

Y. Pomeau et R. Ribotta

**Compte-rendus**

**de la**

**7<sup>e</sup> Rencontre du Non-Linéaire**

Paris 2004

## **Non Linéaire Publications**

Bât. 510 Université de Paris-sud, 91405 ORSAY cedex

pnl@lps.u-psud.fr

<http://pnl.lps.u-psud.fr/pnl>

La loi du 11 mars 1957 n'autorise que les "copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective". **Toute représentation ou reproduction, intégrale ou partielle, faite sans le consentement de l'éditeur est illicite.** Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du Code Pénal.

Dépôt légal : 04.04

ISBN 2-9516773-3-2

EAN 9782951677333

RENCONTRES DU NON LINÉAIRE  
Institut Henri Poincaré, PARIS,  
10-12 mars 2004

Nous remercions vivement Michel Broué, Directeur de l'Institut Henri Poincaré pour son aide à l'organisation de ces Rencontres, et le Département des Sciences pour l'Ingénieur (SPI) du CNRS pour son soutien financier par le GDR "Physique Non Linéaire".

Les Rencontres annuelles du Non Linéaire sont organisées par :

Serge Aubry	<i>Labo. Léon Brillouin - CEA Saclay</i>
François Alouges	<i>Labo. Anal. Num. EDP - Orsay</i>
Sergio Ciliberto	<i>Labo. Phys. ENS-Lyon</i>
Pierre Collet	<i>Centre Phys. Théor.- Polytechnique</i>
Pierre Coullet	<i>INLN Univ. Nice-Sophia-Antipolis</i>
Pierre Glorieux	<i>Labo. PhLAM - Univ. Lille1</i>
Vincent Hakim	<i>Labo. Phys. Stat.- ENS - Paris</i>
Gérard Iooss	<i>INLN Univ. Nice-Sophia-Antipolis</i>
Alain Joets	<i>Labo. Phys. Solides - Orsay</i>
Christophe Letellier	<i>Coria - Rouen</i>
Laurent Larger	<i>Labo. Duffieux - Besançon</i>
Yves Pomeau	<i>Labo. Phys. Stat.- ENS Paris</i>
Roland Ribotta	<i>Labo. Phys. Solides - Orsay</i>
Jean-Claude Saut	<i>Labo. Anal. Num. EDP - Orsay</i>
Bernard Schmitt	<i>Labo. Topologie - Univ. Bourgogne. Dijon</i>

Ces compte-rendus et ceux des années précédentes sont disponibles auprès de :

*Non Linéaire Publications*  
*Bât. 510, Université de Paris-sud, 91405 ORSAY cedex*

Toutes les informations concernant les Rencontres sont publiées sur le serveur :

<http://pnl.lps.u-psud.fr/pnl>

Renseignements :

[pnl@lps.u-psud.fr](mailto:pnl@lps.u-psud.fr),





# Sommaire

<b>Interaction d'une onde solitaire avec un fond meuble</b> <i>N. Abcha, J.H.C.Titon, A.B. Ezersky et F. Marin</i> .....	<b>1</b>
<b>Etude clinique de la ventilation non invasive à l'aide de portraits de phase</b> <i>L. Achour, C. Letellier, A. Cuverlier et J.-F. Muir</i> .....	<b>7</b>
<b>Formes et stabilité d'un tube de membrane biologique à deux phases</b> <i>J.M. Allain, C. Storm, M. Ben Amar, J.F. Joanny</i> .....	<b>13</b>
<b>Mécanisme d'apparition d'un régime spatio-temporel intermittent dans un laser monomode</b> <i>D. Amroun, M. Brunel, C. Letellier, H. Leblond et F. Sanchez</i> .....	<b>19</b>
<b>Fissures oscillantes dans les feuilles élastiques minces</b> <i>B. Audoly et al.</i> .....	<b>25</b>
<b>Dynamique spatiale d'un système hôte-parasitoïde</b> <i>P. Auger</i> .....	<b>31</b>
<b>Contrôle de la bifurcation de Hopf d'un Laser à Electrons Libres</b> <i>S. Bielawski, et al.</i> .....	<b>37</b>
<b>Transition vers la turbulence de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz dans une colonne de plasma magnétisé</b> <i>F. Brochard, G. Bonhomme et E. Gravier</i> .....	<b>43</b>
<b>Caractérisation du chaos temporel généré sur un oscillateur forcé de type Laser à Electrons libres</b> <i>C. Bruni, et al.</i> .....	<b>49</b>
<b>Contrôle du chaos Hamiltonien</b> <i>G. Ciraolo, C. Chandre, R. Lima, M. Vittot</i> .....	<b>55</b>
<b>Brisure spontanée de symétrie dans un Oscillateur Paramétrique Optique de type II</b> <i>L. Longchambon, N. Treps, T. Coudreau, J. Laurat, C. Fabre</i> .....	<b>61</b>
<b>Pompage inhomogène dans un oscillateur paramétrique optique dégénéré</b> <i>S. Coulibaly et M. Taki</i> .....	<b>67</b>

<b>Bifurcation dans un modèle non-linéaire de production du sang</b> <i>F. Crauste, M. Adimy</i> .....	73
<b>Évolution Non-linéaire d'un Jet Tourbillonnaire.</b> <i>I. Delbende, M. Rossi</i> .....	79
<b>Rides tourbillons à la surface d'un lit granulaire fortement incliné, cisailé par un écoulement continu</b> <i>D. Doppler, T. Loiseleur, P. Gondret et M. Rabaud</i> .....	85
<b>Modélisation des processus de maintien et de développement du copépode <i>Eurytemora affinis</i> dans l'estuaire de la Seine</b> <i>G. Dur, S. Souissi, F. G. Schmitt, D. Devreker</i> .....	91
<b>Solitons dynamiques dans un oscillateur paramétrique optique contrapropagatif pompé en continu</b> <i>C. Durniak, M. Taki et C. Montes</i> .....	97
<b>Transport électrique non linéaire dans les milieux granulaires 1D</b> <i>E. Falcon, B. Castaing et M. Creyssels</i> .....	103
<b>Similaritons Raman</b> <i>C. Finot, G. Millot et J. Dudley</i> .....	109
<b>Application de Cryptage par Chaos aux Communications Optiques Multi-GigaBit</b> <i>N. Gastaud, L. Larger, F. Malassenet, J.M. Merolla, M. Hanna et Y. Chembo Kouomou</i> .....	115
<b>Modélisation des rythmes circadiens chez la drosophile et chez les mammifères</b> <i>A. Goldbeter et J.-C. Leloup</i> .....	121
<b>Diagrammes de phase d'oscillateurs photoréfractifs cohérents non-linéaires</b> <i>M. Grapinet, P. Mathey, H. R. Jauslin, S. G. Odoulov, D. Rytz</i> .....	131
<b>Analyse non linéaire de l'EEG dans la sclérose en plaques</b> <i>W. Hamadene, L. Peyrodie</i> .....	137
<b>Couplage entre deux neurones électroniques dans une configuration maître-esclave</b> <i>S. Jacquir, S. Binczak, J.M. Bilbault</i> .....	143
<b>Transition sous-critique à la turbulence dans l'écoulement de Couette plan</b> <i>M. Lagha &amp; P. Manneville</i> .....	149
<b>Transition des spirales vers les spirales interpénétrantes dans le système de Couette-Taylor</b> <i>N. Latrache, A. Ezersky et I. Mutabazi</i> .....	155

<b>Spirales, chaos de spirales et spirales dentelées en optique</b> <i>M. Le Berre, E. Ressayre, A. Tallet, M. Tlidi</i> .....	161
<b>Instabilité d'un rideau liquide</b> <i>L. Lebon, J.S. Roche, P. Brunet, N. Le Grand et L. Limat</i> .....	167
<b>Convection naturelle dans un anneau cylindrique vertical</b> <i>V. Lepiller, A. Prigent, F. Dumouchel et I. Mutabazi</i> .....	173
<b>Instabilité dynamo en présence de bruit</b> <i>N. Lévêque, B. Dubrulle</i> .....	179
<b>Discrétisation de systèmes dynamiques par schémas non standards</b> <i>C. Letellier et E. Mendes</i> .....	185
<b>Analyse de séries temporelles produites par des lasers en régime chaotique</b> <i>A. Locquet, L. Larger, X. Bavard, J.-P. Goedgebuer</i> .....	191
<b>Modélisation de l'impact d'un vaccin vivant atténué sur la dynamique de la transmission du virus de l'immunodéficience humaine.</b> <i>Jean-Marc Malasoma et Marie-Aurélien Boiron</i> .....	197
<b>Etude expérimentale de la diffusion dans un système granulaire cisailé</b> <i>G. Marty, O. Dauchot</i> .....	203
<b>Un modèle d'applications couplées (CMN) pour la dynamique des réseaux de régulation génétique.</b> <i>R. Coutinho, B. Fernandez, R. Lima, A. Meyroneinc</i> .....	209
<b>Identification de troubles du rythme cardiaque par dynamique symbolique sur intervalles RR chez le rat sain et insuffisant cardiaque</b> <i>J.-P. Morin, S. Lorient, E. Roulin et C. Letellier</i> .....	215
<b>Etude de la transition 3D-2D des écoulements turbulents en rotation</b> <i>C. Morize, F. Moisy, M. Rabaud</i> .....	221
<b>Estimation de la rigidité de torsion de l'ADN</b> <i>S. Neukirch</i> .....	227
<b>Cryptage par chaos en fréquence appliqué aux télécommunications hertziennes</b> <i>A. Pallavisini, L. Larger, V. Udaltsov, J.-P. Goedgebuer</i> .....	233
<b>Déstabilisation d'une nappe cylindrique verticale de fluide visqueux</b> <i>C. Pirat, Ph. Maïssa, Ch. Mathis</i> .....	239
<b>Convection quasigéostrophique dans un cylindre annulaire tournant : étude systématique d'un modèle incluant des effets de courbure</b> <i>E. Plaut et F. H. Busse</i> .....	245

