résultante du mélange de celle-ci avec l'onde primaire. Dans la Fig.6 nous montrons les amplitudes des ondes filles en fonction de l'intensité I_{in} près du seuil de l'instabilité secondaire. On peut voir clairement qu'il y a un seuil commun pour les deux ondes et que leurs amplitudes croissent à la même vitesse. Il faut noter que les amplitudes sont mesurées dans le spectre de puissance des signaux spatio-temporel, donc elle sont en fait des amplitudes carrées. Cela signifie que le scaling linéaire est en réalité un scaling en puissance 1/2 pour les amplitudes. Celle ci est une preuve que les deux ondes filles sont engendrées en même temps et par le même mécanisme d'instabilité secondaire.

Références

- [1] P. Manneville, *Dissipative structures and weak turbulence*, (Academic Press, San Diego 1990).
- [2] P. Coullet and G. Iooss, Phys. Rev. Lett. **64**, 866 (1990); L. Gil, EuroPhys. Lett. **48**, 156 (1999).
- [3] L. Gil, Physica D **147**, 300 (2000).
- [4] see e.g. R.W. Boyd, *Nonlinear Optics* (Academic Press Inc., San Diego, 1992).
- [5] see e.g. P.A. Robinson, Rev. of Mod. Phys. **69**, 507 (1997).
- [6] L. Gil, A. Petrossian, S. Residori, *Three-wave- interaction in dissipative systems: a new way towards secondary instabilities*, to be published in Physica D, 2001.
- [7] S. Residori, A. Petrossian and L. Gil *Sum-frequency generation in dissipative systems: experimental evidence for optical wave patterns* submitted to Phys. Rev. Lett 2002.
- [8] S.A. Akhmanov, M.A. Vorontsov and V.Yu. Ivanov, JETP Lett. **47** 707 (1988).
- [9] see e.g. F.T. Arecchi, S. Boccaletti and P.L. Ramazza, Physics Reports **318**, 1 (1999).
- [10] P.L. Ramazza, P. Bigazzi, E. Pampaloni, S. Residori and F.T. Arecchi, Phys. Rev. E **52** 5524 (1995).
- [11] G. d'Alessandro and W.J. Firth, Phys. Rev. A **46** 537 (1992).

Modes de propagation et résonance stochastique dans un réseau d'atomes froids

M. Schiavoni, F.-R. Carminati, L. Sanchez-Palencia, F. Renzoni et G. Grynberg

Laboratoire Kastler-Brossel, Département de Physique de l'Ecole Normale Supérieure

24, Rue Lhomond, 75231 Paris Cedex 05, France

`schiavon@lkb.ens.fr`

Résumé

Nous avons observé le phénomène de résonance stochastique pour des modes de propagation Brillouin dans un réseau optique dissipatif. Ces modes ont été excités en appliquant une modulation du potentiel avec une vitesse de phase égale à la vitesse du mode. Leur amplitude a été caractérisée par la vitesse du centre de masse (CdM) du nuage atomique. Nous avons étudié la vitesse du CdM à la résonance Brillouin en fonction du taux de pompage optique (bruit) pour une profondeur fixée des puits de potentiel. Nous avons observé une résonance pour la vitesse du CdM en fonction du taux de pompage optique, proportionnel à l'amplitude du bruit. Ceci correspond à l'observation expérimentale d'une résonance stochastique dans un potentiel périodique dans un régime de faible friction.

Une particule piégée dans un puits de potentiel représente un modèle utile pour la compréhension d'une grande variété de phénomènes. L'extension à un double puits de potentiel modulé périodiquement en présence d'une force aléatoire implique une dynamique non-linéaire riche, permettant la modélisation d'un grand nombre de phénomènes qui vont de la géophysique [1, 2], aux lasers en anneau bistables [3], aux réseaux de neurones [4]. Ce système est le siège d'un phénomène de *résonance stochastique* (RS [5, 6]): la réponse à un signal d'entrée (la modulation) montre une dépendance résonnante avec le niveau de bruit (l'amplitude de la force aléatoire), ce qui implique qu'une augmentation du niveau de bruit peut induire une meilleure synchronisation entre le mouvement de la particule et la modulation du potentiel.

Le phénomène de résonance stochastique n'est pas restreint à des puits doubles de potentiel en présence d'une force aléatoire, et de nouveaux types de résonance stochastique ont été proposés dans plusieurs systèmes, comme des systèmes monostables, des systèmes bistables en présence d'un bruit modulé périodiquement, et d'autres encore [7, 8, 9, 10, 11, 12, 13]. En particulier, un grand intérêt a été consacré à l'analyse de la RS dans des *potentiels périodiques* [8, 9, 10, 11, 12, 13]. Plusieurs systèmes physiques sont décrits en terme de structures périodiques et il est maintenant bien établi que le bruit joue un rôle majeur dans les mécanismes de transport dans ces structures. Par exemple, l'étude du mouvement sous-amorti d'une particule dans un potentiel périodique a montré que c'est l'action combinée d'effets inertiels et d'effets thermiques qui détermine les caractéristiques particulières de certains métaux [14, 15]. C'est précisément le régime étudié dans notre expérience: nous avons examiné le phénomène de RS en utilisant un réseau optique dissipatif [16] comme système périodique. Les champs des lasers créent le potentiel périodique et induisent l'effet stochastique de pompage optique. La friction pour les atomes bien localisés au fond d'un puits de potentiel est très faible, et donc les effets inertiels sont importants (régime

sous-amorti). Nous montrons l'observation expérimentale d'une RS dans les modes de propagation d'un réseau optique dissipatif et nous donnons une analyse théorique des résultats expérimentaux.

La structure périodique tridimensionnelle est engendrée par l'interférence de quatre faisceaux lasers polarisés linéairement dans la configuration appelée 3Dlin \perp lin (Fig. 1-Gauche) [16]. Il en résulte un potentiel optique dont les minima sont situés aux noeuds d'un réseau orthorhombique et sont associés à des polarisations circulaires pures (alternativement σ^+ et σ^-). Les pas du réseau, à savoir la distance selon un axe principal entre deux sites de même polarisation, sont $\lambda_{x,y} = \lambda/\sin\theta$ and $\lambda_z = \lambda/(2\cos\theta)$, où λ est la longueur d'onde du champ laser et 2θ , l'angle entre deux faisceaux copropageants.

Les modes de propagation Brillouin dans ces réseaux optiques ont été identifiés pour la première fois par des simulations Monte Carlo [18]. Ils consistent en une séquence de demi-oscillations dans un puits de potentiel suivies par un processus de pompage optique dans un puits adjacent, et ainsi de suite (Fig. 1-Droite).

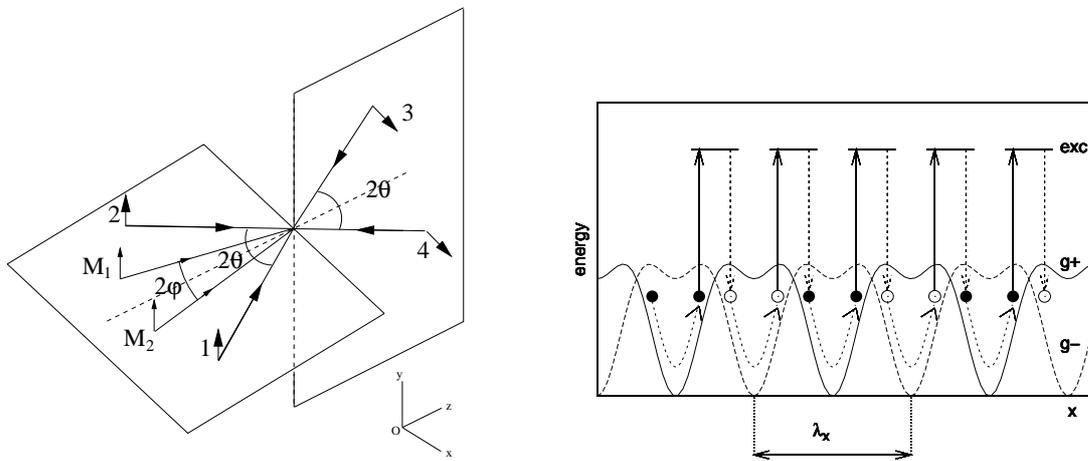


FIG. 1 – (Gauche) Configuration des faisceaux lasers pour le réseau optique 3D lin \perp lin. Les faisceaux 1-4 engendrent un potentiel périodique tridimensionnel. Deux faisceaux supplémentaires (M_1 et M_2) sont introduits pour créer une modulation du potentiel se déplaçant dans la direction x . (Droite) Trajectoire atomique correspondant au mode Brillouin dans la direction x . Les courbes de potentiel (g_+ et g_-) sont la coupe selon $y=z=0$ du potentiel lumineux pour une transition $J_g=1/2 \rightarrow J_e=3/2$ avec une configuration des lasers 3D lin \perp lin.

La vitesse du mode Brillouin se calcule aisément si l'on néglige les corrections dues à l'anharmonicité du potentiel. La durée d'une demi-oscillation pour un atome est dans ce cas $\tau = \pi/\Omega_x$, où Ω_x est la fréquence de vibration selon x . Ceci correspond à une vitesse moyenne

$$\bar{v} = \frac{\lambda_x/2}{\tau} = \frac{\lambda\Omega_x}{2\pi \sin\theta}. \quad (153)$$

Le processus de transport dominant dans un réseau dissipatif est la diffusion spatiale [19, 20]. Pour exciter les modes Brillouin, il est nécessaire de créer une modulation du potentiel avec une vitesse de phase égale à celle du mode. Ceci est fait en introduisant deux faisceaux lasers additionnels, polarisés linéairement selon y (M_1 et M_2 , dans la Fig. 1-Gauche). Ils sont symétriques par rapport à l'axe z et se propagent dans le plan xOz ,

et forment un angle 2φ . Ces faisceaux sont suffisamment désaccordés par rapport aux faisceaux du réseau pour négliger les interférences avec ces-derniers. De cette façon, la figure d'interférence se propageant est dues seulement aux champs M_1 et M_2 , et consiste en une modulation de l'intensité lumineuse avec une vitesse de phase le long de x :

$$v_\phi = \frac{\delta_{ps}}{|\Delta\vec{k}|} = \frac{\delta_{ps}}{2k_m \sin \varphi} \quad (154)$$

où δ_{ps} est le désaccord entre les champs M_1 et M_2 , et $\Delta\vec{k} = \vec{k}_{M_1} - \vec{k}_{M_2}$ la différence entre les vecteurs d'onde ($|\vec{k}_{M_j}| \simeq k = 2\pi/\lambda$, $j = 1, 2$). Ceci implique un potentiel lumineux, qui pour une transition atomique $1/2 \rightarrow 3/2$ prend la forme:

$$U_\pm(\vec{r}) = U_\pm^0(\vec{r}) + \delta U \cdot \cos[(\Delta k_x x - \delta_{ps} \cdot t)] \quad (155)$$

avec U_\pm^0 le potentiel lumineux du réseau seul:

$$U_\pm^0(\vec{r}) = \frac{8\hbar\Delta'_0}{3} [\cos^2(k_x x) + \cos^2(k_y y) \mp \cos(k_x x) \cos(k_y y) \cos(k_z z)] , \quad (156)$$

et $\delta U = 4\hbar\Delta'_{0,m}/3$ l'amplitude de la modulation du potentiel. Δ'_0 et $\Delta'_{0,m}$ représentent respectivement les déplacements lumineux dus aux champs lasers du réseau et de la modulation. Pour $v_\phi = \bar{v}$, i.e. $\delta_{ps} = \pm\Omega_B$, avec

$$\Omega_B \equiv \frac{2 \sin \varphi}{\sin \theta} \Omega_x , \quad (157)$$

on s'attend à ce que le mode Brillouin soit excité, les atomes suivant la modulation du potentiel. Ceci est confirmé par des simulations Monte Carlo (voir Fig. 2).

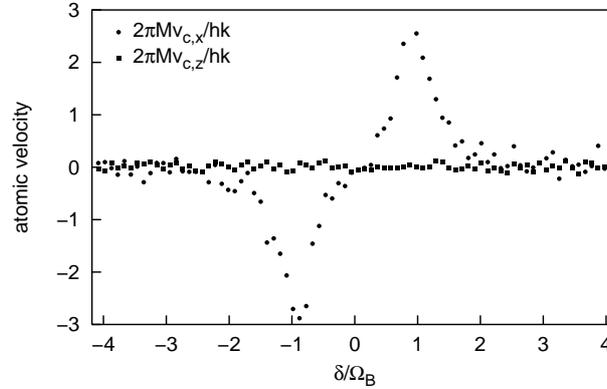


FIG. 2 – Résultats numériques pour la vitesse du CdM du nuage atomique en fonction du désaccord δ_{ps} entre les deux faisceaux de modulation. L'angle du réseau est $\theta = 30^\circ$, le désaccord à résonance $\Delta = -10\Gamma$ et le déplacement lumineux par faisceaux $\Delta'_0 = -200\omega_r$. Ici Γ et ω_r sont respectivement la largeur de l'état excité et la pulsation de recul de l'atome. Les faisceaux de modulation forment un angle $2\varphi = 10^\circ$, leur désaccord est $\Delta_m = -30\Gamma$ et le déplacement lumineux par faisceau correspondant est $\Delta'_{0,m} = -20\omega_r$.

Pour un potentiel modulé U_\pm et un taux de pompage optique Γ'_0 donné, nous avons calculé la position du centre de masse (CdM) du nuage atomique en fonction du temps d'interaction, pour différentes valeurs du désaccord δ_{ps} entre les champs M_1 et M_2 . L'application

d'une modulation induit un mouvement du CdM, dont la vitesse v_c dépend fortement de la vitesse de la modulation, et donc du désaccord δ_{ps} . Deux résonances apparaissent centrées aux fréquences $\delta_{ps} = \pm\Omega_B$ (Fig. 2). Elles correspondent à l'excitation du mode Brillouin dans la direction $\pm x$: pour $\delta_{ps} = \pm\Omega_B$, la vitesse de la modulation est égale à celle du mode de propagation, et les atomes suivent la modulation, alors que pour de vitesses de modulation très différentes de celle du mode Brillouin ($|\delta_{ps}| \gg \Omega_B$ ou $|\delta_{ps}| \ll \Omega_B$), la dynamique des atomes n'est pas perturbée et le CdM du nuage atomique ne bouge pas. Cette analyse montre que l'excitation du mode Brillouin peut être détectée en observant un déplacement global du CdM du nuage atomique. Ceci sera la stratégie utilisée dans l'expérience.

Dans notre expérience, des atomes de ^{87}Rb sont refroidis et piégés dans un piège magnéto-optique. Les faisceaux piégeants et le champ magnétique sont soudainement éteints et simultanément les quatre faisceaux du réseau allumés. Après 10ms de thermalisation des atomes dans le réseau, les deux faisceaux lasers de modulation sont allumés. L'angle pour les faisceaux du réseau est $\theta = 30^\circ$, alors que celui entre les deux faisceaux de modulation est $2\varphi = 37^\circ$. Les faisceaux de modulation sont issus d'un laser additionnel, et leur désaccord relatif est contrôlé par des modulateurs acousto-optiques. L'utilisation de lasers différents pour les faisceaux du réseau et ceux de la modulation évite tout battement entre ceux-ci même lorsque le désaccord entre les champs lasers du réseau et de la modulation n'est pas trop grand. Nous avons étudié le transport d'atomes dans le réseau optique par imagerie directe du nuage atomique avec une caméra CCD. Nous avons vérifié que pour un désaccord δ_{ps} fixé, à savoir pour une vitesse de modulation donnée, le mouvement du CdM du nuage atomique est rectiligne uniforme, et nous avons pu en déterminer la vitesse v_c . En répétant les mesures pour différents désaccords entre M_1 et M_2 , nous avons obtenu les composantes selon x et z de la vitesse du CdM v_c en fonction de δ_{ps} , comme le montre la Fig. 3.