<b>Bifurcation globale et effet mémoire dans un écoulement très turbulent</b> <i>F. Ravelet, A. Chiffaudel, F. Daviaud, L. Marié</i> .....	<b>251</b>
<b>Non Linéarités Géantes des Cristaux Liquides Dopés par des Colorants :Effets de Surface</b> <i>G. Russo, S. Residori et A. Petrosyan</i> .....	<b>257</b>
<b>Le jeu de la survie en dynamique non linéaire</b> <i>M. A. F. Sanjuán, J. Aguirre et F. d'Ovidio</i> .....	<b>263</b>
<b>Approches multifractales pour des séries temporelles en biologie.</b> <i>F. G. Schmitt, L. Seuront</i> .....	<b>269</b>
<b>Le non linéaire et la production vocale</b> <i>D. Sciamarella</i> .....	<b>275</b>
<b>Évaporation d'un film mince : Instabilités de Marangoni induites par l'évaporation limitée par la diffusion</b> <i>E. Sultan, A. Boudaoud, M. Ben Amar</i> .....	<b>281</b>
<b>Modélisation du comportement cinétique des FDS (functioning-dependent structures) dans les systèmes vivants</b> <i>C. Thellier, V. Norris et C. Ripoll</i> .....	<b>287</b>
<b>Rapport d'aspect et propriétés énergétiques de l'écoulement turbulent entre deux disques contrarotatifs</b> <i>J. H. C. Titon, O. Cadot</i> .....	<b>293</b>
<b>Caractérisation de la propagation d'impulsions dans les systèmes de communication par fibre optique utilisant un codage à changement de phase différentiel</b> <i>A. Tonello, S. Wabnitz</i> .....	<b>299</b>
<b>Oscillations, multistabilité et robustesse dans les réseaux de régulation cellulaire</b> <i>B. Vandenbunder</i> .....	<b>305</b>
<b>Décomposition Spinodale et Coalescence pour — l'équation de Cahn-Hilliard unidimensionnelle</b> <i>S. Villain</i> .....	<b>311</b>
<b>Signatures dynamiques d'un auto-verrouillage de phase induit par compétition de processus <math>\chi^{(2)}</math> dans un OPO triplement résonnant:Observation d'une bifurcation de Hopf inverse</b> <i>J.-J. Zondy et D. Kolker</i> .....	<b>317</b>

## Interaction d'une onde solitaire avec un fond meuble

N. Abcha<sup>1</sup>, J.H.C. Titon<sup>1</sup>, A.B. Ezersky<sup>2</sup> et F. Marin<sup>1</sup>

(1) LMPG, Université du Havre, BP. 540, 76058 Le Havre Cedex

(2) Institute of Applied Physics, Russian Academy of Science, 46 Ulyanov Street,  
603950 Nizny Novogorod, Russia  
nizar.abcha@univ-lehavre.fr

### Résumé

L'interaction d'une onde solitaire avec un fond sableux est étudiée dans une cavité de  $L = 10\text{ m}$  de longueur,  $l = 0,5\text{ m}$  de largeur, utilisée en mode résonnant. Les ondes solitaires sont générées en eau peu profonde sur le fond d'une onde harmonique. Le but de cette étude est d'analyser la redistribution d'un fond sableux initialement réparti sous l'action d'un soliton. Pour cela, nous avons mis au point une technique expérimentale permettant le suivi spatio-temporel de la bathymétrie du fond. Cette technique est basée sur l'acquisition et l'analyse d'images. Après avoir filmé l'évolution temporelle du fond sableux, nous utilisons un programme développé sous LabView qui permet d'analyser notamment le réseau de rides et d'estimer précisément les longueurs et les amplitudes de ride. Il est en particulier possible d'étudier spatialement la dynamique des défauts présents dans les réseaux de rides.

## 1 Introduction

De nombreuses études ont été réalisées sur l'interaction d'une onde de gravité linéaire ou faiblement non linéaire avec un fond sableux [1, 2]. Cependant, il n'existe pas à notre connaissance d'étude systématique sur l'interaction d'une onde fortement non linéaire telle qu'un soliton avec un fond meuble. L'interaction d'une onde solitaire avec un fond sableux est étudiée dans une cavité de  $L = 10\text{ m}$  de longueur,  $l = 0,5\text{ m}$  de largeur, utilisée en mode résonnant. Les ondes solitaires sont générées en eau peu profonde sur le fond d'une onde harmonique [3]. La fréquence d'excitation est choisie proche de celle du second mode de résonance ayant une longueur d'onde égale à celle de la cavité. Ces ondes solitaires qui peuvent se croiser et conserver leur forme après la collision sont souvent appelées solitons.

## 2 Dispositif expérimental

Les expériences ont été menées dans un canal à houle à parois de verre de  $L = 10\text{ m}$  de longueur,  $l = 0,5\text{ m}$  de largeur. La hauteur d'eau est  $h = 0,26\text{ m}$ . Ce canal permet de générer des solitons en excitant les ondes de surface à l'aide d'un batteur placé à une extrémité du canal et oscillant dans la direction horizontale Fig. 1. L'autre extrémité du canal donne une réflexion quasi parfaite. Le déplacement de la surface libre est mesuré par des sondes résistives. Une sonde est placée à l'extrémité (réfléchissante) opposée au batteur et l'autre sonde peut être déplacée le long du canal. Lors de l'expérience, la fréquence d'excitation extérieure a été choisie très proche de  $f_r = 0,165\text{ Hz}$  qui est la fréquence du mode de résonance  $k = 2$  pour lequel la longueur d'onde est égale à la longueur du canal. Plusieurs techniques permettent de mesurer les vitesses de particules d'eau mises en mou-

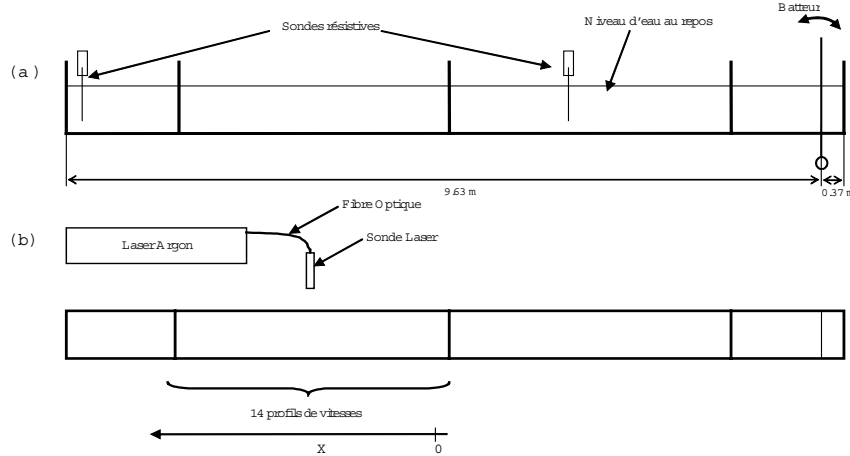


FIG. 1 – Vue de dessus et de côté du canal

vement par la propagation de la houle. La plupart des procédés classiques ne fournissent que des valeurs moyennes et perturbent l'écoulement. Pour remédier à ce problème, le choix du système de mesure s'est porté vers la vélocimétrie laser Doppler qui permet de mesurer des vitesses instantanées sans perturber l'écoulement. Les composantes horizontales et verticales des vitesses d'écoulement ont été mesurées dans le cas où aucun sédiment n'a été placé dans le résonateur (canal). Ces mesures ont été effectuées avec un laser argon de 4 W en mode de rétrodiffusion. Le volume de mesure est de  $0.14 \text{ mm}^3$ . Quatorze profils verticaux de vitesse ont été effectués le long du canal Fig 1, avec une distance entre deux profils verticaux de 20 cm. Les mesures ont été effectuées du fond à une hauteur  $y$  de 174 mm avec un temps de cinq minutes d'acquisition par point de mesure. Le sédiment utilisé est du sable caractérisé par un diamètre moyen de grain  $D50 = 152 \mu\text{m}$  et par une densité relative  $s = 2,65$ . La redistribution d'un fond sableux initialement réparti sous l'action d'un soliton, peut nécessiter plusieurs jours pour obtenir un régime stable. L'évolution temporelle de la surface libre est régulièrement enregistrée.

### 3 Interaction induite par une onde solitaire

Les essais préliminaires effectués sans sédiments ont laissé indiquer les secteurs d'excitation d'ondes solitaires (solitons), en termes de fréquence et d'amplitude de mouvement du batteur (Ezersky *et al.* 2003). Afin d'avoir une onde solitaire se propageant dans chaque direction du canal sur la période temporelle de l'écoulement, la fréquence de l'excitation est fixé à  $f = 0,173 \text{ Hz}$  et l'amplitude de déplacement horizontal du batteur moyennée sur la hauteur était à  $a_h = 6 \text{ cm}$ , pour l'essai effectué avec des sédiments. Le profil des solitons créés est bien représenté (Ezersky *et al.* 2003) par le profil théorique suivant :

$$\eta = a_s \cosh^{-2} \left[ \sqrt{\frac{3a_s}{8d^3}} (x - Vt) \right] \quad (1)$$

Où  $\eta$  est l'amplitude de surface libre,  $a_s$  amplitude du soliton,  $d$  la profondeur d'eau au repos,  $V$  la vitesse de propagation du soliton et  $t$  le temps. Au début de l'essai, le fond est uniformément repartit d'une couche de sable de 20 mm. La Fig. 2a montre schématiquement

la distribution initiale du sable le long du canal ( $t = 0$ ), et la Fig. 2b l'évolution temporelle de la surface libre à l'extrémité réfléchissante du canal ( $t = 3mn40$ ), où le niveau 0 mm correspond au niveau d'eau au repos. L'apparition de petites rides commence à avoir lieu rapidement après quelques minutes de l'excitation de surface libre. Ces rides se repartissent sur toute la longueur du canal, excepté dans la partie centrale du canal où le fond reste plat sur une longueur de l'ordre de 40 cm. Cette zone correspond à la région de la collision des deux ondes solitaires contra-propagatives qui se déplacent d'une extrémité du canal à l'autre. Les vitesses d'écoulement dans cette zone sont très faibles à proximité du fond. La valeur de la contrainte de cisaillement au fond est en-dessous de la valeur critique pour le déclenchement du mouvement du sable et le fond n'est pas affecté par les ondes de surface dans cette partie centrale du canal. Dans les autres parties, les amplitudes de rides augmentent progressivement et une interaction forte avec la surface libre se produit. La Fig. 2c et la Fig. 2d dépeignent respectivement la distribution du sable le long du canal et l'évolution temporelle de la surface libre à  $t = 30mn$ , soit après approximativement 310 cycles d'excitation. La valeur maximale de l'élévation de la surface libre est nettement inférieure à la valeur correspondante à  $t = 0$ , dû à la dissipation de l'énergie par la couche limite du fond, et la largeur du pic est plus grande qu'à  $t = 0$ . L'augmentation de la largeur du pic pour une valeur décroissante de l'amplitude maximale est une propriété typique des solitons [4]. A un instant donné, la taille de rides dépend de l'amplitude orbitale locale de fluide; à partir du fond plat dans la partie centrale du canal, la longueur d'onde et la hauteur des rides augmentent progressivement avec la distance  $x$  le long du canal (dans les deux directions). Les dimensions des ondulations sont maximales à environ 2m du centre du canal; au delà de ce secteur, la taille diminue pour des valeurs croissantes de  $x$ . La

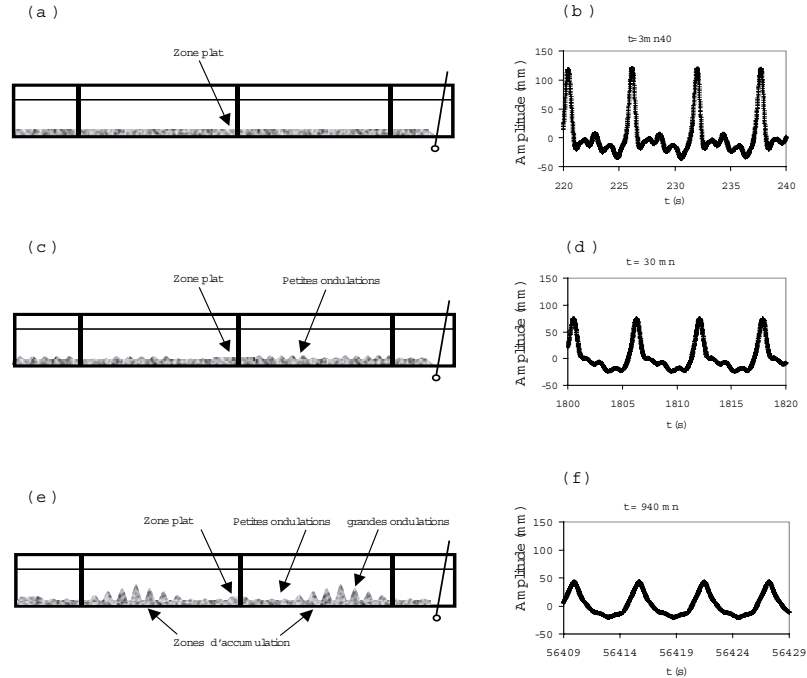


FIG. 2 – Schéma de distribution de sable dans le canal (a, c, e) et évolution temporelle de la surface libre (b, d, f) (a, b): début de l'essai, (c, d):  $t = 30mn$ , (e, f):  $t = 940mn$

dynamique de l'évolution du fond est ensuite plus lente. A  $t = 940mn$ , soit après environ

9760 cycles d'excitation, deux zones d'accumulation de sable sont clairement apparues, comme montré dans la Fig. 2e. Ces deux zones sont symétriques par rapport au plan vertical orienté perpendiculairement à l'axe longitudinal du canal et passant par son centre ( $x = 0$ ). Les zones d'accumulation se développent progressivement et forment des barres avec des crêtes situées sous les noeuds de surface libre. C'est une différence importante avec les essais impliquant des ondes stationnaires ou partiellement stationnaires où les crêtes des barres se positionnent, sous les ventres de surface libre, en régime de suspension (O'Hare et Davies (1990)) [5]. La position de barre est un paramètre très important en ce qui concerne leur capacité à réfléchir l'énergie de l'onde incidente dans le cas d'onde partiellement stationnaire (O'Hare et Davies (1990)).

Les plus grandes rides se situent à proximité des crêtes de barre avec une longueur d'onde et une amplitude approximativement de 15 cm et de 4 cm. La Fig. 3 montre une série de quatre photographies qui ont été assemblées pour montrer la distribution de sable sur une longueur de 6 m dans la partie centrale du canal après approximativement 4800 mn d'excitation de surface libre.

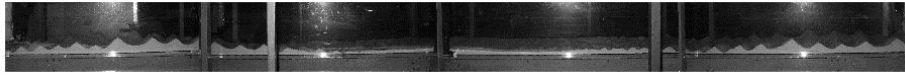


FIG. 3 – Distribution de sable le long de 6m du canal (partie centrale)

## 4 technique d'enregistrement du profil du fond sableux

Afin de visualiser l'évolution de la distribution des sédiments par rapport au temps en partant d'un fond initialement plat, nous avons mis au point une technique expérimentale permettant le suivi spatio-temporel de la bathymétrie du fond. Cette technique est basée sur l'acquisition et l'analyse d'images. Les images sont acquises en filmant la trace laissée sur le fond sableux par un plan laser vertical orienté perpendiculairement à l'axe du canal. Le déplacement de la nappe le long du canal permet d'obtenir la distribution du sable sur la longueur de déplacement. Cette nappe est générée à l'aide d'une lentille cylindrique traversée par un faisceau laser guidé à l'aide d'une fibre optique comme montré Fig. 4. Après avoir filmé l'évolution temporelle du fond sableux, nous utilisons un programme

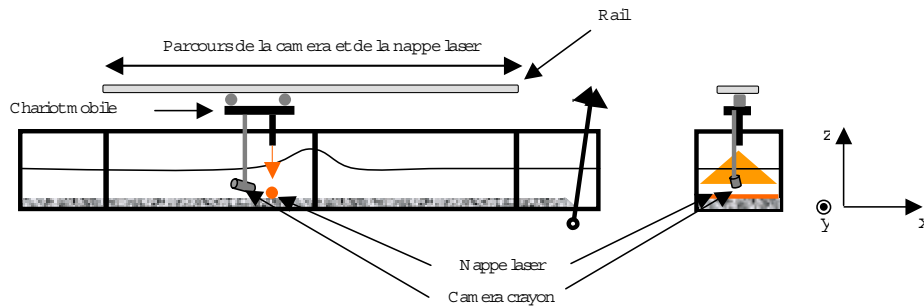


FIG. 4 – Dispositif expérimental de visualisation



développé sous LabView qui permet d'analyser la redistribution du sable. Il est alors possible d'estimer précisément les longueurs et les amplitudes des rides.

## 5 Traitement des films et résultats

Dans un premier temps, le film est séquencé en intervalles de temps réguliers à l'aide du logiciel VirtualDub. La seconde étape consiste à analyser les images à l'aide d'un programme développé sous LabView. Ce programme permet de localiser sur chaque image la trace laissée par la nappe laser sur le fond et d'obtenir ainsi la hauteur locale du sable. Une cartographie de l'altitude du fond sableux peut ainsi être obtenue sur toute la zone d'essai. La Fig. 5a montre la trace laissée à un instant donné sur le fond par la nappe laser (ligne blanche). La résolution spatiale est de  $0.83\text{pixels}/\text{mm}$ . La Fig. 5b montre la distribution du sable sous forme de carte d'altitude à  $t = 2820\text{mn}$ , soit après environ 29280 cycles d'excitation. La résolution spatiale le long du canal suivant  $x$  est de  $0.31\text{pixels}/\text{mm}$ . La redistribution du sable sous l'action des solitons peut ainsi être suivie temporellement, à partir de l'acquisition des images à différents instants. Deux zones d'accumulation de sable sont apparaissent clairement, symétriquement par rapport au plan vertical orienté perpendiculairement à l'axe longitudinal du canal et passant par son centre ( $x = 0$ ), formant ainsi des barres avec les crêtes situées sous les noeuds de surface libre.

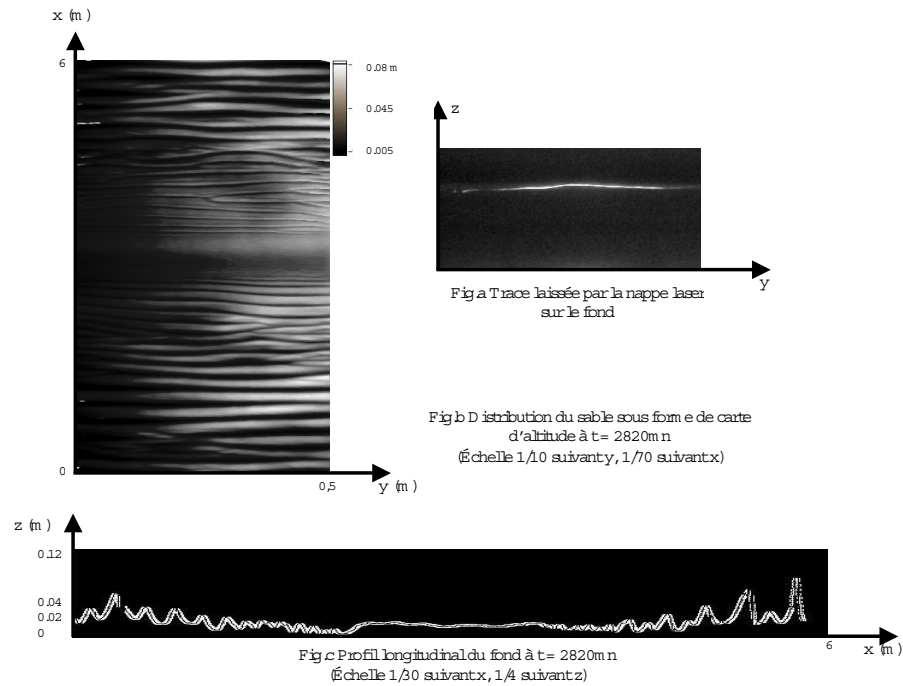


FIG. 5 – Résultats

## 6 Conclusion

Les rides sont également bien visibles sur la Fig. 5b et l'on peut distinguer localement la présence des défauts. La zone centrale met en évidence un domaine où le fond est resté inchangé par rapport au début de l'essai, comme précisé précédemment. La Fig. 5c présente l'évolution de l'altitude du fond le long d'une ligne parallèle à l'axe du canal ( $y$  constant), à  $t = 2820mn$ , soit après 29280 cycles d'excitation.

Une technique expérimentale originale basée sur l'analyse d'images a été mise au point afin de suivre l'évolution spatio-temporelle de la bathymétrie dans le cas de la propagation d'une onde solitaire au-dessus d'un fond sableux dans un canal utilisé en mode résonnant. La redistribution du sable et notamment les longueurs d'ondes et les amplitudes des ondulations apparaissant sur le fond peuvent être obtenue précisément sur toute la veine d'essai à l'aide d'un programme développé sous LabView.

## Références

- [1] P.Nielsen, *Coastal bottom boundary layers and sediment transport*, Advanced series on ocean engineering, vol 4, World Scientific, 1992.
- [2] F. Marin, A. Jarno-Druaux et J. Brossard, *Formation dynamics and geometry of ripples under waves*, E.Foti, J. FredsØe (Eds), Sea Wave Bottom Boundary Layer, Euromech Colloquium 451, Taormina, Italy, 75-76, 2003
- [3] A.B.Ezersky, J.Brossard, F.Marin et I.Mutabazi, *Excitation des solitons et des états liés de solitons dans un canal d'eau peu profonde*, Rencontre du Non Linéaire, 113-118, 2003.
- [4] Remoissenet, *Waves called solitons: Concepts and Experiments*, Springer-Verlag, Berlin, 1996.
- [5] T. J. O'Hare and A.G. Davies, *A laboratory study of sand bars evolution*, J. of Coastal Res., Vol. 6(3), 531-544, 1990.

## Etude clinique de la ventilation non invasive à l'aide de portraits de phase

L. Achour †, C. Letellier †, A.Cuvelier ‡ et J-F. Muir ‡

† *Groupe d'Analyse TOpologique et de MOdélisation de SYstèmes Dynamiques  
CORIA UMR 6614 - Université de Rouen, BP 12, 76801 Saint-Etienne du Rouvray*

‡ *Service de Pneumologie et Soins Intensifs, Hopital de Bois-Guillaume  
Centre Hospitalier Universitaire de Rouen, 76031 Rouen Cedex*

`linda.achour@coria.fr`

### Résumé

La bronchopneumopathie chronique obstructive (BPCO) est classée par l'Organisation Mondiale de la Santé comme la quatrième cause de mortalité, après les cardiopathies ischémiques, les cancers et les maladies cérébro-vasculaires [1]. La BPCO touche presque invariablement les fumeurs et les anciens fumeurs. Si elle ne peut être guérie, la BPCO peut être traitée par une approche pharmacologique, par oxygénothérapie de longue durée et, dans le cas de formes évoluées de la maladie, par ventilation non invasive (VNI).