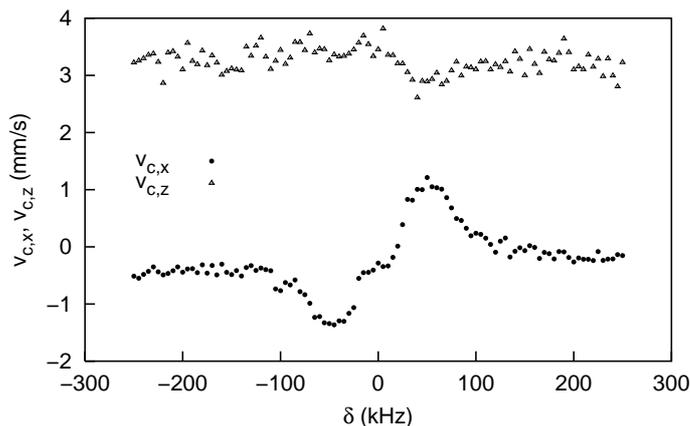


FIG. 3 – Résultats expérimentaux pour la vitesse du CdM en fonction du désaccord δ entre les faisceaux de modulation. Les paramètres du réseau sont: désaccord $\Delta/(2\pi) = -45.6$ MHz, intensité par faisceau $I = 2.3$ mW/cm², angle $\theta = 30^\circ$. Avec ces paramètres $\Omega_x/(2\pi) \simeq 45$ kHz. Les paramètres pour la modulation sont: $I_{M1} \simeq I_{M2} \simeq 0.5$ mW/cm², $\Delta_m/(2\pi) = -44$ MHz, angle $2\varphi = 37^\circ$. On en déduit à partir de (157) $\Omega_B \simeq 55$ KHz.

La composante x présente deux résonances symétriques par rapport à $\delta_{ps} = 0$ et en très bon accord avec la valeur $\Omega_B \simeq 55\text{kHz}$ que l'on peut déduire des paramètres du réseau à travers l'Eq. (157). Au contraire, les données pour la composante z de la vitesse $v_{c,z}$ ne montrent pas de résonance, le décalage par rapport à la valeur nulle étant dû à la pression de radiation induite par l'ajout des faisceaux de modulation. Ces résultats sont en accord avec l'analyse numérique précédente et constituent l'observation expérimentale directe des modes Brillouin via la détection du mouvement du CdM du nuage atomique.

Les modes de propagation Brillouin sont déterminés par la synchronisation d'oscillations dans un puits de potentiel et de sauts au puits suivants produits par le pompage optique. Nous avons étudié l'amplitude du mode, caractérisée par la vitesse du CdM du nuage d'atomes $v_c(\delta_{ps} = +\Omega_B)$, en fonction du taux de pompage optique Γ'_0 pour un potentiel modulé donné. Même si on attend que $v_{c,x}(\delta_{ps} = +\Omega_B)$ et $v_{c,x}(\delta_{ps} = -\Omega_B)$ aient la même dépendance en Γ'_0 , il est expérimentalement plus simple de caractériser l'amplitude du mode par le paramètre ξ

$$\xi = v_{c,x}(\delta_{ps} = +\Omega_B) - v_{c,x}(\delta_{ps} = -\Omega_B) \quad (158)$$

de la courbe des vitesses du CdM (Fig. 3). De cette façon, on supprime le problème d'un éventuel déplacement uniforme du nuage atomique le long de x dû à la pression de radiation des faisceaux de modulation, si ceux-ci n'ont pas exactement la même intensité. Nous avons étudié le paramètre ξ à la résonance Brillouin, en fonction du taux de pompage optique Γ'_0 ($\Gamma'_0 \propto I/\Delta^2$), en maintenant fixe la profondeur des puits de potentiel U_0 ($U_0 \propto I/\Delta$). Nous avons gardé constants l'intensité et le désaccord Δ_m des faisceaux de modulation. Les résultats de nos mesures pour ξ sont présentés sur la Fig. 4. On observe l'allure typique d'une RS: le paramètre ξ augmente avec Γ'_0 pour des faibles valeurs du taux de pompage optique; on atteint un maximum correspondant à la synchronisation entre demi-oscillations dans un puits et pompage optique dans le puits suivant; enfin pour une valeur trop élevée de Γ'_0 , on perd la synchronisation et ξ décroît. Nous avons trouvé des résultats analogues avec les simulations numériques, en accord avec nos précédents résultats obtenus dans le cas d'une configuration de modulation différente [21].

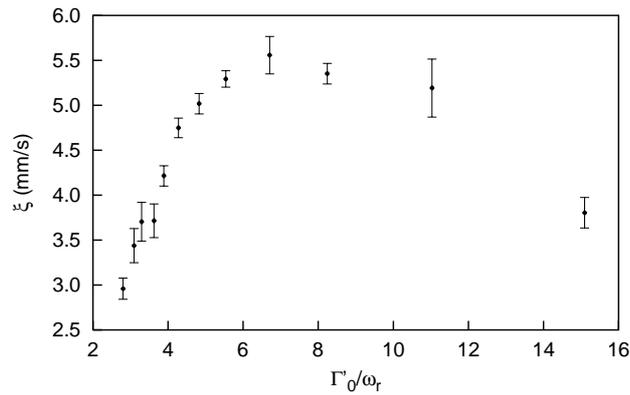


FIG. 4 – Résultats expérimentaux pour le paramètre $\xi = v_{c,x}(\delta_{ps} = +\Omega_B) - v_{c,x}(\delta_{ps} = -\Omega_B)$ en fonction du taux de pompage Γ'_0 en gardant fixe la profondeur des puits et l'amplitude de modulation. Le déplacement lumineux par faisceau vaut $\Delta'_0 = 37.5\omega_r$. Les paramètres des faisceaux de modulation sont les mêmes que Fig 3.

Ce scénario de RS a une importante caractéristique par rapport au modèle que l'on considère d'habitude pour l'analyse de la RS, dans lequel le faible signal de modulation a une fréquence bien plus faible que celle de relaxation dans un des états stable du système. Tout au contraire ici le bruit dû au pompage est précisément synchronisé avec le mouvement des atomes à l'intérieur de chaque puits de potentiel.

En conclusion, nous avons montré l'observation expérimentale d'une résonance stochastique pour les modes de propagation Brillouin dans un réseau optique dissipatif. Ces modes ont été excités en appliquant une modulation du potentiel avec vitesse de phase v_ϕ égale à la vitesse du mode \bar{v} . Il s'en suit un mouvement du CdM du nuage atomique et nous avons pu détecter l'excitation du mode en observant une dépendance résonnante de la vitesse du CdM en fonction de la vitesse de la modulation, avec un maximum pour $v_\phi = \bar{v}$. Nous avons ensuite observé le phénomène de RS dans notre réseau optique, en étudiant la vitesse du CdM à la résonance Brillouin en fonction du taux de pompage optique en gardant constante la profondeur des puits de potentiel et l'amplitude de modulation.

Nous remercions Franck Laloë et Cécile Robilliard pour leur intérêt à notre travail et Yanko Todorov pour ses commentaires sur le manuscrit. Ce travail de recherche a été financé par le CNRS et la Région Ile de France sous le contrat E.1220 "Atomes ultrafroids: vers de nouveaux états de la matière". Le Laboratoire Kastler Brossel est une unité mixte de recherche de l'Ecole Normale Supérieure et de l'Université Pierre et Marie Curie associée au Centre National de la Recherche Scientifique (CNRS).

Références

- [1] R. Benzi, S. Sutera, A. Vulpiani, *J. Phys. A* **14**, L453, (1981).
- [2] C. Nicolis, *Tellus* **34**, 1, (1982).
- [3] B. McNamara, K. Wiesenfeld, R. Roy, *Phys. Rev. Lett.* **60**, 2626, (1988).
- [4] J.K. Douglass, L. Wilkens, E. Pantazelou, F. Moss, *Nature* **365**, 337, (1993).
- [5] K. Wiesenfeld, F. Moss, *Nature* **373**, 33, (1995).
- [6] L. Gammaitoni, P. Hänggi, P. Jung, F. Marchesoni, *Rev. Mod. Phys.* **70**, 223, (1998).
- [7] M.I. Dykman, D.G. Luchinsky, R. Mannella, P.V.E. McClintock, N.D. Stein, N.G. Stocks, *J. Stat. Phys.* **70**, 479, (1993).
- [8] G. Hu, *Phys. Lett. A* **174**, 247, (1993).
- [9] L. Fronzoni, R. Mannella, *J. Stat. Phys.* **70**, 501, (1993).
- [10] F. Marchesoni, *Phys. Lett. A* **231**, 61, (1997).
- [11] Y.W. Kim, W. Sung, *Phys. Rev. E* **57**, R6237, (1998).
- [12] D. Dan, M.C. Mahato, A.M. Jayannavar, *Phys. Rev. E* **60**, 6421, (1999).
- [13] J.-D. Bao, *Phys. Rev. E* **62**, 4606, (2000).
- [14] R.D. Isaac, R.B. Schwarz, A.V. Granato, *Phys. Rev. B* **18**, 4143, (1978).
- [15] E.B. Kolomeisky, T. Curcic, J.P. Straley, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 1775, (1995).
- [16] G. Grynberg, C. Mennerat-Robilliard, *Phys. Rep.* **355**, 335, (2001).
- [17] J.-Y. Courtois, S. Guibal, D.R. Meacher, P. Verkerk, G. Grynberg, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 40, (1996).
- [18] K.I. Petsas, G. Grynberg, J.-Y. Courtois, *Eur. Phys. J. D* **6**, 29, (1999).
- [19] F.-R. Carminati, M. Schiavoni, L. Sanchez-Palencia, F. Renzoni, G. Grynberg, *Eur. Phys. J. D* **17**, 249, (2001).
- [20] L. Sanchez-Palencia, P. Horak, G. Grynberg, *Eur. Phys. J. D* **18**, 353, (2002).
- [21] L. Sanchez-Palencia, F.-R. Carminati, M. Schiavoni, F. Renzoni, G. Grynberg, *Phys. Rev. Lett.* (2002), à paraître.

Diffusion anormale multifractale dans le comportement natatoire d'organismes marins

François G. Schmitt¹ et Laurent Seuront²

(1) *VUB, Dept. Mécanique des fluides
2, Pleinlaan, B-1050 Bruxelles*

(2) *Station Marine de Wimereux, USTL
28 avenue Foch, BP80, F-62930 Wimereux
francois@stro.vub.ac.be*

Résumé

La connaissance des caractéristiques statistiques des mouvements des animaux dans un environnement spatio-temporel variable est nécessaire pour comprendre comment ils se nourrissent, se reproduisent, et évitent leurs prédateurs. Nous considérons ici la trajectoire d'un copépode (crustacé zooplanctonique), correspondant à un élément important de la chaîne alimentaire.

Une trajectoire 3D d'un copépode est enregistrée en laboratoire, dans un aquarium (sans turbulence) en utilisant 2 caméras digitales. Le copépode présente une trajectoire très structurée, avec des mouvements successifs d'amplitudes très intermittentes. Nous analysons cette trajectoire 3D dans le cadre de la diffusion anormale: nous montrons que la marche du copépode est une marche aléatoire multifractale, caractérisée par une fonction invariante d'échelle des moments $\zeta(q)$ non-linéaire, pour la distance parcourue en fonction du temps. Ce type très spécifique de trajectoire pourrait s'expliquer par le fait que le copépode a adopté, au cours de l'évolution, un comportement natatoire lui permettant d'optimiser ses dépenses énergétiques pour la recherche de nourriture.

1 Introduction

Pour la plupart des animaux, terrestres comme aquatiques, le comportement est à la base de processus aussi fondamentaux que la recherche et la rencontre de proies et/ou de partenaires sexuels. De fait, le comportement, et l'adaptabilité aux contraintes physiques et biologiques de l'environnement qu'il induit, conditionne tout processus de survie de l'échelle de l'individu à celle de la population, voire de l'espèce. En milieu marin, le rôle du comportement est encore accru compte tenu de la nature tri-dimensionnelle de l'environnement, de l'impact extrêmement fort des paramètres physiques sur le compartiment biologique et du caractère dispersif des ressources nutritives. Dans ce cadre, nous proposons ici une analyse statistique originale du comportement natatoire d'un organisme marin quasi-ubiquiste à l'échelle planétaire, analyse qui peut être directement adaptée à l'étude du comportement de tout animal susceptible de se déplacer.

2 Enregistrement 3D de la trajectoire de copépodes

Les copépodes sont le plus important groupe de crustacés, et occupent des habitats très diversifiés, allant des rivières, lacs, aux océans. L'ordre de grandeur de la taille adulte des copépodes est de 1 à 2 mm. Les copépodes représentent une de principales formes de plancton marin, et jouent un rôle fondamental dans la chaîne alimentaire océanique, puisqu'ils

représentent le lien entre les algues microscopiques et les poissons (et incidemment les baleines). Nous considérons ici le copépode *Temora longicornis*, une espèce extrêmement abondante dans les eaux côtières, et en particulier en Manche où des spécimens ont été prélevés et transportés au laboratoire.

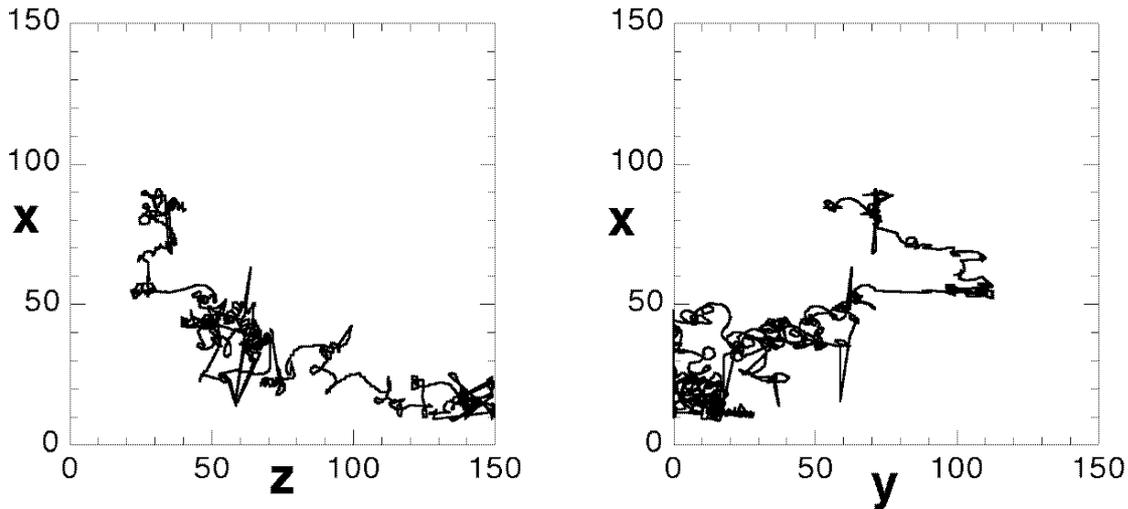


FIG. 1 – La trajectoire analysée, projetée dans les plans xz (gauche) et xy (droite).

Les copépodes ont été acclimatés au laboratoire dans des aquariums de 20 l d'eau de merensemencée par des algues phytoplanctoniques. Avant de filmer, des adultes femelles ont été prélevés délicatement à l'aide d'une pipette et placées dans un nouvel aquarium pendant 15 minutes avant de filmer. Cet aquarium a auparavant étéensemencé de façon à posséder une concentration réaliste en algues phytoplanctoniques, puis mélangé.

Un système expérimental a été mis en place, permettant d'enregistrer la trajectoire du copépode en 3D (pour plus de détails, voir [1]). L'aquarium cubique, de 15 cm de côté, a été illuminé par 2 lampes (lumière diffuse, 75 W); la trajectoire du copépode a été enregistrée par 2 caméras CCD placées orthogonalement, de résolution 875x560 pixels. Les images ont été compressées et stockées en temps réel; les 3 coordonnées ont ensuite été estimées à l'aide de logiciels de traitement d'images et d'identification. En raison des difficultés expérimentales associées aux effets de bord (seules les portions de trajectoires éloignées de plus de deux fois la longueur du corps de l'animal filmé ont été conservées) et à l'identification certaine de l'animal à chaque pas de temps, seule une portion de 2 min 42 s, enregistrée à 12.5 Hz, a été analysée.

La trajectoire résultant est visualisée en Figure 1: elle est très irrégulière, montrant une alternance désordonnée de mouvements rapides et lents de toutes amplitudes et dans toutes les directions. Les statistiques de cette trajectoire sont analysées dans la suite.