## 1 Introduction

La Bronchopneumopathie Chronique Obstructive (BPCO) se définit comme une maladie chronique et lentement progressive, caractérisée par une diminution non complètement réversible des débits aériens dans l'arbre bronchique et dans les voies aériennes [1]. Cette diminution est provoquée par une obstruction généralisée des voies aériennes et par un rétrécissement au niveau des bronches de petits calibres. Cette obstruction génère une dyspnée dont le mécanisme est plurifactoriel. D'une part, elle entraîne une distension thoracique qui a pour conséquence de placer les muscles respiratoires dans de mauvaises conditions fonctionnelles et, ainsi, de favoriser leur fatigue. D'autre part, l'augmentation des résistances à l'écoulement de l'air augmente le travail ventilatoire. Enfin, y est associé une diminution de l'oxygénation artérielle et une diminution de l'élimination du dioxyde de carbone produit physiologiquement. La distension pulmonaire est à l'origine d'une pression positive intrinsèque de fin d'expiration ( $PEP_i$ ). La  $PEP_i$  est responsable de l'accroissement important de la charge imposée aux muscles respiratoires pour maintenir une ventilation minute proche de la normale. Les patients maintiennent leur ventilation minute en augmentant leur fréquence respiratoire et en diminuant leur volume courant (*rapid shallow breathing*). La bronchite chronique est caractérisée par une inflammation chronique et un rétrécissement des bronchioles respiratoires. L'emphysème est une distension progressive des alvéoles pulmonaires associée à une destruction de leurs parois élastiques. Le poumon perd alors son élasticité et majore à l'expiration le piégeage bronchique. La respiration devient superficielle et s'y associe une augmentation de l'espace mort, une hypercapnie et une acidose respiratoire compensée, responsable d'une hypoxémie.

Plusieurs études cliniques ont souligné l'intérêt de la VNI chez des patients présentant une BPCO au stade d'Insuffisance Respiratoire Chronique (IRC). Chez ces patients, le traitement de la BPCO au stade de l'IRC repose d'abord sur l'oxygénothérapie de longue

durée. Les patients hypercapniques peuvent être traités par une assistance ventilatoire qui peut être invasive par trachéotomie ou non invasive par masque facial ou nasal. La VNI a pour objectif d’assurer une ventilation alvéolaire suffisante afin de normaliser les gaz du sang et de diminuer la fatigue des muscles respiratoires tout en permettant un confort respiratoire acceptable au patient [2]. Lors d’une décompensation d’une BPCO (hypercapnie + acidose avec un pH sanguin  $> 7,36$ ), l’emploi de la VNI permet d’améliorer les échanges gazeux, et de réduire significativement 1) le taux d’intubation, 2) les complications inhérentes à l’abord endotrachéal (complications traumatiques laryngo-trachéales, pneumopathie nosocomiale ou baro-traumatisme), 3) la durée de l’hospitalisation et 4) le taux de mortalité [3, 4]. De plus, la VNI tend à compenser l’excès de travail respiratoire dû à l’augmentation des résistances des voies aériennes causée par l’obstruction bronchique [5]. La présente étude vise à apporter quelques précisions sur les interactions complexes entre patient et ventilateur de VNI dont la qualité se traduit par le critère essentiel qui est une bonne synchronisation entre le ventilateur et le patient. Une analyse des effets de modifications de la pression inspiratoire est menée chez quatre patients BPCO au stade d’IRC.

## 2 Protocole clinique

Lors de notre étude, nous utilisons le dispositif expérimental décrit en [6]. Les patients sont équipés d’un masque facial sans fuite intentionnelle (Mirage facial, RESMED, North Ryde, Australie). La fuite intentionnelle du type “whisper swivel” (RESPIRONICS, Pittsburgh, PA) permet d’éviter au patient de réhaler le gaz carbonique émis lors de l’expiration précédente. Le pneumotachographe de type Fleisch (METABO, Suisse) est un débitmètre dont le principe de la mesure du débit est basé sur une perte de charge linéique par interposition d’une fine grille qui a l’avantage de rendre l’écoulement laminaire. Le débit  $Q_v$  est alors déterminé selon la loi de Poiseuille. Les variations de pression dans les voies aériennes sont mesurées par un capteur de pression différentielle DP 15 (VALIDYNE, Northridge, CA). Le BIOPAC MP150 (CEROM, France) permet d’acquérir les mesures du débit et de la pression en continu à une fréquence de 100 Hz. Un filtre antibactérien est placé à la sortie immédiate du ventilateur pour éviter toutes contaminations microbiennes par le patient.

Le protocole clinique consiste à augmenter la pression inspiratoire imposée par le ventilateur de 10 à 20 mbar par paliers de 2 mbar pour une durée d’acquisition de dix minutes. A la fin de chaque changement de PIP, une estimation du confort est faite à l’aide d’une échelle verbale et d’une échelle visuelle analogique. Le ventilateur SMARTAIR ST (AIROX, France) est utilisé en mode Ventilation Spontanée avec Aide Inspiratoire (noté VS-AI) avec une Pression Inspiratoire Positive (PIP), une Pression Expiratoire Positive (PEP = 4 mbar), un seuil de déclenchement inspiratoire — défini sur une variation de débit dans le but de détecter le début de l’effort inspiratoire du patient —  $Q_{\text{insp}} = 1,5 \text{ l/min}$  pour 10 ms, un temps de montée en pression correspond à la durée nécessaire au ventilateur pour passer de la PEP à la PIP de  $T_{\text{mpi}} = 0,4 \text{ s}$  et un seuil de déclenchement expiratoire,  $Q_{\text{exp}} = 0,75 Q_{\text{max}}$ . Le débit inspiratoire et, de ce fait, le temps inspiratoire sont en partie régulés par le patient et la fréquence respiratoire est déterminé par le patient lui-même. Quand l’effort inspiratoire du patient est détecté, une PIP est délivrée dans les voies aériennes jusqu’à l’obtention d’un débit inspiratoire égale à  $0,75 Q_{\text{max}}$ . Ensuite la phase expiratoire est déclenchée en maintenant tout au long la PEP. Parfois, une adjonction d’oxygène est nécessaire pour le patient et administrée au sein du circuit de ventilation.

L'objectif est de maintenir une saturation en oxygène  $SpO_2 > 92\%$ .

### 3 Résultats

L'étude de la qualité de la VNI se fait à l'aide de deux approches : l'une statistique basée essentiellement sur l'évolution du débit et du volume calculé par intégration numérique. Les caractéristiques de la VNI sont habituellement évaluées par le mode ventilatoire par le volume courant,  $V_c$ , la fréquence respiratoire,  $f_r$  et la ventilation minute  $V_E = V_c \cdot f_r$ . Le volume courant dépend de la PIP délivrée et de la compliance de l'ensemble thoraco-pulmonaire de celui-ci. Le rapport  $\frac{T_I}{T_{tot}}$  traduit la capacité du patient à expirer : plus  $\frac{T_I}{T_{tot}}$  est important, plus le patient est capable de rejeter l'air de ses poumons. Lorsque  $\frac{T_I}{T_{tot}}$  diminue, le volume courant est d'autant réduit. De manière à maintenir la ventilation minute, la patient augmente donc sa fréquence respiratoire. Aussi, la fréquence respiratoire est-elle souvent un indicateur de l'état pathologique du patient.

La qualité et le confort de la ventilation dépendent également de deux aspects purement mécaniques, plus ou moins corrélés : la présence de fuites au niveau du masque et les défauts de synchronisation mécanique que nous caractérisons ici par une identification des "cycles non déclenchés". Ceci se réalise par confrontation entre les courbes de débit et de pression. Un cycle non déclenché se traduit par une faible augmentation du débit alors que la pression dans les voies aériennes reste égale à la PEP. Lorsqu'un masque sans fuite intentionnelle est utilisé, un non déclenchement est extrêmement pénible. La présence de nombreux défauts de déclenchement entraînera nécessairement une mauvaise tolérance de la ventilation, comme nous le verrons.

Enfin, de manière à avoir une signature globale de la dynamique du système patient/ventilateur, un portrait de phase est réalisé à partir de la mesure du débit à l'aide de coordonnées décalées  $(Q_v(t), Q_v(t+\tau))$  où  $\tau$  est le décalage temporel. Le choix du décalage temporel est nécessairement lié à l'échelle de temps caractéristique du phénomène étudié. Nous avons observé que le portrait de phase était correctement "déplié" pour un décalage  $\tau = \frac{5}{f_r}$  soit  $\tau = 0.41$  s pour une fréquence respiratoire de 12 cycles par minute. Lorsque la ventilation est régulière et sans incident (non déclenchement, raclement de gorge, fuites non intentionnelles, etc.), le portrait de phase a une allure très ordonnée, plus ou moins indépendante du patient. Il constitue de ce fait un bon indicateur de la dynamique du système patient/ventilateur [6]. Pour les quatre patients étudiés, les portraits de phase révèlent tous une proportion d'incidents plus ou moins marqués.

Quelques précisions sur le comportement respiratoire de chaque patient doivent être ajoutées pour comprendre les événements rencontrés au cours de ces différentes acquisitions. Tout d'abord, les quatre patients présentent une BPCO post-tabagique ; les patients  $P_1$  et  $P_2$  ont un emphysème. L'augmentation de la PIP est plus ou moins tolérée par les patients. Ces patients sont très dyspnéiques et, de ce fait, la fréquence respiratoire est très variable d'un cycle à l'autre.

Leurs poumons sont incapables de se vider facilement de leur air, en raison de leur graduelle perte d'élasticité. L'air reste donc dans les poumons ce qui est dû à la PEP<sub>i</sub>. Par ailleurs, les conduits aériens s'affaissent pendant l'expiration et entravent l'expulsion de l'air. Au cours des acquisitions, nous avons pu constater que ces patients utilisent beaucoup les muscles de l'expiration forcée tels que les muscles de la paroi abdominale ou les muscles intercostaux. De plus, chez les quatre patients, on retrouve le phénomène de toux et d'expectorations. Pour le patient  $P_1$  (Fig. 1), le portrait le plus perturbé est

observé pour  $PIP=14$  mbar révélant de grandes fluctuations. Pour les autres valeurs de la  $PIP$ , des toux fréquentes se traduisent par des perturbations au voisinage de l'origine de l'espace reconstruit. On a remarqué que l'augmentation de la  $PIP$  a tendance à favoriser la production de mucus qui se manifeste par la toux. Les portraits les plus réguliers sont observés pour une  $PIP$  de 12 mbar comme le révèle les déviations standards sur la fréquence respiratoire ou la ventilation minute. Toutefois, le patient ne supporte en aucun cas les fortes pressions et préfère la valeur de 10 mbar.

Le patient  $P_2$  tolère mieux l'augmentation de la  $PIP$ , mais l'apparition de défauts de synchronisation est favorisée par cette augmentation. Pour toute  $PIP > 16$  mbar, une double structure révèle de nombreux cycles non déclenchés (2 à 3 fois plus que pour  $PIP=14$  mbar) et, en parallèle, on observe un inconfort croissant du patient. À partir de  $PIP=14$  mbar, on constate une optimisation de la phase inspiratoire : la fréquence respiratoire est plus stable avec une variance relativement restreinte. Le patient opte pour un compromis entre un petit nombre de cycles non déclenchés, une fréquence respiratoire basse optimisée et une pente inspiratoire plus raide.

Pour des  $PIP < 18$  mbar, le patient  $P_3$  a la sensation de ne pas recevoir assez d'air et se trouve dans une situation d'inconfort respiratoire. Tous les portraits de phase révèlent la double structure caractéristique des non déclenchements. Les proportions de cycles non déclenchés atteignent jusqu'à 45%. Les portraits les mieux structurés se situent pour des  $PIP$  de 14 et 16 mbar. Le patient choisit naturellement la valeur pour laquelle le nombre de non déclenchements est minimum (14,6%). Les raisons du nombre important de "non déclenchement" restent à expliquer.

Le patient  $P_4$  présente des portraits qui ont une structure "arrondie" caractéristique des fuites non intentionnelles. Pour des  $PIP$  de 10 et 12 mbar, de grandes fluctuations des trajectoires sont présentes. Pour 14 et 16 mbar, les fluctuations de trajectoires sont équivalentes. Toutefois, le patient privilégie les fortes  $PIP$  qui lui permettent de stabiliser sa fréquence respiratoire (variance réduite). D'importantes fuites sont présentes pour une pression de 18 mbar. Vu l'état de fatigue du patient, l'estimation de la sensation de confort doit être interprétée avec une grande prudence. Il faut préciser que ce patient s'essouffle assez vite. Le simple fait de parler de fatigue et le rend dyspnéique. Malgré un volume courant assez faible, la ventilation minute reste correcte grâce à une fréquence respiratoire élevée, ce qui ne semble pas influencer le déclenchement du ventilateur (moins de 5 cycles non déclenchés).

## 4 Conclusion

En se basant sur les données statistiques, les couples de patients ( $P_1$ ,  $P_2$ ) et ( $P_3$ ,  $P_4$ ) ont sensiblement le même volume courant respectivement. Toutefois, il convient de préciser que le premier couple de patients a un volume courant qui est quasiment triple du second couple de patients. En règle générale, et ceci se retrouve chez les quatre patients, la durée de la phase expiratoire est beaucoup plus longue que la durée de la phase inspiratoire, ce qui est normal pour des BPCO. L'effort inspiratoire est de brève durée et il débute toujours avant le début de la montée en  $PIP$ . L'augmentation de la  $PIP$  favorise l'apparition de fuites non intentionnelles ce qui peut gêner la détection de la fin de l'inspiration et donc le déclenchement de la phase expiratoire. Par ailleurs, de façon générale, le nombre de cycle non déclenchés augmente avec la valeur de la  $PIP$ . Il ressort de cette étude que la présence de cycles non déclenchés est cruciale pour le confort du patient et qu'elle doit être l'objet d'une attention particulière.

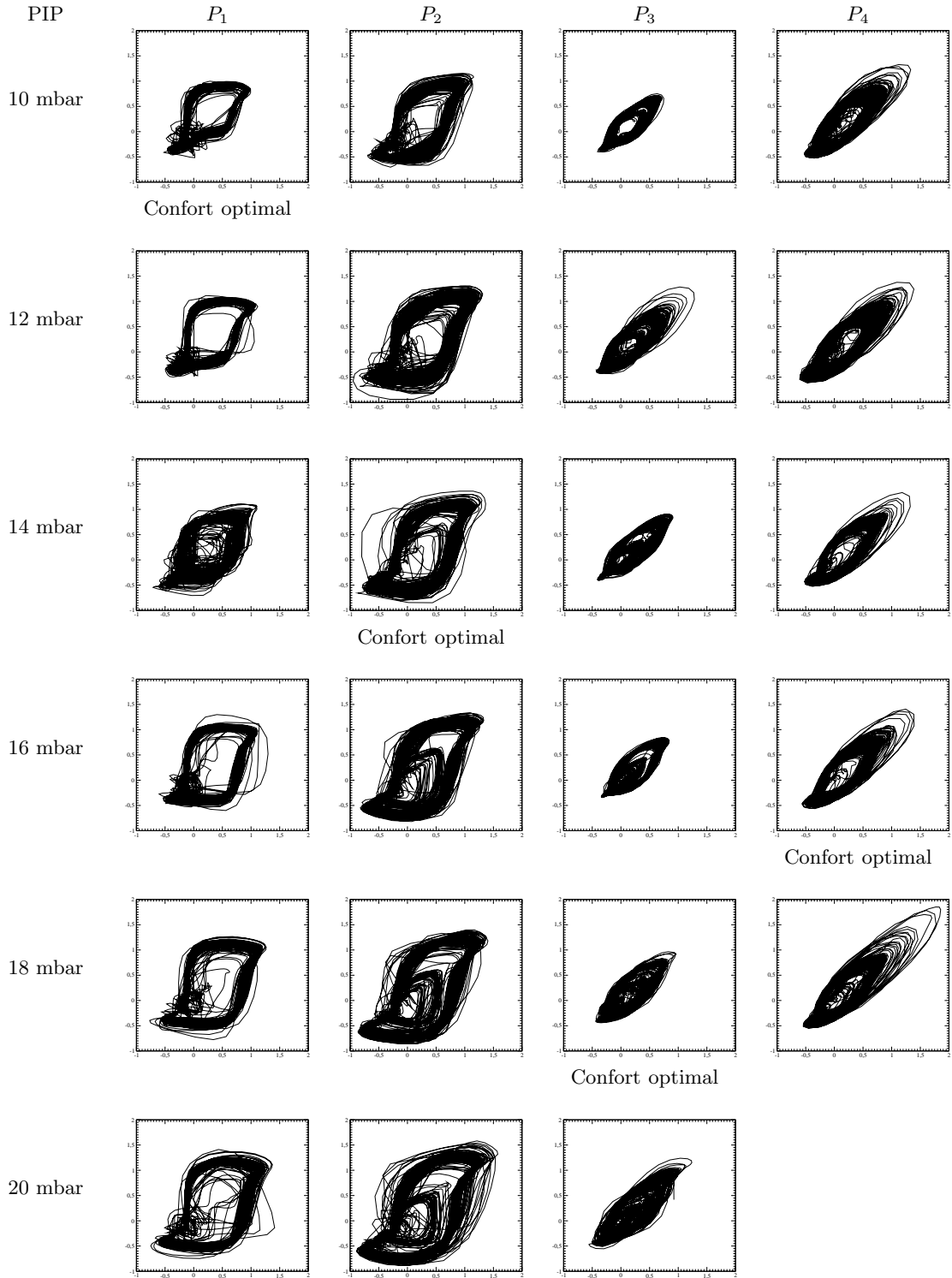


FIG. 1 – Représentation des portraits de phase reconstruits à partir des mesures du débit. Le décalage temporel est tel que  $\tau = \frac{5}{f_r}$ .

TAB. 1 – *Caractéristiques de la ventilation pour les différents patients présentant la même pathologie BPCO. P représente la proportion de cycles non déclenchés.*

PIP	$Q_v$	$V_c$	$\frac{T_i}{T_{tot}}$	$f_r$	$V_E$	p	Confort
mbar	$\text{l.s}^{-1}$	l		$\text{cycl.mn}^{-1}$	$\text{l.mn}^{-1}$	%	
PATIENT $P_1$ BPCO POST-TABAGIQUE SUR EMPHYSÈME							
<b>10</b>	$0.9 \pm 0.2$	$0.9 \pm 0.4$	$0.5 \pm 0.5$	$16.4 \pm 11.3$	$10.8 \pm 11.0$	2	10
12	$0.9 \pm 0.1$	$0.9 \pm 0.3$	$0.6 \pm 0.3$	$13.7 \pm 9.6$	$10.9 \pm 9.3$	1.1	9.9
14	$0.8 \pm 0.1$	$0.9 \pm 0.7$	$0.6 \pm 0.5$	$23.9 \pm 26.6$	$12.6 \pm 24.8$	4.9	6.1
16	$1.0 \pm 0.2$	$0.9 \pm 0.4$	$0.6 \pm 0.6$	$17.2 \pm 16.2$	$10.4 \pm 14.6$	1	6
18	$1.06 \pm 0.2$	$0.8 \pm 0.3$	$0.7 \pm 0.3$	$18.8 \pm 14.9$	$13.4 \pm 10.7$	0	2.1
20	$1.11 \pm 0.2$	$0.9 \pm 0.3$	$0.7 \pm 0.5$	$16.9 \pm 12.3$	$12.1 \pm 10.1$	0.9	0.5
PATIENT $P_2$ BPCO POST-TABAGIQUE SUR EMPHYSÈME							
10	$0.9 \pm 0.1$	$0.8 \pm 0.2$	$0.6 \pm 0.2$	$21.3 \pm 6.5$	$17.4 \pm 7.6$	6.5	4.9
12	$1.0 \pm 0.2$	$0.9 \pm 0.3$	$0.7 \pm 0.2$	$22.2 \pm 7.8$	$18.8 \pm 9.1$	5.7	5.8
<b>14</b>	$1.0 \pm 0.2$	$1.0 \pm 0.4$	$0.7 \pm 0.2$	$21.4 \pm 10.9$	$19.6 \pm 12.7$	9.1	6.5
16	$1.0 \pm 0.3$	$0.9 \pm 0.4$	$0.6 \pm 0.3$	$23.6 \pm 10.4$	$20.5 \pm 15.0$	22.5	6.3
18	$1.0 \pm 0.3$	$0.9 \pm 0.5$	$0.7 \pm 0.3$	$25.7 \pm 22.5$	$24.8 \pm 29.1$	24.4	6.9
20	$1.1 \pm 0.3$	$1.0 \pm 0.5$	$0.7 \pm 0.3$	$22.2 \pm 14.0$	$22.6 \pm 19.4$	18.4	4.9
PATIENT $P_3$ BPCO POST-TABAGIQUE							
10	$0.5 \pm 0.1$	$0.3 \pm 0.1$	$0.3 \pm 0.1$	$37.5 \pm 9.4$	$11.8 \pm 4.1$	17.7	7.6
12	$0.6 \pm 0.1$	$0.4 \pm 0.3$	$0.4 \pm 0.3$	$39.1 \pm 18.5$	$14.0 \pm 58.5$	17.7	6.1
14	$0.5 \pm 0.2$	$0.4 \pm 0.3$	$0.3 \pm 0.2$	$30.5 \pm 5.5$	$12.0 \pm 8.7$	45.5	8.5
16	$0.6 \pm 0.2$	$0.4 \pm 0.3$	$0.4 \pm 0.2$	$26.9 \pm 5.9$	$11.0 \pm 8.1$	35.8	8.9
<b>18</b>	$0.6 \pm 0.1$	$0.5 \pm 0.2$	$0.4 \pm 0.2$	$31.8 \pm 12.1$	$13.6 \pm 7.0$	14.6	8.6
20	$0.6 \pm 0.3$	$0.6 \pm 0.4$	$0.5 \pm 0.3$	$30.1 \pm 18.5$	$16.2 \pm 15.1$	27.4	8.4
PATIENT $P_4$ BPCO POST-TABAGIQUE							
10	$0.6 \pm 0.1$	$0.3 \pm 0.1$	$0.4 \pm 0.2$	$56.1 \pm 20.3$	$16.2 \pm 9.4$	1.2	3.8
12	$0.7 \pm 0.1$	$0.3 \pm 0.1$	$0.5 \pm 0.2$	$53.2 \pm 11.3$	$16.0 \pm 6.4$	1.2	4.6
14	$0.7 \pm 0.1$	$0.3 \pm 0.1$	$0.5 \pm 0.1$	$46.9 \pm 13.3$	$15.5 \pm 3.7$	0.7	5.4
<b>16</b>	$0.7 \pm 0.1$	$0.3 \pm 0.1$	$0.4 \pm 0.1$	$49.4 \pm 8.7$	$16.2 \pm 4.0$	0.6	8.9
18	$0.7 \pm 0.1$	$0.4 \pm 0.1$	$0.5 \pm 0.2$	$47.8 \pm 10.6$	$16.4 \pm 8.6$	1.7	7.9