3 Analyse statistique de la trajectoire du copépo

3.1 Diffusion anormale multifractale

Notons $X(t)$ la position en 3D du copépo. Nous faisons l'hypothèse que la position du copépo est représentée par un processus isotrope à incréments stationnaires: nous étudions les moments d'ordre $q > 0$ de l'amplitude des déplacements $\Delta X_\tau = X(t+\tau) - X(t)$ que nous supposons fonction de l'incrément τ uniquement. Ceci donne la loi:

$$\langle \|\Delta X_\tau\|^q \rangle \simeq \tau^{\zeta(q)} \tag{159}$$

Cette approche, utilisant les moments statistiques pour caractériser la diffusion anormale, a déjà reçu plusieurs noms différents lorsque la fonction $\zeta(q)$ est non-linéaire: par exemple diffusion généralisée [2], multidiffusion [3], cintétique multifractionnaire [4-5] ou diffusion forte [6]. Ici, par analogie avec la fonction $\zeta(q)$ introduite pour caractériser de façon analogue les statistiques du champ de vitesse en turbulence multifractale, non utilisons le terme marche aléatoire multifractale [1,7] ou diffusion anormale multifractale [1]. La diffusion normale correspond à des incréments gaussiens menant à $\zeta(q) = q/2$; dès que $\zeta(q) \neq q/2$ on peut parler de diffusion anormale. Par opposition avec la diffusion anormale de Lévy (voir [8]), caractérisée par une fonction $\zeta(q)$ bilinéaire, la diffusion anormale multifractale correspond à une fonction purement non-linéaire, et a été encore très peu étudiée théoriquement ou expérimentalement.

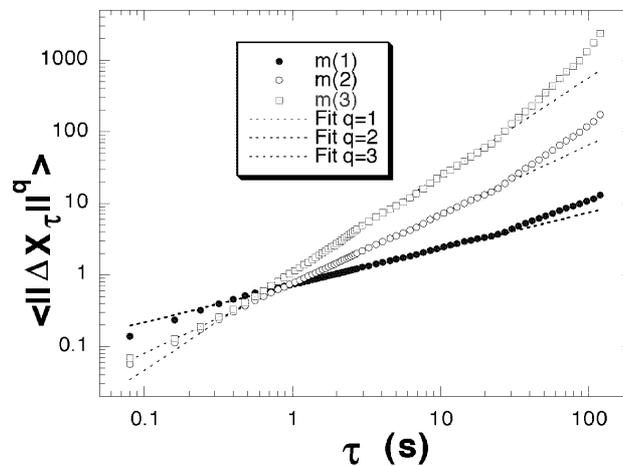


FIG. 2 – Invariance d'échelle des moments des déplacements.

3.2 Mise en évidence expérimentale

L'analyse statistique a été pratiquée pour des moments q de 0 à 4, avec un incrément de 0.1. L'invariance d'échelle obtenue est représentée en Figure 2, tandis que la pente des droites, donnant une estimation de $\zeta(q)$, est représentée en Figure 3. L'invariance d'échelle est très bien vérifiée pour un rapport d'échelle de 2 décades, pour des temps allant de 0.3 à 30 s, et des distances de 0.4 à 4 cm (comme la distance varie comme la racine carrée

du temps, un rapport d'échelle de 100 en temps correspond à un rapport d'échelle de 10 en espace). Pour les plus petites échelles, la déviation constatée par rapport à l'invariance d'échelle peut provenir soit d'un manque de précision de la mesure, soit de l'inertie associée au temps de réaction caractéristique du copépode.

La fonction $\zeta(q)$ obtenue est clairement non-linéaire, et se démarque nettement de la droite $q/2$ pour les moments supérieurs à 2. Il s'agit là de la première mise en évidence expérimentale en les sciences naturelles (hors finance) d'une diffusion anormale multifractale. Ce type d'étude pourra sans aucun doute être appliquée avec succès au comportement d'autres organismes, marins comme terrestres. En effet, le développement de capteurs radio-télémetriques miniatures, de grande autonomie et permettant une acquisition de données géographiques (e.g. latitude, longitude, altitude, profondeur) sur de longues durées nous permet d'envisager de généraliser la faisabilité de l'approche proposée ici à des animaux aussi différents que les petits et grands mammifères terrestres [9-11], ou que les requins [12], les thons [13], les tortues de mer [14], les phoques [15] ou les oiseaux de mer [16-17]. Avant d'interpréter plus avant ces résultats, nous proposons ci-dessous une caractérisation statistique plus fine des déplacements.

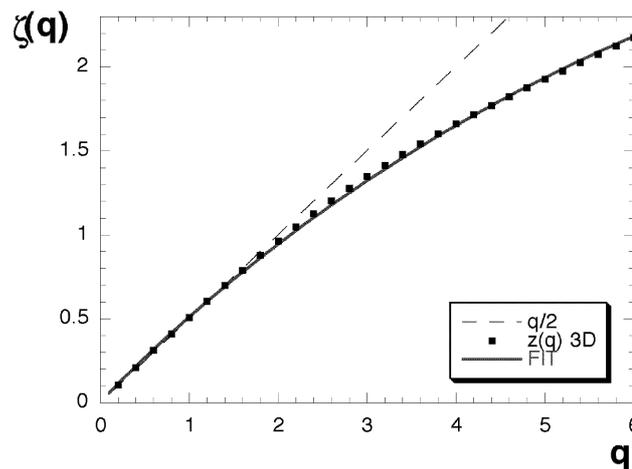


FIG. 3 – Fonction génératrice des moments $\zeta(q)$, comparée à la droite $q/2$ correspondant à une marche aléatoire gaussienne, et à un ajustement multifractal (courbe continue).

3.3 Analyse statistique par les cummulants

Nous cherchons ici à caractériser la fonction $\zeta(q)$, en introduisant une partie linéaire qH et une partie non-linéaire $\Psi(q)$: $\zeta(q) = qH - \Psi(q)$. On peut interpréter le second terme comme correspondant à un kernel multiplicatif, dont une forme possédant une certaine universalité est la loi de puissance, qui correspond à des variables aléatoires stables, le modèle multifractal correspondant étant appelé log-stable, ou “universel” [18-19]. La fonction correspondante s’écrit $\Psi(q) = Cq^\alpha$, $0 \leq \alpha \leq 2$ étant l’index de Lévy. Par une étude en cummulants déjà proposée ailleurs [20] on peut considérer les moments pour 2 échelles

fixées τ et $\lambda\tau$ et en déduire la fonction $\Psi(q)$, donnée par:

$$\Psi(q) = \log_{\lambda} \frac{\langle \|\Delta X_{\tau} \lambda^H\|^q \rangle}{\langle \|\Delta X_{\lambda\tau}\|^q \rangle} \quad (160)$$

Nous estimons d'abord $H = 0.57$, puis nous choisissons $\tau = 1s$ et $\lambda = 10$ de façon à avoir deux échelles temporelles appartenant au régime invariant d'échelle. L'expression précédente peut alors être utilisée pour estimer directement et avec une grande précision la fonction $\Psi(q)$, représentée en Figure 4. Un ajustement en loi de puissance fournit $C = 0.07$ et $\alpha = 1.63$; la fonction $\zeta(q)$ correspondant à ces valeurs a aussi été représentée en Figure 3, montrant que cet ajustement est très proche des données. Ceci fournit un modèle pour la diffusion anormale multifractale et pourra être utilisé ultérieurement dans des simulations de marches aléatoires corrélées; la structure multifractale mise en évidence ici implique en effet un corrélations à longue portée de l'amplitude des sauts (voir [1]).

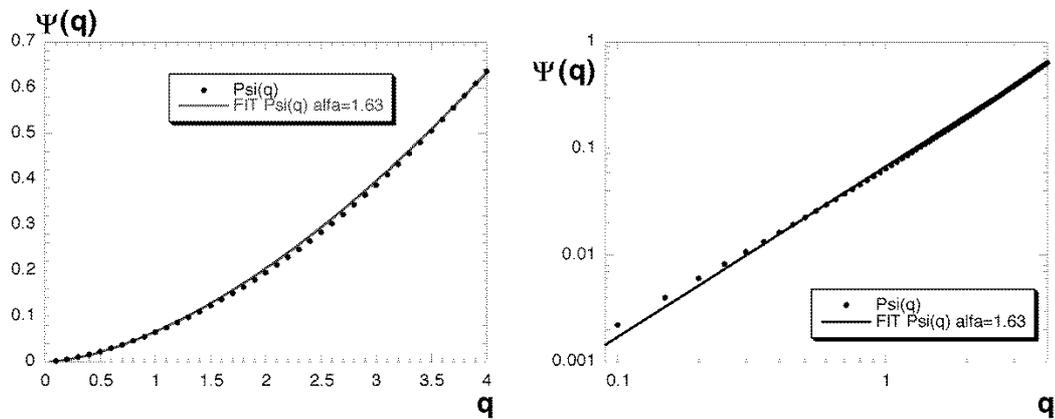


FIG. 4 – Fonction $\Psi(q)$ estimée expérimentalement (points ronds), comparée à un ajustement en loi de puissance de la forme Cq^α , avec $C = 0.07$ et $\alpha = 1.63$ (courbes continue). A gauche: représentation en coordonnées linéaires, et à droite, en représentation log-log, de façon à mettre en évidence la loi de puissance.

4 Conclusion

Les résultats présentés ici démontrent la nature multifractale du comportement du copépode *Temora longicornis*. Bien que ce comportement ait été observé dans un aquarium où la source de nourriture phytoplanctonique peut être considérée comme distribuée de manière homogène, il convient de noter que nombre de travaux montrent la nature multifractale de la distribution du phytoplancton en mer, quelle que soit l'intensité de la turbulence [21-24]. Dans ce cadre, la multifractalité observée dans la nage du copépode est plus vraisemblablement un caractère inné, résultat de siècles d'évolution et d'adaptation au milieu, plutôt qu'un comportement acquis, adaptation directe à une contrainte environnementale ponctuelle. On peut ainsi supposer que le caractère spécifique, contourné, de la marche aléatoire multifractale du copépode vise à optimiser le volume visité, pour une dépense énergétique donnée.

De manière plus générale, une caractérisation détaillée du comportement natatoire des organismes marins est indispensable pour permettre d'estimer leur dépense énergétique. Ainsi l'efficacité d'un organisme à exploiter son milieu pourrait être estimée comme le rapport r entre volume effectif exploré (i.e. volume qui n'aurait été visité qu'une fois, et qui est donc une source optimale de nourriture) et énergie dépensée. Toute stratégie adaptative et/ou évolutive visant à minimiser l'énergie dépensée dans la recherche de nourriture, une espèce caractérisée par un rapport r élevé sera ainsi mieux adaptée, plus compétitive. Une paramétrisation du comportement natatoire de différentes espèces partageant une même ressource permettrait ainsi d'estimer par exemple leur potentiel compétitif. En particulier, ces informations peuvent être considérées comme un prérequis indispensable pour une meilleure compréhension du fonctionnement des écosystèmes marins.

Références

- [1] F. G. Schmitt and L. Seuront, *Physica A*, **301**, 375 (2001),
- [2] I. S. Aranson, M. I. Rabinovich, L. S. Tsimring, *Phys. Lett. A*, **151**, 523 (1990),
- [3] K. Sneppen and M. H. Jensen, *Phys. Rev. E*, **49**, 919 (1994),
- [4] B. A. Carreras, V. E. Lynch, D. E. Newman, G. M. Zaslavsky, *Phys. Rev. E*, **60**, 4770 (1999),
- [5] G. M. Zaslavsky, *Physica A*, **288**, 431 (2000),
- [6] P. Castiglione, A. Mazzino, P. Muratore-Ginanneschi, A. Vulpiani, *Physica D*, **134**, 75 (1999),
- [7] E. Bacry, J. Delour, J.-F. Muzy, *Phys. Rev. E*, **64**, 26103 (2001),
- [8] M. F. Schlesinger, G. M. Zaslavsky, U. Frisch (Eds.), *Lévy flights and related topics in Physics*, Springer, Berlin, 1995, 347pp.
- [9] M. L. Cody, *Theor. Popul. Biol.*, **2**, 142 (1971),
- [10] J. Bascompte and C. Vila, *Landsc. Ecol.*, **12**, 213 (1997),
- [11] C. M. Bergman, J. A. Schaefer and S. N. Luttich, *Oecol.*, **123**, 364 (2000),
- [12] D. W. Sims and V. A. Quayle, *Nature*, **393**, 460 (2001),
- [13] L. Dagorn, P. Bach and E. Josse, *Mar. Biol.*, **136**, 361 (2000),
- [14] G. C. Hays, et al., *Anim. Behav.*, **59**, 577 (2000),
- [15] Y. Tremblay and Y. Cherel, *Mar. Ecol. Prog. Ser.*, **204**, 257 (2000),
- [16] R. G. Harcourt, M. A. Hindell, D. G. Bell and J. R. Waas, *Polar Biol.*, **23**, 479 (2000),
- [17] H. Weimerskirch, et al., *Science*, **295**, 1259 (2002),
- [18] D. Schertzer and S. Lovejoy, *J. Geophys. Res.*, **92**, 9693 (1987),
- [19] D. Schertzer, S. Lovejoy, F. G. Schmitt, Y. Chigirinskaya and D. Marsan, *Fractals*, **5**, 427 (1997),
- [20] F. G. Schmitt, *Intermittence et turbulence; analyse de données, validation de modèles et applications*, Habilitation à Diriger des Recherches, Université Paris 6, 2001, 244 pp.
- [21] L. Seuront and F. G. Schmitt, in P. Muller and C. Garrett (Eds.), *Stirring and mixing in a stratified ocean*, Proceedings of Aha Huliko, a Hawaiian Winter Workshop, SOEST, University of Hawai, 2001, pp. 129-144 **301**, 375 (2001),
- [22] L. Seuront et al., *Geophys. Res. Lett.*, **23**, 3591 (1996),
- [23] L. Seuront, F. Schmitt, Y. Lagadeuc, D. Schertzer, S. Lovejoy, *J. Plankton Res.*, **21**, 877 (1999),
- [24] S. Lovejoy et al., *J. Plankton Res.*, **23**, 117 (2001).

Technique d'homologie pour la description topologique de flots chaotiques

Denisse Sciamarella et Gabriel B. Mindlin

Departement de Physique

Université de Buenos Aires, Pab I, Ciudad Universitaria, cp 1428, Buenos Aires, Argentine

Denisse.Sciamarella@lps.ens.fr

Résumé

On présente une méthode topologique basée sur la description de variétés ramifiées qui utilise les groupes d'homologie pour élargir l'applicabilité des méthodes d'analyse de données chaotiques. La technique proposée permet le traitement des séries temporelles courtes et bruitées impossibles à analyser avec les méthodes traditionnelles, ainsi que le traitement des cas pour lesquelles la dimension de l'espace de phase sous-jacent est supérieure à trois. On présente des exemples d'application numériques et expérimentaux.

1 Introduction

L'analyse de données chaotiques s'est enrichie grâce aux outils de la dynamique non linéaire. Dans les années 80, Birman et Williams énoncent un principe selon lequel les orbites coexistant dans un ensemble invariant hyperbolique présentent une structure semblable à un patron que l'on peut décrire comme une variété ramifiée [1]. Ce genre de structure a été retrouvé dans beaucoup de systèmes dissipatifs qui contiennent des attracteurs étranges. À partir des années 90, les propriétés de ces variétés ramifiées commencent à être utilisées pour identifier les mécanismes géométriques responsables de la complexité des flots [2], [3].

La description topologique de variétés ramifiées a été très utile pour traiter des données correspondant à des systèmes déterministes ayant un comportement chaotique [7]. Elle permet de découvrir la nature de la loi déterministe décrivant une série de données, et de valider un modèle qui décrit le comportement d'un système. Pour les systèmes à trois dimensions, la description de la manière dans laquelle l'espace de phases se replie sur lui même a été utilisée avec succès pour classifier les systèmes dynamiques. Néanmoins, l'applicabilité de la méthode topologique était limitée par la dimensionnalité (trois) de l'espace de phases, ainsi que par la qualité et la durée de la série temporelle de données que l'on veut analyser.

On présente une technique alternative pour décomposer la variété parcourue par la solution chaotique en cellules constituant un complexe. L'information de voisinage entre les cellules est traitée avec des algorithmes qui permettent d'obtenir une description algébrique de la structure de la variété en termes de chaînes de cellules.

On fait premièrement une description des outils mathématiques utilisés dans cette technique. Les sections suivantes présentent une étude d'une série temporelle expérimentale correspondant à l'énonciation d'une voyelle, et une solution numérique d'un système chaotique à quatre dimensions d'espace.

2 Description de la technique

2.1 Décomposition cellulaire

L'objet qu'on veut décrire est une variété déterminée par un ensemble de points en R^n associés aux données. Pour décrire les propriétés topologiques de la variété, la technique proposée impose la nécessité de grouper les points en cellules. Chaque d -cellule est, par définition, un ensemble de points qui est une bonne approximation d'un ensemble euclidien de dimension d ($d < n$).