## Références

- [1] Société de pneumologie de langue française, *Recommandations pour la prise en charge de la BPCO*, Revue des maladies respiratoires, **20**, (3), 4S1-4S68 (2003).
- [2] J.M. Shneerson, *Techniques in mechanical ventilation: principles and practice*, Thorax, **51**, 756-761 (1996).
- [3] L. Brochard et al., *Non invasive ventilation for acute exacerbations of chronic obstructive pulmonary disease*, New England J. Med., **333**, (13), 817-822 (1995).
- [4] M. Wysocki et al., *Noninvasive pressure support ventilation in patients with acute respiratory failure*, Chest, **103**, (3), 907-913 (1993).
- [5] G.U. Meduri et al., *Noninvasive positive pressure via face mask*, Chest, **109**, (1), 179-193 (1996).
- [6] L. Achour, C. Letellier, A. Cuvelier, J-F. Muir, *Dynamique patient/ventilateur lors de la ventilation non invasive*, Actes du 4ème Colloque chaos temporel et chaos spatio-temporel, pp. 69-74, Rouen (2003).



## Formes et stabilité d'un tube de membrane biologique à deux phases

J.M. Allain<sup>1</sup>, C. Storm<sup>2</sup>, M. Ben Amar<sup>1</sup>, J.F. Joanny<sup>2</sup>

(1) *Laboratoire de Physique Statistique, Ecole Normale Supérieure*

*24 rue Lhomond 75231 Paris Cedex 05*

(2) *Institut Curie, 26 rue d'Ulm 75248 Paris Cedex 05*

`jean-marc.allain@lps.ens.fr`

### Résumé

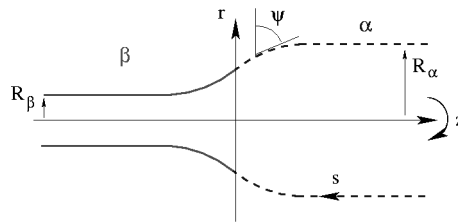
Les mécanismes de transport intra-cellulaire utilisent des déformations contrôlées de la membrane pour créer des excroissances sphériques ou tubulaires. Si les propriétés de la membrane homogène commencent à être bien comprises, les effets des inhomogénéités sont encore mal déterminés. Ces inhomogénéités peuvent être dues à la présence de rafts, de petits domaines membranaires de composition lipidique différente. Nous étudions d'un point de vue théorique les formes possibles d'un tube de membrane à deux phases (une phase ordonnée, le raft, et une phase 'classique'). La forme d'équilibre est donnée par une équation fortement non-linéaire. Une étude numérique permet de déterminer la forme de la jonction et ainsi de mieux comprendre le rôle de chaque paramètre physique sur celle-ci. Cette étude est un préliminaire à une étude de la stabilité au cours du temps de ces jonctions.

## 1 Introduction

Le transport intra-cellulaire nécessite l'utilisation de processus actifs pour déformer les membranes cellulaires. La base de ce système est la formation de structures tubulaires ou sphériques [1]. Dans le cas des tubes, les mécanismes conduisant à leur formation sont partiellement contrôlés par la présence de protéines [2] mais aussi par les propriétés mécaniques de la membrane [3, 4]. La déformation n'est possible que en présence d'une force d'étirement, généralement attribuée à la présence de moteurs moléculaires [5].

Un autre objet pouvant jouer un rôle dans le transport intra-cellulaire est le 'raft'. Les 'rafts' sont supposés être des domaines membranaires de petite taille et de composition lipidique particulière [1]. Bien qu'ils n'aient jamais été observés directement, leur spécificité et leur petite taille leur donnent un rôle probable dans plusieurs processus cellulaires [7]. Récemment, un système modèle de vésicules comportant des phases liquides ordonnées (des structures similaires aux rafts) a été développé [8]. Ce modèle est un outil commode pour étudier les propriétés physico-chimiques de ces systèmes [9, 10].

L'utilisation de ces systèmes modèles permet une étude de l'influence d'une phase ordonnée sur les tubes de membranes. Expérimentalement, l'apparition d'une phase ordonnée sur un tube de petit diamètre provoque la rupture du tube [11] alors que les tubes de grand rayon restent stables [12]. La compréhension de la différence entre ces deux régimes demande, en préambule, la connaissance de la forme d'équilibre de la jonction stable.

FIG. 1 – *Réprésentation schématique de la jonction.*

## 2 Description de la membrane

Nous généralisons les modèles existants pour des tubes homogènes [15] au cas particulier d'une jonction entre une phase ordonnée et une phase désordonnée, de propriétés physiques différentes [13]. Le tube, comme la jonction, est supposé avoir pour axe de symétrie la direction de la force d'étirement (axe  $z$  dans la suite). Par ailleurs, nous faisons l'hypothèse, réaliste aux vues des expériences, que la longueur de chaque phase est grande comparée au rayon du tube et à la taille de la jonction. Les effets de taille finie du système n'influent alors pas sur le système, ce qui nous permet de représenter chaque phase par un tube semi-infini.

La figure 1 montre une représentation schématique du système étudié ainsi que les coordonnées utilisées dans la suite. Les deux phases sont dénotées dans la suite  $\alpha$  et  $\beta$ . La surface est paramétrée par son abscisse curviligne  $s$  et est décrite par les coordonnées  $(r(s), \psi(s))$  avec les relations géométriques  $\dot{r} = \cos \psi$  et  $\dot{z} = -\sin \psi$ . L'interface est placée arbitrairement en  $z = 0$  et  $s = 0$ . Les formes d'équilibre du système sont obtenues par une méthode variationnelle inspirée du modèle d'Helfrich [14]. Les deux phases étant liquides, elles sont décrites par deux énergies similaires mais avec des constantes physiques différentes. L'interface est définie par le changement des constantes physiques ainsi que par la présence d'une tension de ligne  $\sigma$ , équivalente à la constante capillaire à une interface air-liquide. L'énergie du système est alors :

$$F_{TOT} = \sum_{\alpha, \beta} \int_{S_i} \left[ \frac{\kappa_i}{2} H^2 + \frac{\kappa_G^{(i)}}{2} K^2 + \Sigma_i \right] dS + \sigma \oint dl - f \int dz. \quad (1)$$

avec  $\kappa_i$  le module de courbure,  $\kappa_G^{(i)}$  le module de Gauss et  $\Sigma_i$  la tension de surface de la phase  $i$ . L'énergie comporte l'énergie de courbure à l'ordre le plus bas :  $H$  est la courbure moyenne et  $K$  est la courbure gaussienne. Cet ordre est suffisant dans le cas d'une membrane sans inhomogénéités et pour des tubes de rayon supérieur à l'épaisseur de la bicouche de lipides. Les tubes semi-infinis servent de réservoir de surface, ce qui est représenté par le terme de tension de surface, constant dans chaque phase.  $f$  est la force utilisée pour l'extraction du tube.

La pression, qui est un effet perturbatif seulement, n'a pas été prise en compte [4]. De même, les contraintes internes à chaque monocouche ou les effets de dissymétrie de la membrane ne sont pas pris en compte : dans les expériences, les membranes contiennent du cholestérol, une molécule avec une fréquence d'échange entre monocouche rapide, qui relaxe ces contraintes.

Les détails du calcul variationnel ne sont pas présentés ici car ils ont déjà été présentés ailleurs. Nous nous limiterons à présenter l'équation de forme ainsi que les effets des

conditions aux limites.

Le calcul variationnel conduit à l'équation de forme :

$$\ddot{\psi} = -\frac{\dot{\psi}^3}{2} - 2\frac{\cos \psi}{r} \ddot{\psi} + \frac{3 \sin \psi}{2r} \dot{\psi}^2 + \frac{3 \cos^2 \psi - 1}{2r^2} \dot{\psi} - \frac{\cos^2 \psi + 1}{2r^3} \sin \psi + \frac{\Sigma}{\kappa} \dot{\psi} + \frac{\Sigma \sin \psi}{\kappa r} \quad (2)$$

Cette équation est fortement non linéaire et nécessite une résolution numérique dans le cas général.

Asymptotiquement, on doit retrouver un tube cylindrique, avec  $\psi = \pi/2$  et  $r = R_i$ , avec  $R_i$  le rayon de la phase  $i$  à l'infini. L'équation (2) donne une relation entre  $R_i$ ,  $\Sigma_i$  et  $\kappa_i$ . La stabilité de l'extrémité du tube impose une nouvelle relation incluant la force de traction  $f$  [15]. Finalement, on obtient les deux relations :

$$f = 2\pi\sqrt{2\Sigma_i\kappa_i} \quad \text{et} \quad R_i = \sqrt{\frac{\kappa_i}{2\Sigma_i}} \quad (3)$$

L'équilibre mécanique implique que les forces sont égales à chaque extrémités. Ceci impose deux relations mécaniques entre les deux phases en utilisant les conditions (3) :

$$\frac{\Sigma_\beta}{\Sigma_\alpha} = \frac{\kappa_\alpha}{\kappa_\beta} \quad \text{et} \quad \frac{R_\beta}{R_\alpha} = \frac{\kappa_\beta}{\kappa_\alpha}. \quad (4)$$

La différence entre les deux phases apparaît uniquement dans les conditions à l'interface (en  $s = 0$ ). En supposant la continuité du rayon et de l'angle  $\psi$  au niveau de l'interface, les conditions de raccord s'écrivent :

$$r(\epsilon) = r(-\epsilon), \quad (5)$$

$$\psi(\epsilon) = \psi(-\epsilon), \quad (6)$$

$$\kappa_\alpha \dot{\psi}(\epsilon) = \kappa_\beta \dot{\psi}(-\epsilon) + (\kappa_\beta + \kappa_G^{(\beta)} - \kappa_\alpha - \kappa_G^{(\alpha)}) \frac{\sin \psi(0)}{r(0)}, \quad (7)$$

$$\kappa_\alpha \ddot{\psi}(\epsilon) = \kappa_\beta \ddot{\psi}(-\epsilon) + \sigma \frac{\sin \psi(0)}{r(0)} + (2\kappa_\alpha + \kappa_G^{(\alpha)} - 2\kappa_\beta - \kappa_G^{(\beta)}) \frac{\cos \psi(0) \sin \psi(0)}{r(0)^2}. \quad (8)$$

### 3 Formes de la jonction

Afin de généraliser l'étude, nous avons utilisé des paramètres adimensionnés : l'unité de longueur est  $R_\alpha$ , le rayon de la phase  $\alpha$  à l'infini et l'unité d'énergie est  $\kappa_\alpha$ , le module de courbure de la phase  $\alpha$ . Les grandeurs adimensionnées sont notées sous la forme :  $\tilde{x}$  si  $x$  est la grandeur dimensionnée.

Les conditions de raccord montrent que trois paramètres physiques modifient la forme de la jonction : la tension de ligne, la différence de module de Gauss et le rapport des modules de courbure (équivalent au rapport des rayons). Ces trois paramètres sont présentés successivement pour mettre en avant leur effets sur la forme de la jonction. Expérimentalement, la forme est donnée par une combinaison des trois effets.

#### 3.1 Effet de la tension de ligne

L'énergie associée à la tension de ligne est  $2\pi\sigma r(0)$ . Elle décroît quand le rayon de la jonction ( $r(0)$ ) diminue. Cet effet est d'autant plus important que la tension de ligne est forte. Pour illustrer l'effet spécifique de la tension de ligne, nous avons considéré un

tube à deux phases avec les même modules de courbure et de Gauss. Les deux phases sont alors identiques mais l'interface existe en raison de la tension de ligne. La figure 2 montre différentes formes obtenues numériquement pour différentes valeurs de la tension de ligne adimensionnée  $\tilde{\sigma} = \sigma R/\kappa$ . Comme prévu, le rayon à l'interface diminue avec la tension de

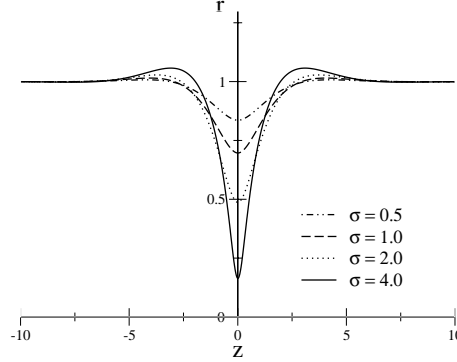


FIG. 2 – *Formes calculées numériquement de l'interface pour différentes tensions de ligne, en utilisant des paramètres adimensionnés. Les paramètres du calcul sont :  $\tilde{R}_\alpha = \tilde{R}_\beta = 1$ ,  $\tilde{\kappa}_\alpha = \tilde{\kappa}_\beta = 1$ ,  $\tilde{\kappa}_G^{(\beta)} - \tilde{\kappa}_G^{(\alpha)} = 0$ . Les conditions (4) donnent  $\tilde{\Sigma}_\alpha = \tilde{\Sigma}_\beta = 0.5$ . Les valeurs de la tension de ligne sont  $\tilde{\sigma} = 0.5, 1.0, 1.5$  et  $2.0$ .*

ligne. La position du plus petit rayon de la jonction est exactement au niveau de l'interface, en raison de la symétrie du cas considéré. Si la tension de ligne est suffisamment grande, le rayon tend vers zéro. Cet effet de pincement pourrait donc être le moteur principal d'instabilité des tubes de petits rayons. Toutefois, dans cette géométrie, les tensions de ligne mesurées expérimentalement [12] conduisent à des valeurs de  $\tilde{\sigma}$  de l'ordre de 0,6, trop petites pour provoquer un pincement significatif.

### 3.2 Effet du module de Gauss

Conformément au théorème de Gauss-Bonnet, le terme de courbure gaussienne n'intervient que dans les conditions de raccord, bien que ce soit un terme d'ensemble. L'énergie de bord associée à ce terme est  $F_G = 2\pi(\kappa_G^{(\beta)} - \kappa_G^{(\alpha)}) \cos \psi(0)$ . L'effet du module de Gauss est différent de celui de la tension de ligne car il n'implique pas le rayon mais l'angle  $\psi$  à l'interface. Pour diminuer l'énergie, il est nécessaire de diminuer l'angle  $\psi(0)$  si  $\kappa_G^{(\beta)} - \kappa_G^{(\alpha)} > 0$  ou de l'augmenter si  $\kappa_G^{(\beta)} - \kappa_G^{(\alpha)} < 0$ . Nous avons résolu numériquement, comme pour la tension de ligne, la forme de la jonction pour un tube avec deux phases de même  $\kappa$  et sans tension de ligne ( $\sigma = 0$ ). Les résultats pour plusieurs différences de module de Gauss sont représentés sur la figure 3. Comme indiqué, plus la différence de modules de Gauss est grande, plus l'angle  $\psi$  est différent de  $\pi/2$ . Ceci entraîne l'apparition d'un pincement du tube. Toutefois, par rapport au cas de la tension de ligne, la position du pincement n'est plus exactement au niveau de l'interface. De plus, il n'est pas possible d'amener le rayon du pincement à zéro. En effet, comme l'énergie est proportionnelle à  $\cos(\psi(0))$ , elle ne peut être ajustée que dans une gamme limitée de valeurs. La valeur du module de Gauss n'est pas connue pour des vésicules lipidiques : elle ne se mesure que sur des effets de bord ou lors de changements topologiques, ce qui rend sa détermination délicate sur des vésicules géantes. Toutefois, les modèles théoriques fixent des bornes :  $0 > \kappa_G > -2\kappa$  dans chaque

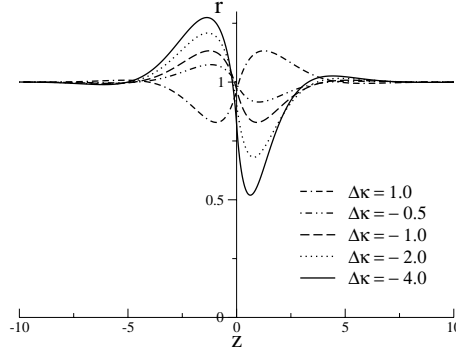


FIG. 3 – Formes calculées numériquement de la jonction pour différentes différences de modules de Gauss, en utilisant des paramètres adimensionnés. Les paramètres du calcul sont :  $\tilde{R}_\alpha = \tilde{R}_\beta = 1$ ,  $\tilde{\kappa}_\alpha = \tilde{\kappa}_\beta = 1$ ,  $\tilde{\sigma} = 0$ . Les conditions (4) donnent  $\tilde{\Sigma}_\alpha = \tilde{\Sigma}_\beta = 0.5$ . Les valeurs de la différence de courbure de Gauss sont :  $\Delta\kappa = \kappa_G^{(\beta)} - \kappa_G^{(\alpha)} = 1.0, -0.5, 1.0, 2.0$  et  $4.0$ .

phase qui permettent la détermination d'une forme approchée pour l'interface réelle.

### 3.3 Effet du module de courbure

Le rapport des modules de courbure définit le rapport des rayons et des tensions de surface, comme donnés par les relations (4). Instinctivement, l'interface la plus arrondie possible est attendue. La figure 4 montre la forme de la jonction pour deux phase de même module de Gauss et sans tension de ligne, pour plusieurs rapports de modules de courbure. Le résultat remarquable est la présence d'un plateau juste à l'interface. Ce

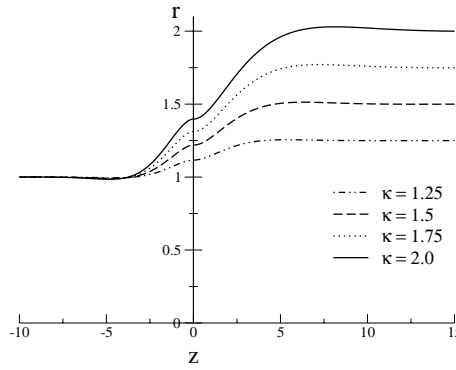


FIG. 4 – Formes calculées numériquement de la jonction pour différentes différences de modules de Gauss, en utilisant des paramètres adimensionnés. Les paramètres du calcul sont :  $\tilde{R}_\alpha = 1$ ,  $\tilde{\kappa}_\alpha = 1$ ,  $\tilde{\sigma} = 0$ ,  $\kappa_G^{(\beta)} - \kappa_G^{(\alpha)} = 0$ . Le module de courbure dans la phase  $\beta$  est noté  $\kappa = \kappa_\beta / \kappa_\alpha$ . Les conditions (4) donnent  $\tilde{\Sigma}_\alpha = 0.5$ ,  $\tilde{R}_\beta = \kappa$  et  $\tilde{\Sigma}_\beta = 0.5/\kappa$ . Les valeurs de  $\kappa$  présentées sont 1.25, 1.5, 1.75 et 2.0.

plateau s'explique par un équilibre précis entre les forces, les moments à l'interface et les contraintes de continuité et est difficile à justifier simplement. Bien que la présence de

ce plateau n'est à priori pas un effet majeur sur la stabilité de l'interface, il impose une courbure supplémentaire qui peut le fragiliser.

## 4 Conclusion

Nous avons réalisé une étude de la forme de la jonction entre deux tubes de propriétés physiques différentes. Nous avons trouvé que trois paramètres physiques pilotent cette forme : la tension de ligne, l'écart des modules de Gauss et le rapport des modules de courbure. Nous avons délibérément choisis une description minimaliste du système, en particulier au niveau de l'interface, pour pouvoir mettre plus en avant les effets des trois paramètres de contrôle.

Cette étude montre qu'il n'y a pas un mécanisme évident pour la rupture de la membrane : chacun des trois provoque soit un pincement soit l'apparition d'une courbure supplémentaire à l'interface. Dans la situation expérimentale, les trois effets sont probablement combinés. A partir de ces résultats, il est possible de déterminer la forme de la jonction pour des valeurs réalistes des paramètres et comparer l'énergie de cet état avec l'énergie nécessaire pour la rupture.