Pour construire ces cellules, on prend un premier point x_0 et on vérifie que la distribution de points autour de x_0 sera relativement uniforme. Ensuite, on définit un nombre minimum et maximum de points qui pourraient constituer une cellule autour de ce point. On considère donc l'ensemble de points $x_l, l = N_{min}, \dots, N_{max}$ arrangés en ordre croissant de distances au point x_0 . Le but est de trouver la valeur limite de I ($N_{min} < l < I$) pour que l'ensemble puisse être considéré comme une cellule de la variété. Si un ensemble de points en R^n est une bonne approximation d'un ensemble euclidien de dimension d , les racines de d des seconds moments des points contenus dans un rayon R petit, décroissent linéairement lorsque $R \rightarrow 0$, tandis que $(n - d)$ des moments décroissent comme des puissances plus élevées de R . En conséquence, on considère la matrice $X_{i,j} = (x_{i,j} - x_{0,j})$ avec $i = 0, 1, \dots, N$ ($N = N_{max} - N_{min}, i = l - N_{min}$) et $j = 1, 2, \dots, n$ (avec n la dimension de l'espace de phases). On fait une décomposition en valeurs singulières de cette matrice pour différentes valeurs de N , suivie d'une régression linéaire des d valeurs singulières les plus élevées en fonction de N . La valeur de I cherchée correspondra à la valeur de N pour laquelle on obtient le meilleur coefficient de régression linéaire. Finalement, on répète cette procédure autour d'un nouveau point (le point le plus proche au point x_0 de la cellule précédente n'appartenant pas aux cellules déjà construites). Les calculs se poursuivent jusqu'à l'épuisement des points de la variété.

Le pas suivant dans la construction d'un complexe de cellules est la détermination des points délimitant les bords de la cellule. Le choix de ces points est fait de manière que des cellules voisines partagent les points qui les assemblent.

2.2 Les groupes d'homologie

La détermination de l'équivalence topologique de deux espaces donnés est un problème difficile. Une approche à ce problème se sert de la définition d'un complexe de cellules conçu comme un objet topologiquement équivalent à l'espace considéré [5]. Une d -cellule est un ensemble

- qui correspond à l'intérieur d'un disque de dimension d ,
- dont les bords sont divisés en un nombre fini de cellules de dimension $d - 1$ qu'on nommera les *faces* de la cellule.

Un point est une 0-cellule, une ligne qui joint deux points est une 1-cellule, etc. Les cellules peuvent être réunies dans un complexe, qui est un ensemble fini de cellules tel que (a) les faces des cellules sont des éléments du complexe et (b) les intérieurs de deux cellules d'un complexe ne se superposent pas. La dimension du complexe est celle de la cellule de dimension la plus élevée.

Un complexe est orienté si un ordre de lecture est accordé à chacune des faces des cellules. Un complexe orienté permet de définir des chaînes: $C = a_1\sigma_1 + \dots + a_n\sigma_n$, où σ_i sont

des k -cellules et a_i ($i = 1, \dots, n$) sont des entiers ($0\sigma = \emptyset$). Les k -chaînes d'un complexe peuvent être munies d'une structure de groupe. Autrement dit, pour un complexe orienté K , $C_k(K)$ est le groupe de toutes les k -chaînes pour $k = 0, 1, \dots, \dim(K)$. Cette propriété permettra de construire des structures algébriques qui caractériseront l'ensemble à étudier. Pour décrire la manière dans laquelle les cellules se recollent, il faut pouvoir identifier les faces d'une cellule donnée. Cette fonction est accomplie par la définition de l'opération de bord, ∂ , qui agit sur une cellule pour lui attribuer la chaîne des $(k-1)$ -cellules constituant ses faces. Cet opérateur de bord peut agir sur une k -chaîne. Ainsi, $\partial : C_k(K) \rightarrow C_{k-1}(K)$ est l'opération définie par:

$$\partial(C = a_1\sigma_1 + \dots + a_n\sigma_n) = a_1\partial(\sigma_1) + \dots + a_n\partial(\sigma_n). \quad (161)$$

Cette opération permet de choisir des k -chaînes spéciales. Les chaînes pour lesquelles $\partial(C) = \emptyset$ seront des k -cycles, groupés dans l'ensemble Z_k . Parmi les k -cycles, on peut identifier ceux qui constituent les bords d'une cellule de dimension plus élevée. Ce groupe de bords est appelé B_k . Ces outils algébriques permettent d'identifier des *trous* dans un espace, puisqu'un trou est un cycle qui n'est pas un bord d'une cellule de dimension plus élevée. Finalement, on définit une relation d'équivalence: deux k -chaînes C_1 et C_2 se disent homologues si $C_1 - C_2 = \partial(D)$, pour une certaine $(k+1)$ -chaîne D . On définira donc $H_k(K)$ comme le groupe d'équivalence des éléments de Z_k avec la relation d'homologie. Cette relation d'équivalence permet de construire une structure algébrique qui sera indépendante du complexe utilisé pour modéliser l'objet topologique étudié.

Chaque cellule est convenablement décrite par les vertex qui déterminent son bord. L'ordre d'énumération des vertex définit l'orientation de la cellule. Si $\langle v_0 \rangle$ est un vertex (i.e. une 0-cellule), $\langle v_0, v_1 \rangle$ sera le bord d'une 1-cellule qui va de v_0 à v_1 et ainsi de suite. La manipulation algébrique des listes ordonnées de vertex qui composent chaque cellule d'un complexe est réalisée par un algorithme écrit avec Mathematica ©. Les étapes du calcul des invariants ($H_k(K)$) sont:

1. Lire les listes de vertex de toutes les cellules et les arranger dans une matrice de bords.
2. Calculer les groupes B_k comme les lignes linéairement indépendantes des matrices de bords.
3. Calculer le noyau de la matrice de bords transposée pour obtenir les groupes Z_k .
4. Écrire les éléments de B_k (les k -bords) en termes des éléments de Z_k (les k -cycles), à partir des relations d'homologie.
5. Accumuler dans H_k les k -cycles qui sont homologiquement indépendants.
6. Si l'orientation de toutes les cellules du complexe est uniforme, l'éventuelle torsion des éléments du complexe peut être calculée à partir des chaînes d'orientabilité (i.e. les multiples de k -bords qui sont homologues à zéro). Nous avons ajouté cette définition ne faisant pas partie de la théorie d'homologie, puisqu'elle constitue un élément important pour calculer les propriétés topologiques de l'objet étudié.

Il n'est pas inutile de remarquer que la sixième étape permettra de distinguer, par exemple, un cylindre d'une bande de Moebius, ou l'existence d'une bande qui se plie avant de s'insérer dans une autre bande [7].

3 Applications de la technique

Les exemples choisis veulent illustrer la capacité de la technique décrite précédemment pour venir à bout des difficultés lorsqu'on veut analyser des séries temporelles courtes et bruitées ou des flots compatibles avec une variété qui habite dans un nombre de dimensions supérieur à trois.

3.1 L'analyse topologique d'une série expérimentale

On analyse un signal de parole expérimental. La série temporelle contient la variation de la pression lorsqu'un locuteur prononce la voyelle *a* comme partie du mot espagnol *casa*. La durée de la série est de 0.147 s enregistrée à 8000 échantillons par seconde (voir figure 1 (a)). La figure 1 (b) montre les données, une fois plongées dans un espace à trois dimensions (nombre minimum de dimensions pour qu'il n'y ait pas d'autointersections du flot) avec un retard temporel τ [6]. Le complexe de cellules qui est topologiquement équivalent à la variété ramifiée qui contient les données est un ensemble de douze cellules représentées dans la figure 1 (c).

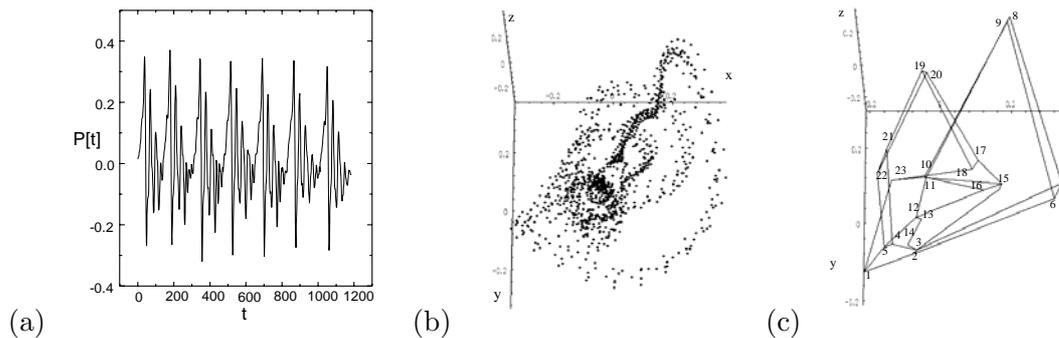


FIG. 1 – (a) Fluctuation de la pression $P(t)$ lorsqu'un locuteur prononce la voyelle *a*. (b) Variété obtenue par un plongement temporel du signal: $x = P(t)$, $y = P(t - \tau)$, $z = P(t - 2\tau)$. (c) Complexe cellulaire associé à la variété dans (b).

Les propriétés homologiques de ce complexe se résument dans les invariants H_k pour $k = 0, 1, 2$. Le groupe H_0 contient l'information des propriétés topologiques associées aux 0-cellules. Ainsi, le nombre de cellules génératrices du groupe H_0 se traduit dans le nombre de composants connexes de la variété. Le résultat obtenu dans cette analyse est $H_0 = [[\langle 1 \rangle]] \approx \mathcal{Z}$. H_0 est généré par une seule cellule: il n'existe donc qu'un composant connexe dans la variété.

Le groupe H_1 contient l'information donnée par les 1-cellules. Le nombre de cellules génératrices permet d'identifier les cycles homologiquement indépendants de la variété. Une lecture des 1-chaînes génératrices permet d'identifier chacune des bandes (les signes donnant le sens de lecture des vertex). Dans cet exemple, $H_1 = [[L_1, L_2, L_3]] \approx \mathcal{Z}^3$. Les cycles L_1, L_2, L_3 sont des 1-chaînes qui définissent trois bandes dans la variété. Plus précisément, $L_1 = \langle 1, 2 \rangle - \langle 1, 5 \rangle + \langle 2, 3 \rangle + \langle 3, 15 \rangle - \langle 5, 22 \rangle + \langle 15, 17 \rangle + \langle 17, 19 \rangle + \langle 19, 22 \rangle$, $L_2 = \langle 1, 2 \rangle - \langle 1, 5 \rangle + \langle 2, 6 \rangle - \langle 5, 12 \rangle + \langle 6, 9 \rangle + \langle 9, 11 \rangle + \langle 11, 12 \rangle$, $L_3 = \langle 3, 7 \rangle - \langle 3, 15 \rangle + \langle 7, 8 \rangle + \langle 8, 10 \rangle + \langle 10, 15 \rangle$.

Le groupe H_2 contient l'information associée aux 2-cellules. La présence des chaînes génératrices de H_2 permet d'identifier l'existence de cavités dans la variété étudiée (une cavité étant un trou enfermé par un cycle de 2-cellules). Dans cet exemple, $H_2 = \emptyset$ (ce qui indique qu'il n'y a pas de cavités enfermées par la variété).

La variété de la figure 1 (b) présente donc deux bandes qui se rattachent dans un disque central. Cette structure suggère une intéressante organisation dynamique des données qui peut s'associer à un point-selle qui expulse le flot le long d'une variété instable pour le recevoir dans une réinjection rapide. Ce comportement indique comment l'espace de phases doit se plier sur soi-même sous l'action des équations d'un modèle du phénomène.

3.2 L'analyse topologique d'une solution numérique

Le flot chaotique de cet exemple correspond à l'intégration numérique des équations suivantes:

$$\begin{aligned}
 x' &= -(z+2)d(x - (a + \epsilon_3(2+w))) + (2-z) \\
 &\quad (\alpha(x-2) - \beta y - \alpha(x-2)((x-2)^2 + y^2/R^2)) \\
 y' &= -(z+2)(y-b) + (2-z) \\
 &\quad (\beta(x-2) - \alpha y - \alpha y((x-2)^2 + y^2/R^2)) \\
 \epsilon_1 z' &= (4-z^2)(z+2-m(x+2)) - \epsilon_1 cz \\
 \epsilon_2 w' &= (4-z^2)(z+2-m(x+2)) - \epsilon_2 cz
 \end{aligned} \tag{162}$$

Le flot généré est localement bidimensionnel : sa projection tridimensionnelle présente des auto-intersections. Autrement dit, la variété qui contient ce flot ne peut pas être plongée dans un espace $3d$ (un exemple fréquent de variétés localement $2d$ ayant cette propriété est la bouteille de Klein). Il s'agit donc effectivement d'un système avec un espace de phase à quatre dimensions. La figure 2 (a) présente une projection $3d$ des points qui déterminent la variété à analyser. Les propriétés homologiques de la variété sont calculées à partir des points en R^4 . Les résultats obtenus ne dépendent pas de la projection utilisée. La figure 2 (b) contient une projection $3d$ du complexe.

Les résultats montrent que $H_0 \approx \mathcal{Z}$, $H_1 = [[L_1, L_2, L_3, L_4]] \approx \mathcal{Z}^4$, $H_2 \approx \emptyset$ et $H_3 \approx \emptyset$. Les cycles ($L_1 = \langle 7, 9 \rangle - \langle 7, 13 \rangle + \langle 9, 15 \rangle - \langle 13, 14 \rangle - \langle 14, 16 \rangle + \langle 15, 16 \rangle$, $L_2 = -\langle 7, 9 \rangle + \langle 7, 13 \rangle - \langle 9, 10 \rangle - \langle 10, 22 \rangle + \langle 13, 14 \rangle + \langle 14, 22 \rangle$, $L_3 = -\langle 3, 4 \rangle + \langle 3, 7 \rangle - \langle 4, 5 \rangle - \langle 5, 23 \rangle + \langle 7, 9 \rangle + \langle 9, 10 \rangle + \langle 10, 23 \rangle$, et $L_4 = \langle 4, 5 \rangle - \langle 4, 8 \rangle + \langle 5, 8 \rangle$) indiquent la reconnexion de trois bandes dans un disque central. Une des bandes se plie une fois (comme une bande de Moebius) avant sa réinjection dans le disque.

L'analyse dynamique des équations est en accord avec les propriétés topologiques calculées. La dynamique du système présente une alternance rapide entre deux régimes (l'un avec $z \approx 2$ et l'autre avec $z \approx -2$). Dans le régime $z \approx 2$, le système évolue vers un point fixe stable qui n'est jamais atteint. Le régime $z \approx -2$ est gouverné par un point-col [8]. En plus, une oscillation est introduite dans les coordonnées du point qui attire les trajectoires dans $z \approx -2$. Cet élément est lié à l'équation pour w dans (2). Si l'on considère le système dépourvu de ce dernier ingrédient, on aura un système qui présente des solutions chaotiques de type *Shilnikov*, consistant en une alternance qui réinsère le flot expulsé par le point-col

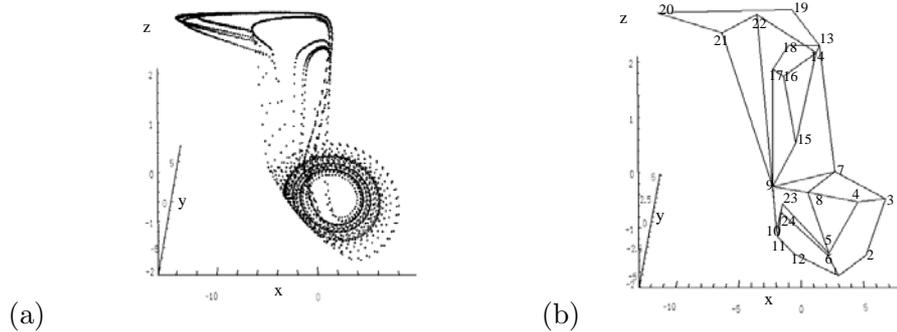


FIG. 2 – (a) Projection en x, y, z des données provenant de l'intégration numérique de l'équation (2) avec $a = 7, d = 0.5, \alpha = 0.3, \beta = 7, \epsilon_1 = 0.165, \epsilon_2 = 0.01, \epsilon_3 = 2$, (b) Projection en x, y, z du complexe cellulaire correspondant à la variété qui contient les données.

dans son propre voisinage. L'ingrédient dynamique additionnel ajoute une complexité au phénomène qui s'aperçoit dans l'existence d'un cycle de plus dans le groupe H_1 .

4 Conclusions

Dans cet article, on a utilisé les groupes d'homologie pour décrire les variétés ramifiées qui montrent l'organisation dynamique sous-jacente d'un système à partir de données. La technique utilisée nous permet de traiter des flots sur des variétés de dimension supérieure à trois, ainsi que des séries temporelles raisonnablement courtes ou bruitées. On présente une description de la mise en oeuvre de la méthode. Les résultats (les groupes d'homologie caractérisant la variété) s'écrivent en termes de chaînes génératrices de ces groupes. Cette écriture permet l'identification de chacun des éléments topologiques de la variété (la disposition de bandes, la torsion éventuelle des bandes, l'existence et la disposition de trous, cavités, etc). La technique est illustrée avec l'analyse d'une série expérimentale et d'une solution chaotique numérique d'un système à quatre dimensions.

Références

- [1] J. Birman et R. Williams, *Topology* **22** 47 (1983)
- [2] G. B. Mindlin, H. G. Solari, R. Gilmore, X Hou et N. Tuffiaro, *Phys. Rev. Lett.* **64** 2350 (1990).
- [3] G. B. Mindlin, H. G. Solari, M. A. Natiello, R. Gilmore et X. Hou, *J. Nonlinear Sc.* **1**, 147 (1991)
- [4] R. Gilmore, *Rev. Mod. Phys.* **70** 1455 (1998)
- [5] L. C. Kinsey, *Topology of Surfaces*, Springer Verlag, U.T.M. series, New York (1993)
- [6] D. Sciamarella et G. B. Mindlin, *Phys. Rev. Lett.*, Volume 82 **7**, pp. 1450-1453 (1999)
- [7] D. Sciamarella, G. B. Mindlin, *Phys. Rev. E* 036209, Vol. 63 **3** (2001)
- [8] P. Holmes et R. Williams, *Arch. Ration. Mech. Anal.* **90** 115 (1985)

Classification de systèmes dynamiques par leurs circuits de rétroaction

C. Letellier, R. Thomas et M. Kaufman

CORIA - Univ. de Rouen, BP 12, 76801 Saint-Etienne du Rouvray cedex
Lab. de Génétique des Procaryotes, Univ. de Bruxelles (CP 231), B-1050 Bruxelles
 Christophe.Letellier@coria.fr

Résumé

Habituellement, la classification des systèmes dynamiques non linéaires se fait à partir d'une synthèse, sous la forme d'un gabarit, des propriétés topologiques de l'attracteur. Nous proposons d'établir ici une classification par identification des circuits de rétroaction directement à partir des équations différentielles définissant le système. Il est montré que seuls les circuits des équations différentielles associés à un point singulier sont essentiels à la structure topologique de la dynamique. Un premier lien est ainsi établi entre la structure algébrique des équations différentielles et les propriétés topologiques de l'attracteur dans l'espace des phases.

1 Introduction

Depuis les premiers systèmes simples d'équations différentielles générant des attracteurs chaotiques, différents types de comportements ont été obtenus [1, 2]. Néanmoins, une classification directement à partir de la structure algébrique des équations différentielles restait à développer. Nous proposons ici d'utiliser l'analyse par circuits de rétroaction introduite par Thomas and Kaufman [3, 4]. Nous montrerons qu'un premier lien entre la structure des équations différentielles et les propriétés topologiques peut ainsi être établi. De plus, une telle analyse permet d'identifier les termes nécessaires à la structuration de la dynamique et, par conséquent, permet d'accéder rapidement à des équations simplifiées qui génèrent une dynamique topologiquement équivalente.

Nous étudions le cas de systèmes possédant des propriétés de symétrie sous une rotation $\mathcal{R}_z(\pi)$ autour de l'axe Oz . Nous montrons que deux classes de systèmes possédant une telle symétrie peuvent être distinguées.

2 Description par circuits de rétroaction

Une manière "naïve" d'introduire un circuit de rétroaction consiste à dire que les variables x_1 , x_2 et x_3 d'un système dynamique forment un circuit de rétroaction lorsque x_1 influence l'évolution de x_2 , qui influence celle de x_3 , qui en retour influence celle de x_1 . Les circuits peuvent être formellement définis en termes d'éléments de la matrice Jacobienne J du système. Soit le système dynamique $\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, x_3)$ ($i = 1, 2, 3$) qui est choisi tri-dimensionnel par souci de simplicité. Une variable x_j agit sur la variable x_i lorsque l'élément $J_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ de la matrice Jacobienne est non nul. L'action est positive ou négative selon le signe de cet élément. Lorsque le système est linéaire, tous les éléments de la matrice Jacobienne sont constants et, par conséquent, l'action mutuelle des variables ne dépend pas de la localisation dans l'espace des phases $\mathbb{R}^3(x_1, x_2, x_3)$. Naturellement, lorsque le système est non linéaire, ceci n'est plus le cas et la valeur d'un élément, voire son signe,

dépend de la localisation dans l'espace des phases. Un circuit donné peut donc être positif ou négatif selon le domaine considéré. Le circuit est alors dit *ambigu*.

Parmi les circuits, ceux impliquant l'ensemble des variables dynamiques du système, appelés *circuit plein*, jouent un rôle prépondérant. Ceci n'est pas surprenant une fois rappelé que chaque produit de termes apparaissant dans l'équation caractéristique de la matrice Jacobienne

$$\text{Det}(\mathcal{J}) = J_{11}J_{22}J_{33} - J_{11}J_{23}J_{32} - J_{22}J_{31}J_{13} - J_{33}J_{12}J_{21} + J_{12}J_{23}J_{31} + J_{13}J_{32}J_{21} \quad (163)$$

correspond à un tel circuit. De plus, un circuit plein est nécessaire pour générer un point singulier. Un circuit est associé à un point singulier lorsque les valeurs propres calculées lorsqu'il est isolé sont de même nature que celle du point singulier. Etant donné que, d'après les travaux de Poincaré, le portrait de phase d'un système dynamique se structure autour de ses points singuliers, il apparaît que les circuits pleins sont les principaux éléments structurant la dynamique sous-jacente. Trois types de circuits pleins doivent être distingués dans le cas des systèmes tri-dimensionnels :

1. Les circuits non décomposables qui sont associés aux produits $J_{12}J_{23}J_{31}$ ou $J_{13}J_{32}J_{21}$. Les valeurs propres correspondent à la racine cubique du produit lui-même, c'est-à-dire $\lambda_k = \sqrt[3]{J_{12}J_{23}J_{31}}$ ou $\lambda_k = \sqrt[3]{J_{13}J_{32}J_{21}}$. Par conséquent, les points singuliers qui peuvent être associés à de tels produits sont nécessairement des col-foyers.
2. Les circuits composés de circuits à un élément correspondant au produit $J_{11}J_{22}J_{33}$. Dans ce cas, le circuit correspondant n'implique pas d'interactions entre les différentes variables dynamiques. Les valeurs propres sont les éléments eux-mêmes et, par conséquent, les points fixes associés sont nécessairement des nœuds ou des cols.
3. Les circuits résultants de l'union de circuits à un élément, terme J_{kk} , et de circuits à deux éléments, termes J_{ij} et J_{ji} avec $k \neq i$, $i \neq j$ et $k \neq j$. L'une des valeurs propres est l'élément J_{kk} tandis que les deux autres sont calculées avec les éléments J_{ij} et J_{ji} ainsi que les éléments J_{ii} et J_{jj} , soient

$$\lambda_{1,2} = \frac{(J_{ii} + J_{jj}) \pm \sqrt{(J_{ii} + J_{jj})^2 - 4(J_{ii}J_{jj} - J_{ij}J_{ji})}}{2} \quad (164)$$

Dans ce cas, les points singuliers correspondants peuvent être des nœuds, des cols ou des nœud-cols selon le signe et la valeur de $(J_{ii} + J_{jj})^2 - 4(J_{ii}J_{jj} - J_{ij}J_{ji})$.

Dans le cas de circuits ambigus, l'espace des phases peut être partitionné en domaines au sein desquels les valeurs ne changent pas de nature, c'est-à-dire au sein desquels les points singuliers associés ne peuvent être que d'un type donné. Un circuit donné peut donc être associé à plusieurs types de points singuliers, selon le domaine de l'espace des phases.

3 Système de Lorenz

Soit le système de Lorenz

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sigma x + \sigma y \\ \dot{y} = Rx - y - xz \\ \dot{z} = -bz + xy \end{cases} \quad (165)$$

où $(R, \sigma, b) = (28, 10, 8/3)$. Pour ces valeurs, le système de Lorenz possède trois points singuliers, un col, F_0 , situé à l'origine de l'espace des phases, et deux col-foyers F_{\pm} , du type SF_- , c'est-à-dire pourvus d'une variété instable bidimensionnelle et une variété stable unidimensionnelle. Le système de Lorenz génère un attracteur chaotique (Fig. 1) associé à une application de premier retour caractérisée par une cuspide (Fig. 1b), particulièrement caractéristique de la dynamique du type "Lorenz". Un double gabarit (Fig. 1c) a été proposé par Birman & Williams [5] comme représentation schématique des propriétés topologiques de l'attracteur. Le système de Lorenz possède une symétrie de rotation $\mathcal{R}_z(\pi)$

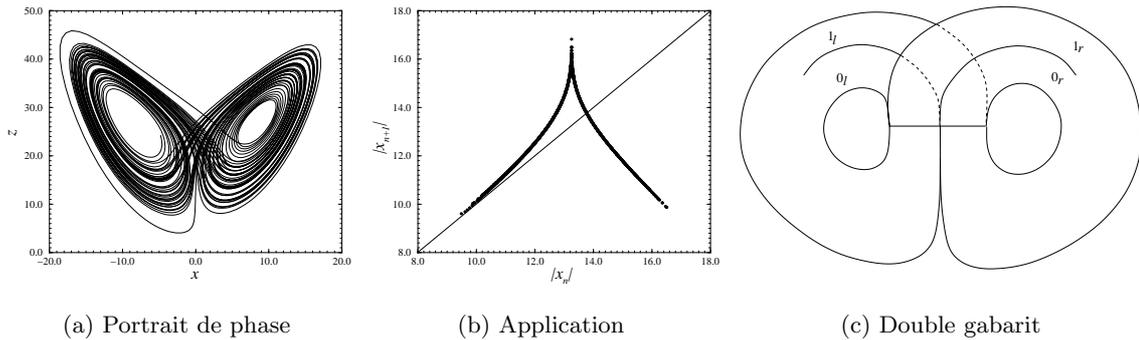


FIG. 1 – Attracteur chaotique (a) du système de Lorenz pour $(R, \sigma, b) = (28, 10, 8/3)$ caractérisé par une application de premier retour en cuspide (b) et un double gabarit (c).

d'angle π autour de l'axe Oz . Un tel système est *équivariant*, c'est-à-dire qu'il vérifie la relation

$$\Gamma \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\Gamma \cdot \mathbf{x}) \quad \text{où} \quad \Gamma = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \end{bmatrix} \quad (166)$$

définit la symétrie de rotation et $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ est le champ de vecteurs du système de Lorenz défini par les équations (165). En d'autres termes, le champ de vecteurs est globalement invariant sous le changement de coordonnées $(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, z)$. Les propriétés de symétrie sont essentielles pour la dynamique du système de Lorenz et une signature sera retrouvée au niveau des circuits de rétroaction essentielles à la structure topologique de la dynamique. Il est à noter qu'au niveau du double gabarit, aucune torsion globale n'est impliquée.

Afin d'achever la caractérisation de ce système, il est important d'analyser le système image décrit dans l'espace $\mathbb{R}^3(u, v, w)$ [6], représentation localement équivalente au système de Lorenz et ne possédant aucune symétrie résiduelle. Pour cela, la symétrie de rotation est évacuée du système à l'aide du changement de coordonnées Ψ_2 de la forme $(u, v, w) = (x^2 - y^2, 2xy, z)$. L'attracteur correspondant est représenté Fig. 2a avec son application de premier retour caractéristique en forme de cuspide (Fig. 2b). Le gabarit n'est plus double (Fig. 2c) et correspond à la suspension triviale d'un fer-à-cheval de Smale [7], c'est-à-dire qu'aucune torsion globale n'y est appliquée. La structure en terme de circuits de rétroaction est maintenant étudiée. Un seul élément de la matrice Jacobienne est nul : il reste donc quatre produits non nuls dans l'équation caractéristique (163) de la matrice Jacobienne. L'analyse complète est détaillée in [8]. Il est trouvé que le circuit correspondant au produit $J_{33}J_{12}J_{21} = -b\sigma(R - z)$ est associé au point singulier F_0 tandis que le circuit $J_{12}J_{23}J_{31} = -\sigma xy$ est associé aux points F_{\pm} . On notera que le produit $-\sigma xy$ est invariant

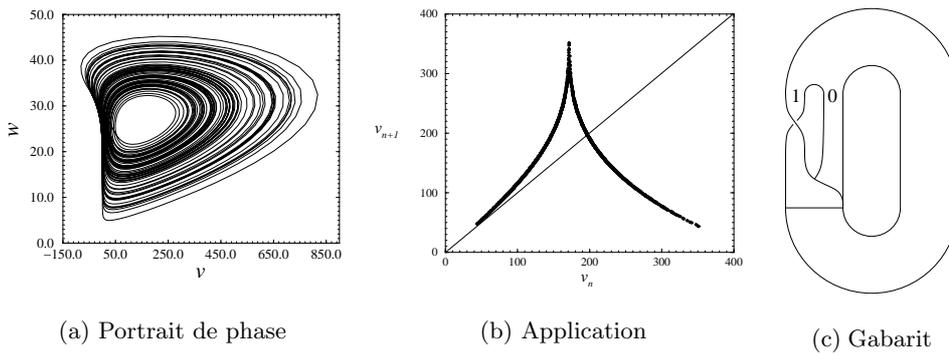


FIG. 2 – *Système image du système de Lorenz. L’attracteur (a) ne possède plus de propriétés de symétrie. L’application de premier retour si caractéristique est conservée (b). Le gabarit (c) est une suspension triviale du fer-à-cheval de Smale.*

sous l’action de la rotation $\mathcal{R}_z(\pi)$. Le point F_+ se situe dans un domaine ($x > 0$ et $y > 0$) symétrique du domaine ($x < 0$ et $y < 0$) où le point F_- est situé. Les deux autres circuits ne sont associés à aucun point singulier et, par conséquent, ne contribuent pas à la structure topologique de l’attracteur mais uniquement à un facteur d’échelle sur les variables.

Le système de Lorenz, d’un point de vue topologique, n’est donc pas minimal et peut donc être simplifié. En d’autres termes, il est possible d’identifier un système générant un attracteur topologiquement équivalent à l’attracteur de Lorenz et dont la structure algébrique est plus simple puisque ne préservant que la structure essentielle en termes de circuits de rétroaction. C’est le cas du système de Shimizu & Moroika [9] qui est de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x - \mu y - xz \\ \dot{z} = -\alpha z + x^2 \end{cases} \quad (167)$$

où $(\alpha, \mu) = (0.375, 0.81)$. Ce système ne possède que les deux circuits “topologiquement actifs” du système de Lorenz. Pour plus de détails, consulter [8].

4 Système de Burke & Shaw

Le système proposé par Burke & Shaw [1]

$$\begin{cases} \dot{x} = -Sx - Sy \\ \dot{y} = -y - Sxz \\ \dot{z} = Sxy + \mathcal{V} \end{cases} \quad (168)$$

où (S, \mathcal{V}) are $(10.0, 4.271)$. Ce système n’a que deux points singuliers, F_{\pm} , de coordonnées $\left(\pm\sqrt{\frac{\mathcal{V}}{S}}, \mp\sqrt{\frac{\mathcal{V}}{S}}, \frac{1}{S}\right)$ qui sont des col-foyers. L’attracteur est représenté Fig. 3a. L’application de premier retour (Fig. 3b) est trimodale et le gabarit (Fig. 3c) a une structure en “8”. Du point de vue topologique, l’une des différences essentielles avec l’attracteur de Lorenz réside dans la présence de torsions locales au centre de l’attracteur. Notons que la dynamique du système de Burke & Shaw est globalement invariante sous la symétrie

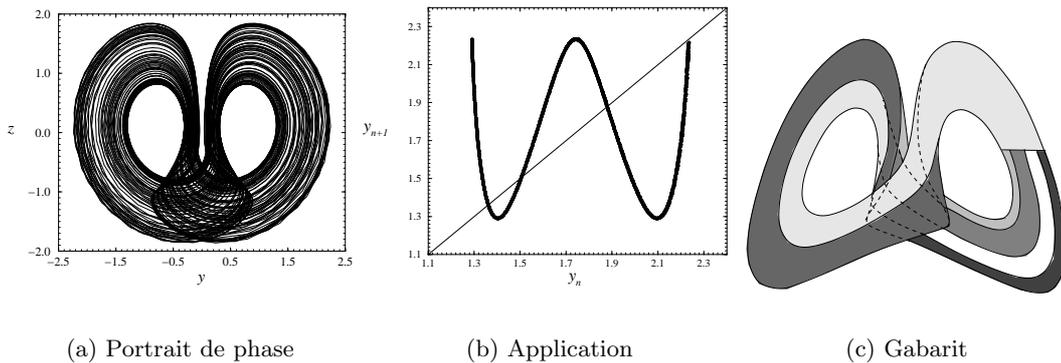


FIG. 3 – Attracteur chaotique (a) du système de Burke & Shaw pour $(S, \mathcal{V}) = (10.0, 4.271)$. L'application de premier retour est trimodale (b) et le gabarit (c) présente deux torsions locales au centre de l'attracteur.

$\mathcal{R}_z(\pi)$. Comme pour le système de Lorenz, une analyse du système image est réalisée. L'attracteur est maintenant caractérisé par une application de premier retour unimodale (Fig. 4b) et un gabarit (Fig. 4c) qui présente une torsion globale d'un demi-tour. Le système image est donc une suspension avec torsion globale impaire du fer-à-cheval de Smale. Le

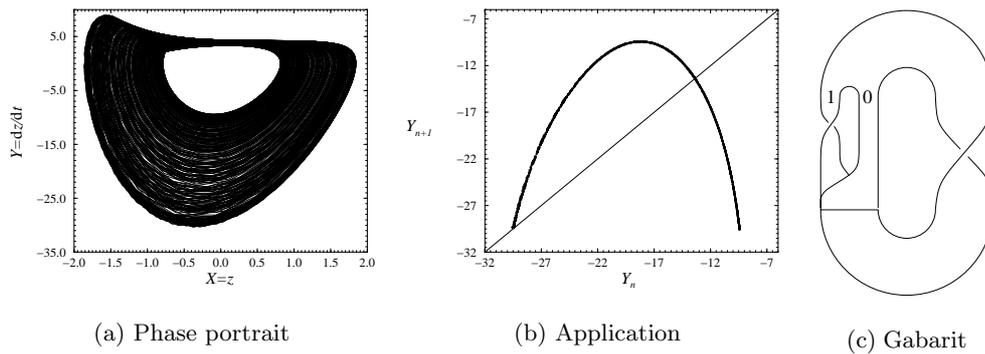


FIG. 4 – Système image du système de Burke & Shaw. L'application de premier retour (b) est unimodale et le gabarit (c) présente une torsion globale d'un demi-tour.

système de Burke & Shaw est caractérisé par un unique circuit indécomposable associé au produit $J_{12}J_{23}J_{31} = S^3xy$. Il est responsable de la présence des deux points singuliers, F_{\pm} . Un second circuit associé au produit $J_{11}J_{23}J_{32}$ n'est associé à aucun point singulier et est, par conséquent, topologiquement inactif.

Un circuit minimal n'ayant qu'un seul circuit de rétroaction et dont l'attracteur est topologiquement équivalent au système de Burke & Shaw a été identifié parmi les résultats de la recherche des systèmes chaotiques tri-dimensionnels de Sprott [2]. Il s'agit du cas C (selon la classification de Sprott) qui s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{x} = -bx + by \\ \dot{y} = xz \\ \dot{z} = a - y^2 \end{cases} \quad (169)$$

où $(a, b) = (0.70, 0.0962173)$. Ce système génère un attracteur (Fig. 5a) qui est topologiquement équivalent au système de Burke & Shaw. Il possède un seul circuit indécomposable $J_{11}J_{23}J_{32} = 2axy$ associé aux points singuliers col-foyers.

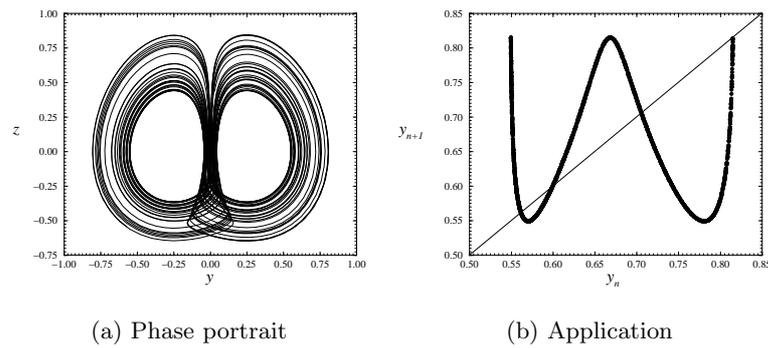


FIG. 5 – *Comportement chaotique (a) du cas C de Sprott. L’application de premier retour (b) est tri-modale comme pour le système de Burke & Shaw (Fig. 3b).*

5 Conclusion

Deux classes de systèmes dynamiques équivariants ont été distinguées par leurs propriétés topologiques. La première, correspond au système de Lorenz, et peut-être vue comme la couverture d’une suspension triviale du fer-à-cheval de Smale. La seconde, associée au système de Burke & Shaw, est vue comme la couverture d’une suspension pourvue d’une torsion globale d’un demi-tour du fer-à-cheval de Smale. La première est caractérisée par une structure algébrique impliquant deux circuits pleins, tandis que la seconde ne présente qu’un seul circuit associé aux deux col-foyers.

Références

- [1] R. Shaw, *Strange attractor, chaotic behavior and information flow*, Z. Naturforsch, **36** (a), 80-112 (1981).
- [2] J. S. Sprott, *Some simple chaotic flows*, Phys. Rev. E, **50** (2), 647-650 (1994).
- [3] R. Thomas, *Deterministic chaos seen in terms of feedback circuits: analysis, synthesis, “labyrinth chaos”*, Int. J. Bif. and Chaos, **9** (10), 1889-1905 (1999).
- [4] R. Thomas & M. Kaufman, *Multistationarity, the basis of cell differentiation and memory: I. Structural conditions of multistationarity and other nontrivial behavior*, Chaos, **11** (1), 170-179 (2001).
- [5] J. S. Birman & R. F. Williams, *Knotted periodic orbits in dynamical systems I: Lorenz’s equations*, Topology, **22** (1), 47-82, (1983).
- [6] C. Letellier & R. Gilmore, *Covering dynamical systems: two-fold covers*, Phys. Rev. E, **63**, 16206, 2001.
- [7] R. Gilmore, *Topological analysis of chaotic dynamical systems*, Rev. Mod. Phys., **70**, 1455-1529 (1998).
- [8] C. Letellier, R. Thomas & M. Kaufman, *Classification of dynamical systems using feedback circuits*, soumis.
- [9] T. Shimizu & N. Moroiika, *On the bifurcation of a symmetric limit cycle to an asymmetric one in a simple model*, Phys. Lett. A, **76**, 201-204, (1980).

Analogie mécanique d'un laser

P. Couillet et N. Vandenberghe

Institut Non Linéaire de Nice

1361 Route des Lucioles, 06560 Valbonne Sophia-Antipolis

vandenbe@inln.cnrs.fr

Résumé

Après avoir rappelé le comportement d'un laser près de la limite réversible, nous étudions le comportement d'un tuyau articulé traversé par un fluide. Dans une limite réversible, ce système présente la même bifurcation qu'un laser. Nous étudions également le cas où des effets non-réversibles sont pris en compte.

1 Laser dans un gaz d'atomes à deux niveaux.

Un laser fonctionne lorsqu'une onde électromagnétique dans une cavité optique entre en résonance avec une oscillation naturelle du milieu amplificateur. Dans le cas du laser dans un gaz d'atomes, la fréquence naturelle est donnée par la fréquence de l'émission de photons entre les deux niveaux atomiques. Les équations de Maxwell-Bloch [1] modélise

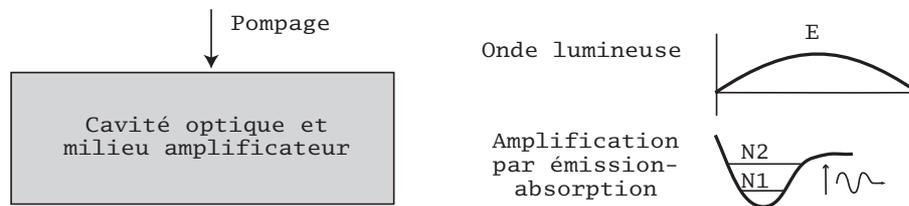


FIG. 1 – Schéma du fonctionnement d'un laser

l'interaction lumière-matière dans un gaz d'atomes à deux niveaux.

$$\partial_{tt}E = c^2\partial_{xx}E - \partial_{tt}(P + P^*), \quad (170)$$

$$\partial_tP = -i\Omega P + iEN, \quad (171)$$

$$\partial_tN = iE(P - P^*) \quad (172)$$

Dans ces équations sans dimension, E est le champ électrique, c est la vitesse de la lumière, P est la polarisation, et N est l'inversion de population. Ω est la fréquence naturelle du milieu amplificateur.

Dans ces équations nous n'avons pas inclus de termes de dissipation ou d'injection d'énergie. Dans cette limite réversible, la solution $E = 0$, $P = 0$, $N = N_0$ devient instable lorsque

$$n_0 = \frac{\Omega^2 - c^2k^2}{\Omega}, \quad (173)$$

où k est le nombre d'onde associé à l'onde électromagnétique (fixé par la taille de la cavité optique). Cette instabilité correspond à une instabilité par confusion de fréquence [2], ou

résonance 1 : 1. La forme normale associée à cette bifurcation s'écrit

$$\partial_{TT}A = zA + i\delta\partial_T A - |A|^2 A, \quad \partial_T z = 0. \quad (174)$$

A est l'amplitude du mode qui bifurque. Nous avons supposé que les variations spatiales de A sont faibles. La quantité conservée z est liée à l'inversion de population. Il faut noter que c'est cette quantité qui joue le rôle de paramètre de bifurcation. δ est le désaccord de fréquence.

La prise en compte des effets irréversibles (dissipation et injection d'énergie) se fait de manière phénoménologique sur les équations de Maxwell-Bloch. En considérant que ces effets sont petits, on peut dériver l'équation d'amplitude

$$\partial_{TT}A = zA + (\mu + i\delta\partial_T)A - |A|^2 A, \quad \partial_T z = \nu(z_0 - z) + \eta|A|^2. \quad (175)$$

La quantité z n'est plus conservée. Le terme le plus intéressant est le terme $\eta|A|^2$ qui est la perte stimulée ($\eta < 0$). Il induit un couplage entre l'amplitude des oscillations et le forçage. Il en résulte une dynamique beaucoup plus riche que dans le cas réversible.

Cette équation est générique des systèmes présentant une résonance 1 : 1 lorsque les termes non réversibles sont faibles [3]. Nous allons étudier un système mécanique présentant une résonance 1 : 1.

2 Tuyau articulé traversé par un fluide

Un tuyau traversé par un fluide (figure 2) devient instable lorsque la vitesse d'écoulement du fluide dépasse une valeur seuil. A la différence de l'*elastica*, au delà du seuil de stabilité, le tuyau ne trouve pas de nouvelle position d'équilibre mais commence à osciller. Les

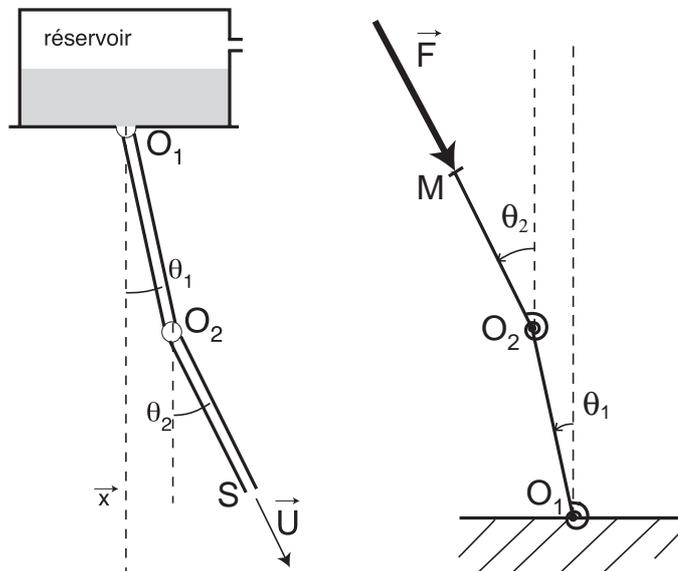


FIG. 2 – Schémas d'un tuyau articulé et d'un double pendule avec force suiveuse

équations du mouvement s'écrivent [4]

$$4\ddot{\theta}_1 + \frac{3}{2}\ddot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) - \frac{3}{2}\dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) = -2\theta_1 + \theta_2 + 3\gamma \sin \theta_1 - \sin(\theta_2 - \theta_1)u^2$$

$$-\sqrt{\beta}u \left[\dot{\theta}_1 - 2 \cos(\theta_2 - \theta_1) \dot{\theta}_2 \right] - \sqrt{\beta}u' \sin(\theta_2 - \theta_1), \quad (176)$$

$$\frac{3}{2} \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) + \ddot{\theta}_2 + \frac{3}{2} \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) = \theta_1 - \theta_2 + \gamma \sin \theta_2 - \sqrt{\beta} \theta_2', \quad (177)$$

$$u'(t) = \frac{1}{2} \lambda (U_0^2 - u^2) + \frac{1}{3} \sqrt{\beta} \gamma (\cos \theta_1 + \cos \theta_2) - \frac{1}{2} \sqrt{\beta} \sin(\theta_2 - \theta_1) \theta_1'' + \frac{1}{4} \sqrt{\beta} [1 + 2 \cos(\theta_2 - \theta_1)] (\theta_1')^2 + \frac{1}{4} \sqrt{\beta} (\theta_2')^2 \quad (178)$$

β est le rapport des masses linéiques $\beta = m_f / (m_f + m_b)$ où m_f (resp. m_b) est la masse linéique du fluide (resp. des barres), γ est la force de pesanteur, λ est la perte de charge le long du tuyau, u est le débit massique de fluide. Lorsque β tend vers 0, tout en gardant u fini, les interactions entre le fluide et la structure se limitent à une force exercée à l'extrémité, et le système est alors équivalent à un double pendule avec force suiveuse.

Pour une force suiveuse supérieure à une valeur critique, le système devient instable par une résonance 1 : 1 [5]. Le tuyau se met à osciller et le forme normale s'écrit

$$\partial_{TT} A = zA - |A|^2 A, \quad \partial_T z = 0. \quad (179)$$

où A est l'amplitude du mode qui bifurque et z est la variation de débit.

Lorsque β n'est pas nul, il existe un mécanisme de rétroaction du mouvement du tuyau sur le débit du fluide. Notamment lorsque le tuyau oscille, le débit tend à augmenter en raison de la force centrifuge. On peut alors calculer les équations d'amplitude associées à la résonance 1 : 1 à partir des équations du mouvement. On supposant que les termes non-réversibles sont petits, on obtient

$$\partial_{TT} A = zA + \mu \partial_T A - |A|^2 A, \quad \partial_T z = \nu(z_0 - z) + \eta |A|^2. \quad (180)$$

Ces équations couplent bien la variation du débit et l'amplitude des oscillations.

3 Conclusion et perspectives

En utilisant l'analogie entre les bifurcations d'un laser et les bifurcations d'un tuyau traversé par un fluide, nous avons montré que ces deux systèmes étaient décrits par les mêmes équations d'amplitude. Notons toutefois que le désaccord de fréquence n'apparaît pas dans le système mécanique (mais il peut apparaître dans des systèmes mécaniques différents). De plus il est intéressant de noter que le coefficient η est négatif dans le cas d'un laser (perte stimulée). Dans ce cas le comportement peut conduire à une dynamique chaotique [6], observée expérimentalement sur des lasers [7]. Par contre dans le cas du tuyau, le coefficient η est positif, ce qui se traduit par l'augmentation de la vitesse du fluide lorsque des oscillations se produisent. Ceci permet d'obtenir une transition sous-critique si $\eta > \nu$. Les expériences sur un système de tuyau articulé [4] montrent que selon la valeur du coefficient β , le comportement peut être soit sous-critique, soit super-critique. Le couplage entre les oscillations et la vitesse du fluide est un mécanisme permettant d'expliquer ce phénomène. Il existe un autre exemple mécanique dans lequel la résonance 1 : 1 joue un rôle. C'est l'instabilité de flottement qui est à l'origine de la vibration d'ailes d'avions, de la chute du pont de Tacoma², des oscillations d'un drapeau dans le vent [8]. Pour tous ces exemples, dans la limite où l'interaction entre le fluide et la structure est modélisée

2. Dans le cas de la chute du Pont de Tacoma, le couplage entre la vibration du pont et le mouvement du fluide est beaucoup plus complexe que ce que nous décrivons, il s'agit d'un flottement de décrochement.

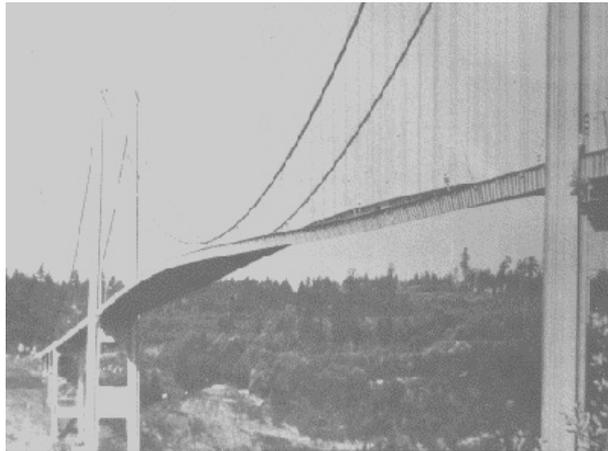


FIG. 3 – Photographie des oscillations du pont de Tacoma

simplement, lorsque la vitesse du vent augmente, la structure subit une instabilité par confusion de fréquence [2]. Dans le cas de l'aile d'avion, la résonance se fait entre un mode de torsion et un mode de flexion. Certaines expériences ont montré que cette instabilité pouvait être sous-critique [9]. Cependant dans ces cas, l'écoulement est beaucoup plus difficile à modéliser et aucune théorie non-linéaire existe.

Références

- [1] A.C. Newell et J.M. Moloney, *Nonlinear Optics*, Addison-Wesley (1992).
- [2] Y. Rocard., *Dynamique Générale des Vibrations*, Masson (1943) et *L'instabilité en Méécanique*, Masson (1955)
- [3] M. Clerc, P. Couillet, E. Tirapegui, *Optics Communications* **167**, pp 159-164 (1999).
- [4] M. Paidoussis, *Fluid-Structure interactions*, vol. 1, Academic-Press, (1998).
- [5] M. Beck, *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*, **3**, 225 (1952).
- [6] H. Haken, *Physics Letters* **53 A**, 77 (1975).
- [7] N.B. Abraham, C.O. Weiss, *Optics Communications* **68**,437 (1988).
- [8] Y. Fung, *An introduction to aeroelasticity*, Dover (1955).
- [9] J. Zhang, S. Childress, A. Libchaber, and M. Shelley, *Nature*, **408**, 835, (2000).

Instabilité modulationnelle dans une ligne de transmission électrique non linéaire discrète

David Yemélé *, Patrick Marquié & Jean Marie Bilbault

Université de Bourgogne, LE2I, (F.R.E.) C.N.R.S. 2309

BP 47870 - 21078 DIJON cedex, FRANCE

**adresse permanente : Département de Physique, Faculté des Sciences,*

Université de Dschang BP 067 Dschang, Cameroun

dyemele@yahoo.fr

Résumé

Nous étudions analytiquement la réponse en transmission d'une ligne électrique non linéaire discrète constituée d'une succession de selfs et de diodes. En régime linéaire, la ligne se comporte comme un filtre passe-bas avec une fréquence de coupure f_c . Nous montrons que l'évolution de l'enveloppe est décrite par une équation analogue à Schrödinger non linéaire (NLS), mais complétée par des termes d'ordre supérieur (HONLS). On voit alors que la ligne peut présenter deux types d'instabilité modulationnelle: (i) l'instabilité classique de Benjamin-Feir dans la zone de fréquence proche de f_c et, (ii) une autre instabilité dans la région de basses fréquences, lorsque l'amplitude du signal d'entrée modulé dépasse une valeur seuil.

1 Introduction

L'étude de la propagation des ondes dans les milieux dispersifs non linéaires suscite un intérêt croissant depuis quelques décennies, suite à la découverte des solitons, ondes localisées de grande amplitude, susceptibles de s'y propager sur de grandes distances sans grande modification de ses paramètres (profil, amplitude, vitesse,) y compris au cours d'interactions [1, 2]. Ces solitons jouent un rôle important dans un grand nombre de systèmes physiques et y apparaissent sous diverses formes: kinks, compactons, solitons trous, pulses, etc. En particulier, les solitons pulses peuvent être interprétés comme le résultat de l'instabilité d'une onde plane se propageant dans le système, sous l'effet de perturbations infinitésimales, la conduisant à une auto-modulation dont l'étape finale est la formation de paquets d'onde appelés solitons pulses. Cette auto-modulation résulte d'une interaction entre la non-linéarité et la dispersion du milieu. Ce phénomène, bien connu sous le nom d'instabilité modulationnelle ou instabilité de Benjamin-Feir [3], a été étudié dans diverses domaines de la physique notamment en hydrodynamique, optique non linéaire [4, 5], physique des plasmas [6, 7] et dans les lignes de transmission électriques non linéaires [1, 8, 9], pour ne citer que ceux-là. Par leur coût abordable et la relative facilité de leur réalisation, les lignes électriques constituent les systèmes expérimentaux les plus simples pour l'observation des phénomènes non linéaires et pour en prédire des nouveaux [10]. D'où l'intérêt accordé, en particulier, à ce type de milieux dispersifs non linéaires.

Dans cette communication, il s'agit de montrer que la ligne électrique peut présenter deux types d'instabilité: l'instabilité modulationnelle classique déjà bien prédite à partir de l'équation de Schrödinger non linéaire (NLS), et un second type d'instabilité intrinsèque à des termes d'ordre supérieur habituellement négligés dans l'équation de NLS. Dans la

section II, nous établissons l'équation de Schrödinger non linéaire avec des termes d'ordre supérieur (HONLS) régissant la propagation d'une onde modulée dans le système et dans la section III, nous déterminons à partir de cette équation les conditions d'instabilité d'une onde plane faiblement modulée se propageant dans le système, avant de conclure dans la section IV.

2 Description du modèle et équation HONLS

Nous considérons une ligne discrète constituée de N cellules identiques où chaque cellule se compose d'une inductance linéaire L montée en série et d'une capacité non linéaire $C(V_n)$

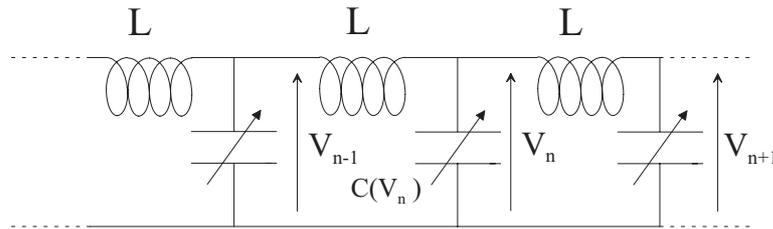


FIG. 1 – Représentation schématique de la ligne électrique non linéaire.

montée en parallèle comme illustrée sur la figure (1) ci-dessus.

En considérant la $n^{\text{ième}}$ cellule de la ligne, l'application des lois de Kirchhoff conduit à :

$$L \frac{d^2 q_n}{dt^2} = V_{n+1} - 2V_n + V_{n-1}, \quad (181)$$

où $V_n(t)$ et $q_n(t)$ désignent respectivement la tension et la charge emmagasinée par le condensateur de la cellule n . Ce condensateur est en fait une diode varicap BB112 de tension de polarisation V_0 et dont la capacité différentielle $C(V_0 + V_n) = dq_n/dV_n$ est une fonction non linéaire de V_n . Pour de faibles écarts de tensions au voisinage de la tension de polarisation V_0 , la charge q_n peut être approchée par l'expression

$$q_n(V_n) = C_0(V_n - \alpha V_n^2 + \beta V_n^3), \quad (182)$$

où $C_0 = C(V_0)$, et les coefficients non linéaires α et β ont pour valeurs numériques $C_0 = 370 \text{ pF}$, $\alpha = 0.21 \text{ V}^{-1}$ et $\beta = 0.197 \text{ V}^{-2}$ [1]. De même, nous prendrons $L = 470 \text{ } \mu\text{H}$. En reportant (182) dans (181), nous obtenons le système d'équations discrètes régissant la propagation des ondes dans le réseau :

$$\frac{d^2 V_n}{dt^2} + u_0^2 (V_{n+1} - 2V_n + V_{n-1}) = \alpha \frac{d^2 V_n^2}{dt^2} - \beta \frac{d^2 V_n^3}{dt^2}. \quad (183)$$

où $u_0^2 = 1/LC_0$. La pulsation ω et le vecteur d'onde k des ondes planes de très faible amplitude (oscillations linéaires) se propageant dans le réseau sont liés par :

$$\omega^2 = \omega_c^2 \sin^2(k/2), \quad (184)$$

où $\omega_c = 2\omega_0 = 2\pi f_c$ est la pulsation de coupure du système due au caractère intrinsèquement discret du réseau.

Nous focalisons maintenant notre attention sur la propagation des ondes modulées dans le

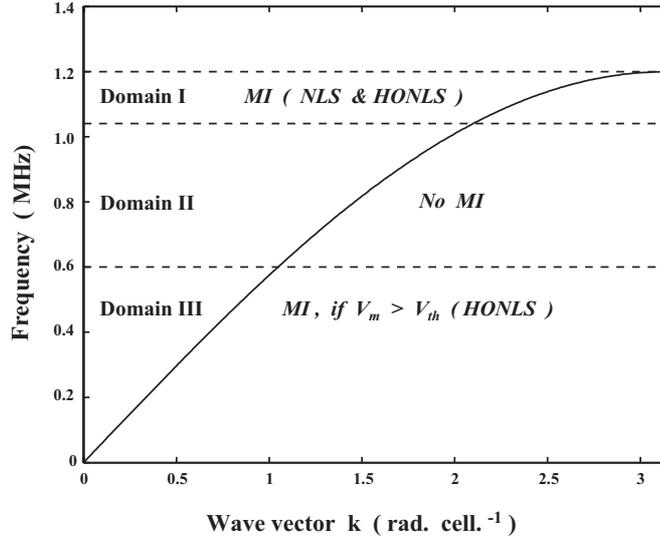


FIG. 2 – Courbe de dispersion linéaire du réseau électrique montrant un domaine de propagation stable (domaine II) et deux domaines de propagation instable (domaines I et III) des ondes faiblement modulées.

système, c'est-à-dire d'ondes constituées par une porteuse de pulsation $\omega = \omega_p$ et de vecteur d'onde $k = k_p$ modulées par une enveloppe de fréquence plus faible. Pour cela, nous utilisons l'approximation semi-discrète [11, 12] qui consiste à considérer que l'enveloppe varie lentement par rapport à la porteuse, aussi bien dans le temps que dans l'espace. Nous pouvons ainsi traiter la porteuse en tenant compte de son caractère discret tandis que l'enveloppe est traitée en continu. Pour ce faire, nous introduisons les variables lentes $X = \epsilon(n - v_g t)$ et $\tau = \epsilon^2 t$, où ϵ est un paramètre petit devant 1 et v_g la vitesse de groupe du paquet d'onde. De même, nous supposons que la solution du système d'équations (182) est de la forme

$$V_n(t) = \epsilon A(X, \tau) e^{i\theta} + \epsilon^2 (\phi(X, \tau) + B(X, \tau) e^{2i\theta}) + c.c., \quad (185)$$

où $\theta = (k_p n - \omega t)$ et c.c. désigne le complexe conjugué. $A(X, \tau)$, $B(X, \tau)$ et $\phi(X, \tau)$ dépendent des variables lentes et désignent respectivement le fondamental, l'harmonique 2 et la composante continue de la tension à la cellule n . En reportant l'expression (185) dans l'équation (183) et en retenant tous les termes d'ordre ϵ^2 et ϵ^3 proportionnels à $e^{i\theta}$, nous obtenons comme équation d'évolution de la grandeur $A(X, \tau)$, l'équation ci-dessous:

$$i \frac{\partial A}{\partial \tau} + P \frac{\partial^2 A}{\partial X^2} + Q A |A|^2 = \frac{i \epsilon v_g}{\omega} \left(i \frac{\partial^2 A}{\partial X \partial \tau} + (4/3) P \frac{\partial^3 A}{\partial X^3} + 2Q |A|^2 \frac{\partial A}{\partial X} + 2Q A^2 \frac{\partial A^*}{\partial X} \right), \quad (186)$$

avec

$$P = -\omega/8, \quad Q = \alpha^2 \omega [3\beta/2\alpha^2 + (\omega_c/\omega)^2 - 2], \quad (187)$$

où $v_g = (\omega_0^2/\omega) \text{sink}$ est la vitesse de groupe du paquet d'onde et A^* désigne le complexe conjugué de A . De plus, on montre que la composante continue de la tension ainsi que le second harmonique, respectivement obtenus à partir des termes proportionnels à $\epsilon^4 e^{0i\theta}$ et $\epsilon^2 e^{2i\theta}$, sont reliés au fondamental par les relations:

$$\phi = 2\alpha [1 - (\omega_c/\omega)^2] |A|^2, \quad B = \alpha (\omega_c/\omega)^2 A^2. \quad (188)$$

L'équation (186) sera appelée équation de Schrödinger non linéaire d'ordre supérieur (HONLS) car elle se ramène à l'équation de NLS standard lorsque nous faisons tendre ϵ vers zéro. Dans cette limite, elle admet différents types de solutions selon que le produit PQ a une valeur positive ou négative [1, 4]. Elle modélise donc le comportement de l'enveloppe dans la ligne électrique non linéaire. Les premiers termes de droite sont des termes de dispersion d'ordre supérieur tandis que les deux derniers rendent compte de la dispersion non linéaire du système. Notons qu'une équation similaire avait déjà été obtenue par Dysthe [13] pour décrire la propagation des ondes hydrodynamiques modulées dans une eau peu profonde. Elle nous sera utile pour prédire la stabilité des ondes modulées dans le réseau.

3 Instabilité Modulationnelle

Dans cette section, nous étudions les conditions selon lesquelles un train d'onde se propageant dans la ligne électrique non linéaire et régi par l'équation de HONLS (186) pourrait devenir instable sous l'influence de petites perturbations. Pour ce faire, nous reportons une solution de la forme $A(X, \tau) = \rho(X, \tau)e^{ig(X, \tau)}$ dans l'équation (186), nous obtenons une équation complexe dont les parties imaginaire et réelle sont données par:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial \tau} + 2P \frac{\partial g}{\partial X} \frac{\partial \rho}{\partial X} + P\rho \frac{\partial^2 g}{\partial X^2} &= \frac{\epsilon v_g}{\omega} \left[- \left(\frac{\partial g}{\partial \tau} \frac{\partial \rho}{\partial X} + \rho \frac{\partial^2 g}{\partial X \partial \tau} + \frac{\partial \rho}{\partial \tau} \frac{\partial g}{\partial X} \right) \right. \\ &\quad \left. + (4P/3) \left(\frac{\partial^3 \rho}{\partial X^3} - 3\rho \frac{\partial g}{\partial X} \frac{\partial^2 g}{\partial X^2} - 3 \left(\frac{\partial g}{\partial X} \right)^2 \frac{\partial \rho}{\partial X} \right) + 6Q\rho^2 \frac{\partial \rho}{\partial X} \right], \end{aligned} \quad (189)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial \tau} + P \left(\frac{\partial g}{\partial X} \right)^2 - Q\rho^2 &= \frac{P}{\rho} \frac{\partial^2 \rho}{\partial X^2} + \frac{\epsilon v_g}{\omega} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \rho}{\partial X \partial \tau} - \frac{\partial g}{\partial \tau} \frac{\partial g}{\partial X} \right] \\ &\quad + (4P/3) \left(\frac{3}{\rho} \frac{\partial g}{\partial X} \frac{\partial^2 \rho}{\partial X^2} + \frac{3}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial X} \frac{\partial^2 g}{\partial X^2} + \frac{\partial^3 g}{\partial X^3} - \left(\frac{\partial g}{\partial X} \right)^3 \right) + 2Q\rho^2 \frac{\partial g}{\partial X}. \end{aligned} \quad (190)$$

Ce système d'équations admet la solution onde plane, $A = \rho_0 e^{ig_0(\tau)}$ avec $g_0(\tau) = 2Q\rho_0^2 \tau$, comme solution exacte. C'est une solution déjà bien décrite par l'équation de NLS, avec une pulsation qui dépend du carré de l'amplitude. La stabilité linéaire de cette onde continue peut être étudiée en cherchant une solution de la forme

$$A(X, \tau) = [\rho_0 + \rho_1(X, \tau)] e^{i[g_0(\tau) + g_1(X, \tau)]}, \quad (191)$$

où $\rho_1(X, \tau)$ et $g_1(X, \tau)$ sont des grandeurs assez petites comparées aux paramètres respectifs de l'onde porteuse ρ_0 et $g_0(\tau)$. En reportant l'équation (191) dans l'équation (190), nous obtenons le système suivant après linéarisation:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_1}{\partial \tau} + P\rho_0 \frac{\partial^2 g_1}{\partial X^2} &= \frac{\epsilon v_g}{\omega} \left[5Q\rho_0^2 \frac{\partial \rho_1}{\partial X} - \rho_0 \frac{\partial^2 g_1}{\partial X \partial \tau} + (4P/3) \left(\frac{\partial^3 \rho_1}{\partial X^3} \right) \right], \\ \frac{\partial g_1}{\partial \tau} - 2Q\rho_0 \rho_1 &= \frac{P}{\rho_0} \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial X^2} + \frac{\epsilon v_g}{\omega} \left[\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial X \partial \tau} + Q\rho_0^2 \frac{\partial g_1}{\partial X} + (4P/3) \frac{\partial^3 g_1}{\partial X^3} \right]. \end{aligned} \quad (192)$$

En admettant, comme perturbation, une légère modulation, de pulsation Ω et de vecteur d'onde K , $\rho_1 = a e^{i(\Omega\tau - KX)} + c.c.$ et $g_1 = b e^{i(\Omega\tau - KX)} + c.c.$ où a et b sont des constantes

complexes, le système linéaire d'équations (192) conduit à la relation de dispersion de la perturbation:

$$\begin{aligned} \Omega^2(1 - \zeta^2 K^2) - 2\zeta K\left(\frac{1}{3}PK^2 - 2Q\rho_0^2\right)\Omega - [P^2K^4 - 2PQ\rho_0^2K^2 \\ - \zeta^2 K^2\left(\frac{16}{9}P^2K^4 - 8PQ\rho_0^2K^2 + 5Q^2\rho_0^4\right)] = 0, \end{aligned} \quad (193)$$

où $\zeta = \epsilon v_g/\omega$. L'instabilité naîtra dans le réseau lorsque la pulsation de la perturbation, Ω , aura une partie imaginaire non nulle, conduisant ainsi à une croissance exponentielle, en fonction du temps, de l'amplitude de la perturbation. Cette condition est obtenue si le discriminant Δ de l'équation algébrique a une valeur négative, soit:

$$\Delta = \frac{16}{9}\zeta^4 P^2 K^2 (K^6 + c_2 K^4 + c_1 K^2 + c_0) < 0, \quad (194)$$

avec

$$d = \zeta^2 \frac{Q}{P} \rho_0^2, c_0 = -\frac{9}{16}\zeta^{-6} d(d+2), c_1 = \frac{9}{16}\zeta^{-4} [1 + \frac{26}{3}d + 5d^2], c_2 = -\frac{3}{2}\zeta^{-2}(1 + 3d). \quad (195)$$

Le signe de Δ dépendant de celui de PQ et de l'intensité de l'amplitude ρ_0 de la porteuse, deux cas apparaissent pour que la condition (194) soit vérifiée.

(i) cas 1 : si $PQ > 0$, lorsque le vecteur d'onde de la perturbation K est inférieur à la valeur seuil K_{c1} donné par:

$$K_{c1}^2 = (s_1 + s_2) - (c_2/3), \quad (196)$$

avec

$$s_1 = [r + (q^3 + r^2)^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{3}}, s_2 = [r - (q^3 + r^2)^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{3}}, r = \frac{1}{6}(c_1 c_2 - 3c_0) - \frac{c_2^3}{27}, q = \frac{c_1}{3} - \frac{c_2^2}{9}. \quad (197)$$

(ii) cas 2 : si $PQ < 0$, lorsque l'amplitude ρ_0 de la porteuse est supérieure à la valeur seuil ρ_{0th} telle que :

$$\epsilon \rho_0 > \epsilon \rho_{0th} = (\omega/v_g)(-2P/Q)^{1/2}, \quad (198)$$

et lorsque le vecteur d'onde K est inférieur à la valeur seuil K_{c2} telle que:

$$K^2 < K_{c2}^2 = (-1/2)(s_1 + s_2) - (c_2/3) - i(\sqrt{3}/2)(s_1 - s_2). \quad (199)$$

Les équations (196) et (198) déterminent les conditions d'instabilité d'une onde plane faiblement modulée, se propageant dans la ligne électrique non linéaire discrète. Il résulte de l'équation (196) que, pour $PQ > 0$, le système est instable si le vecteur d'onde K de la modulation est inférieur à K_{c1} . On retrouve le critère d'instabilité également obtenu à partir de l'équation NLS standard. Néanmoins la présence des termes d'ordre supérieur diminue la valeur seuil du vecteur d'onde K_{c1} à partir de celle trouvée avec NLS (c'est à dire quand $\epsilon = 0$), $K_{c1}(\epsilon = 0) = K_{c0} = \rho_0(2Q/P)^{1/2}$. Ce résultat est reporté sur la courbe de dispersion dont le domaine de fréquence correspondant est appelé domaine I. Le second critère d'instabilité, non prédit par l'équation NLS standard, décrit par l'équation (198), montre que le système peut devenir aussi instable lorsque l'amplitude initiale de l'onde porteuse est supérieure à la valeur seuil, $V_{th} = 2\epsilon\rho_{0th}$. Elle dépend de la fréquence de l'onde porteuse ainsi que des paramètres du système via le coefficient de non linéarité Q de l'équation NLS. Dans un souci de simplicité et de clarté, ce résultat est reporté, dans les domaines de fréquences correspondantes, sur la courbe de dispersion (2) où deux domaines de stabilité sont spécifiés: le domaine II correspondant à une condition de propagation stable des ondes modulées et le domaine III correspondant au domaine où ces ondes deviennent instables si leur amplitude initiale et leur vecteur d'onde de perturbation respectent simultanément les conditions (198) et (199).

4 Conclusion

Nous avons montré qu'en modélisant la propagation des ondes modulées dans la ligne électrique discrète non linéaire par l'équation HONLS, on peut déterminer deux gammes de fréquence dans le filtre passe-bas caractérisant le réseau dans l'approximation linéaire, dans lesquelles peut se produire le phénomène d'instabilité modulationnelle. Si la première gamme de fréquence est bien obtenue à partir de l'équation NLS standard, la deuxième par contre est pacifique à l'équation HONLS. Les expériences numériques faites sur le réseau, dont les résultats seront présentés ultérieurement, montrent une nette différence entre les deux types d'instabilité; le premier type d'instabilité modulationnelle conduit à la formation des solitons pulses alors que le second génère plutôt un état quasi-chaotique dans le système.

Références

- [1] M. Remoissenet : 'Waves Called Solitons - 3rd Edition' (Springer Verlag, Berlin, 1999).
- [2] K. E. Lonngren, 'Solitons in Action' , ed. by K. E. Lonngren and A. C. Scott (Academic, New York, 1978).
- [3] T. B. Benjamin & J. E. Feir, *J. Fluid Mech.* **27**, 417, (1967).
- [4] V. I. Bespalov & V.I. Talanov, *Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, **3**, 471, (1966) [*JETP Lett.*, **3**, 307, (1966)].
- [5] E. Seve, P. Tchofo Dinda, G. Millot, M. Remoissenet, J.M. Bilbault & M. Haelterman, *Phys. Rev. A*, **54**, 3519, (1996).
- [6] T. Taniuti & H. Washimi, *Phys. Rev. Lett.*, **21**, 209, (1968).
- [7] A. Hasegawa, *Phys. Rev. Lett.* **24**, 1165 (1970); *Phys. Fluids*, **15**, 870, (1971).
- [8] T. Yagi & A. Noguchi, *Elec. And Commun. Jpn.*, **59**, A, 1, (1976).
T. Yagi, M. Hasegawa & A. Noguchi, *Elec. And Commun. Jpn.* **60** A, 9, (1977).
- [9] P. Marquié, J.M. Bilbault & M. Remoissenet, *Phys. Rev. E*, **49**, 828 (1994).
- [10] A. C. Scott, 'Active and Nonlinear Wave Propagation in Electronics', (Wiley-Interscience, NewYork, 1970).
- [11] T. Taniuti & N. Yajima, *J. Math. Phys.*, **10**, 1369, (1969).
- [12] E. J. Parkes, *J. Phys. A, Math. Gen.* **20**, 2025, (1987).
- [13] K. B. Dysthe, *Proc. R. Soc. Lond. A*, **369**, 105, (1979).

Étude numérique des propriétés de cohérence des spectres de supercontinuum créés dans les fibres à cristaux photoniques

Stéphane Coen¹ et John M. Dudley¹

¹ *Service d'Optique et d'Acoustique, Université Libre de Bruxelles, CP 194/5
Av. F. D. Roosevelt 50, B-1050 Bruxelles, Belgique.*

Tél: +32-2-650.28.01, Fax: +32-2-650.44.96, e-mail: Stephane.Coen@ulb.ac.be

² *Laboratoire d'Optique P. M. Duffieux, Université de Franche-Comté,
Route de Gray 16, F-25030 Besançon, France.*

john.dudley@univ-fcomte.fr

La génération dans les fibres à cristaux photoniques de spectres de lumière blanche (supercontinuum) couvrant plus d'une octave [1] a récemment permis d'importantes avancées dans le domaine de la métrologie des fréquences optiques de haute précision et de la synthèse absolue de fréquences optiques [2]. Comme ces applications nécessitent une lumière blanche hautement cohérente, il est important de déterminer les conditions dans lesquelles il est possible d'obtenir un spectre très large tout en maintenant la cohérence de l'onde de pompe. Dans ce but, nous avons réalisé une étude numérique de la génération de supercontinuum en fibres à cristaux photoniques en vue d'identifier les mécanismes responsables d'une dégradation de la cohérence entre les différentes composantes spectrales.

Pour quantifier la cohérence des spectres issus de nos simulations numériques, nous avons effectué une moyenne d'ensemble des résultats d'un grand nombre de simulations obtenues à partir d'impulsions de pompes affectées d'un bruit quantique aléatoire. Nous avons ainsi pu calculer la dépendance en longueur d'onde du degré complexe de cohérence du premier ordre. Ce degré de cohérence reflète directement la visibilité des franges de Young obtenues en faisant interférer deux sources supercontinuum indépendantes et en résolvant spectralement ces franges [3]. Nos simulations ont montré que la cohérence du continuum dépend fortement de la durée et de la longueur d'onde de l'impulsion de pompe. En particulier, elles révèlent que, pour des impulsions de pompes sub-picosecondes, le principal processus responsable de la perte de cohérence est l'instabilité de modulation, tandis que l'effet Raman stimulé joue un rôle négligeable [4, 5].

En conclusion, nos simulations numériques permettent de déterminer les conditions optimales pour l'obtention de lumière supercontinuum cohérente en vue d'applications à la métrologie du temps et des fréquences. Nous notons également que l'importante perte de cohérence qui se produit sous certaines conditions lors de la génération d'un continuum et qui est associée à une grande gigue temporelle et spectrale pourrait être un facteur limitatif dans les expériences utilisant des techniques telles que FROG (frequency resolved optical gating) pour caractériser en amplitude et en phase les spectres supercontinuum.

Références

- [1] J. K. Ranka, R. S. Windeler, A. J. Stentz, *Opt. Lett.* **25**, 25 (2000).
- [2] R. Holzwarth, M. Zimmermann, Th. Udem, T. W. Hänsch, P. Russbüldt, K. Gäbel, R. Poprawe, J. C. Knight, W. J. Wadsworth, P. St. J. Russell, *Opt. Lett.* **26**, 1376 (2001).

- [3] M. Bellini, T. W. Hänsch, *Opt. Lett.* **25**, 1049 (2000).
- [4] G. P. Agrawal, *Nonlinear Fiber Optics*, 3ème édition (Academic Press, San Diego, 2001).
- [5] M. N. Islam, G. Sucha, I. Bar-Joseph, M. Wegener, J. P. Gordon, and D. S. Chemla, *J. Opt. Soc. Am. B*, **6**, 1149 (1989).

Liste des auteurs

| | | | |
|-----------------------|---------|-----------------------|------------|
| Aziz Alaoui M.A. | 67 | Genin É. | 91 |
| Bavard X. | 13 | Gigan S. | 97 |
| Belhache F. | 19 | Gil L. | 207,225 |
| Bidégaray B. | 1 | Gilmore R. | 125 |
| Bielawski S. | 72 | Godard A. | 7 |
| Bilbault J.M. | 165,259 | Goedgebuer J.-P. | 13,91 |
| Boiron M.-A. | 141 | Goharzadeh A. | 103 |
| Boulanger B. | 73 | Grelu Ph. | 19 |
| Bruni C. | 25 | Grynberg G. | 231 |
| Cambournac C. | 31 | Gutty F. | 19 |
| Carminati F.-R. | 231 | Guyomarch D. | 201 |
| Chaskalovic J. | 37 | Haelterman M. | 31,213 |
| Chauvet M. | 43 | Jauslin H.R. | 153 |
| Chauvière A. | 37 | Kaufman M. | 249 |
| Cherieux F. | 171 | Kockaert P. | 31 |
| Chiffaudel A. | 147 | Léon J. | 119 |
| Coen S. | 265 | Lagrange M. | 109 |
| Comte J.C. | 165 | Lantz E. | 219 |
| Coudreau T. | 131 | Larger L. | 13,91,113 |
| Coullet P. | 255 | Laurat J. | 131 |
| Couprie M.E. | 25,61 | Lebon G. | 135 |
| Couton G. | 43 | Lefranc M. | 72 |
| Cros A. | 49 | Le Gal P. | 49 |
| Darrigan C. | 55 | Letellier C. | 125,249 |
| Daviaud F. | 147 | Longchambon L. | 131 |
| De Ninno G. | 25,61 | Madruga S. | 135 |
| Derivière S. | 67 | Maerten S. | 7 |
| Derozier D. | 72 | Maillot H. | 31,171,219 |
| Douady J. | 73 | Maissa P. | 159,207 |
| Dubreuil N. | 7 | Maitre A. | 97 |
| Ducci S. | 97 | Malasoma J.-M. | 125,141 |
| Dudley J. M. | 265,79 | Marié L. | 147 |
| Dumas E. | 85 | Marquié P. | 165,259 |
| Dumouchel F. | 103 | Martinelli M. | 97 |
| Elskens Y. | 152 | Mathey P. | 153 |
| Emplit Ph. | 31 | Mathis C. | 159,207 |
| Erneux T. | 72,113 | Millot G. | 79,213 |
| Escande D.F. | 152 | Mindlin G.B. | 243 |
| Fabre C. | 131,97 | Morfu S. | 165 |
| Fanelli D. | 25,61 | Mountasser R. | 171 |
| Fève J.P. | 73 | Mussot A. | 177,219 |
| Folch R. | 170 | Mutabazi I. | 103 |
| Géniet F. | 119 | Neukirch S. | 183 |

| | | | |
|--------------------------|------------|-------------------------|------------|
| Odoulov S.G. | 153 | Sauter A. | 79 |
| Pérez García C. | 135 | Schiavoni M. | 231 |
| Pastur L. | 189,124 | Schmitt F. | 237 |
| Pauliat G. | 7 | Sciamarella D. | 243 |
| Petrossian A. | 195,225 | Seuront L. | 237 |
| Pierre Th. | 201 | Sylvestre T. | 31,177,219 |
| Pirat Ch. | 207 | Szwaj C. | 72 |
| Pitois S. | 213 | Thomas R. | 249 |
| Plapp M. | 170 | Treps N. | 97 |
| Plumecoq J. | 72 | van de Water W. | 189,124 |
| Provino L. | 79,177,219 | van der Heijden G. | 183 |
| Rérat M. | 55 | Vandenberghe N. | 255 |
| Reboud V. | 7 | Vanderlinden B. | 31 |
| Renzoni F. | 231 | Werny P. | 125 |
| Residori S. | 195,225 | Westra M.T. | 189,124 |
| Roosen G. | 7 | Yemélé D. | 259 |
| Rytz D. | 153 | Zhang K.S. | 131 |
| Sanchez-Palencia L. | 231 | | |