## Références

- [1] B. Alberts et al., *Molecular Biology of the Cell*, 3rd ed. (Garland, New York, 1994)
- [2] J. White et al., *Rab6 coordinates a novel Golgi to ER retrograde transport pathway in live cells*, J. Cell Biol., **147**, pp. 743-759 (1999)
- [3] I. Derényi, F. Julicher, J. Prost, *Formation and interaction of membrane tubes*, Phys. Rev. Lett., **88** (23), 238101(4) (2002)
- [4] T. R. Powers, G. Huber, R. E. Goldstein, *Fluid-membrane tethers: minimal surfaces and elastic boundary layers*, Phys. Rev. E, **65** (4), 041901(11) (2002)
- [5] A. Roux et al. *A minimal system allowing tubulation with molecular motors pulling on giant liposomes*, PNAS, **99**(8), pp. 5394-5399 (2002)
- [6] K. Farsad et P. De Camilli, *Mechanisms of membrane deformation*, Current Opinion in Cell Biology, **15**, pp. 372-381, (2003)
- [7] M. Edidin, *The State of Lipid Rafts: From Model Membranes to Cells*, Annu. Rev. Biophys. Biomol. Struct., **32**, pp. 257-283 (2003)
- [8] C. Dietrich et al., *Lipid Rafts Reconstituted in Model Membranes*, Biophys. J., **80**(3), pp. 1417-1428, (2001)
- [9] S. L. Veatch, S. L. Keller, *A closer look at the canonical 'Raft mixture' in model membrane studies*, Biophys. J., **84**(1), pp. 725-726 (2003)
- [10] G. Staneva, M. I. Angelova, K. Koumanov, *Phospholipase A2 promotes Rafts Budding and Fission from Giant Liposomes*, à paraître dans Chemistry and Physics of Lipids
- [11] A. Roux, P. Bassereau, *Communication privée*
- [12] T. Baumgart, S.T. Hess, W.W. Webb, *Imaging coexisting fluid domains in biomembrane models coupling curvature and line tension*, Nature, **425**, pp. 821-824 (2003)
- [13] J.M. Allain, M. Ben Amar, *Bi-phasic vesicle: instability induced by adsorption of proteins* à paraître dans Physica A
- [14] W. Helfrich, Naturforsch, Teil C **28**, 693 (1973)
- [15] D. J. Bukman, J. H. Yao, M. Wortis, *Stability of cylindrical vesicles under axial tension*, Phys. Rev. E, **54**(5), pp. 5463-5468 (1996)

## Mécanisme d'apparition d'un régime spatio-temporel intermittent dans un laser monomode

D. Amroun †, M. Brunel †, C. Letellier ‡, H. Leblond ° et F. Sanchez °

† *Groupe d'Optique et d'Optronique,*

‡ *Groupe d'Analyse TOpologique et MODélisation de SYstèmes Dynamiques,*  
UMR 6614 CORIA, Université de Rouen

*Avenue de l'Université, BP 12, 76801 Saint-Etienne du Rouvray Cedex*

° *Laboratoire POMA, UMR 6136, Université d'Angers*

*2 bd Lavoisier, 49045 Angers Cedex 01*

`dalila.amroun@coria.fr`

### Résumé

Nous étudions une intermittence particulière prédite dans un laser monomode [1, 2]. L'influence d'un profil de pompage non uniforme et celle des conditions aux limites sur ce régime dynamique est analysée. Par ailleurs, l'influence du paramètre de pompage sur la dynamique observée est étudiée [3] pour comprendre le mécanisme d'apparition et l'évolution de l'intermittence suite à la déstabilisation de la solution laser stationnaire.

## 1 Introduction

Jakobsen *et al* ont montré que des ondes planes progressives sont solutions exactes des équations de Maxwell-Bloch décrivant la dynamique d'un laser monomode à élargissement homogène si l'on tient compte des effets de diffraction [4]. Toutefois ces solutions théoriques supposent une extension spatiale transverse infinie, qu'une modélisation numérique ne peut prendre en compte. L'intégration numérique peut donc faire apparaître des différences importantes par rapport aux solutions théoriques. En particulier l'extension du support et les conditions aux limites (périodiques dans une majorité d'études traitant de la dynamique spatio-temporelle des équations de Maxwell-Bloch [5, 6, 7]), peuvent jouer un rôle important dans le type de comportements observés [8]. Par ailleurs, la prise en compte de la réalité physique du système étudié, liée aux conditions expérimentales, peut imposer d'importantes modifications (profil du faisceau, profil de pompage). On sait ainsi que dans le cas d'un laser monomode à élargissement homogène dont on suppose un profil gaussien, il n'y a plus d'instabilité dite de "bonne" ou "mauvaise cavité" [9]. On voit ainsi que l'existence et la stabilité des solutions théoriques peut s'avérer très perturbée par les contraintes numériques et physiques [8]. Nous avons rapporté récemment un régime d'intermittence particulier structuré autour de cinq orbites périodiques visitées selon un ordre régulier [1, 2, 3]. Nous poursuivons notre étude en nous intéressant à l'influence du profil de pompage sur ce comportement d'intermittence particulier, et sur les conditions menant à l'apparition de ce régime.

## 2 Pompage non-uniforme

Le laser est modélisé par les équations de Maxwell-Bloch suivantes [4, 7] :

$$\begin{cases} \frac{\partial d}{\partial \tau} = -\gamma \left[ d - r + \frac{1}{2}(ep^* + e^*p) \right], \\ \frac{\partial p}{\partial \tau} = -(1 - i\delta)p + ed, \\ \frac{\partial e}{\partial \tau} = -\sigma(e - p) + iA \frac{\partial^2 e}{\partial x^2}. \end{cases} \quad (1)$$

Dans le cas théorique d'extension transverse infinie, ce système admet des solutions en ondes planes progressives transverses [4]. La figure 1 résume le diagramme de stabilité de telles solutions pour différentes valeurs du désaccord de fréquence  $\delta$  en fonction du pompage  $r$ .

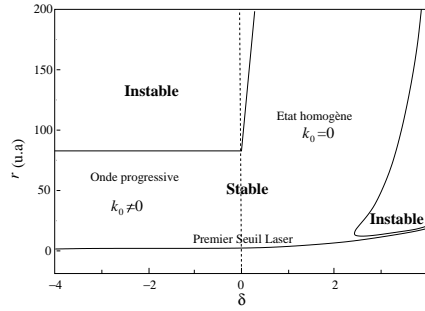


FIG. 1 – Diagramme de stabilité de la solution laser dans le plan  $(\delta, r)$ . Les autres paramètres sont :  $\sigma = 0.01$ ,  $\gamma = 0.2$  et  $A = 0.05$ .

Nous avons ensuite étudié numériquement la stabilité de ces solutions en supposant le profil de pompage super-gaussien  $r(x) = r_0 \exp(-\rho^2 x^6)$ . Le mode d'intégration utilisé implique des conditions aux limites périodiques avec une extension spatiale  $-3.5 < x < 3.5$ . Pour un désaccord de fréquence  $\delta = 3$  et un pompage de  $r = 25$  (Fig.1), l'analyse de stabilité linéaire montre que la solution laser stationnaire est instable (ce qui est vérifié avec le code numérique pour un profil de pompage supposé constant). Toutefois, avec le profil de pompage super-gaussien ( $r_0 = 25$  et  $\rho = 0.1$ ), l'intégration numérique montre qu'il n'y a plus d'instabilité. En effet, la solution obtenue présente une intensité constante au cours du temps en tout point. Elle présente un vecteur d'onde  $k = 0$  et une pulsation  $\Omega$  qui vérifient la relation de dispersion [1]. Nous avons vérifié pour d'autres valeurs de  $\delta$  et  $r_0$  qu'avec ce profil de pompage, la langue d'instabilité (zone à droite de la figure 1) disparaît. Nous avons ensuite recherché l'apparition d'une instabilité en modifiant les paramètres du profil de pompage super-gaussien. L'allure de l'intensité obtenue pour un profil ne s'annulant plus sur les bords (de paramètres  $r_0 = 25$  et  $\rho = 0.035$ ) montre qu'un régime d'intermittence comme celui déjà rapporté [1, 2] s'instaure avec toutefois un nombre de plateaux différent (Fig. 2). Il semble en fait que le régime d'intermittence structurée autour d'orbites périodiques apparaisse grâce aux conditions aux limites périodiques.



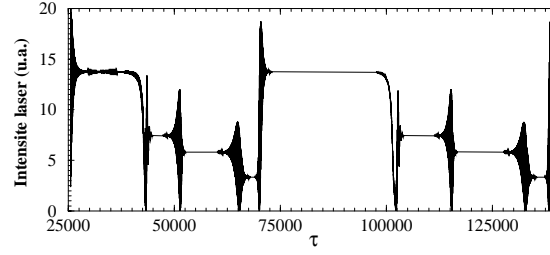


FIG. 2 – Évolution de l'intensité laser  $I(x = 0, \tau)$  en fonction du temps pour un profil de pompage super-gaussien de paramètres  $r_0 = 25$  et  $\rho = 0.035$ . Les autres paramètres sont  $\delta = 3$ ,  $\sigma = 0.01$ ,  $\gamma = 0.2$  et  $A = 0.05$ .

### 3 Pompage uniforme

Dans un deuxième temps, nous nous sommes placés dans le cas d'un pompage uniforme avec conditions aux limites périodiques et nous avons étudié l'apparition de l'intermittence lorsque la solution laser stationnaire se déstabilise en augmentant le pompage. Expérimentalement, ce cas de figure peut apparaître dans le cas d'une configuration avec un pompage annulaire [7]. L'intermittence précédemment décrite [1, 2] est rapelée Fig. 3 pour un pompage  $r = 25$  pour lequel cinq plateaux sont observés.

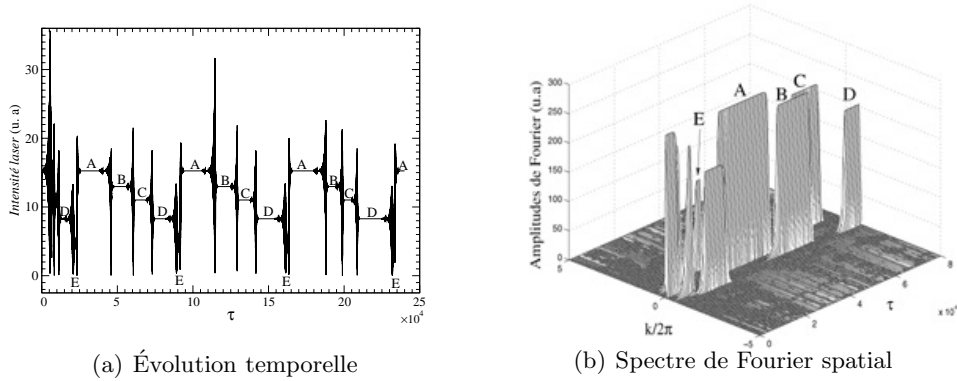


FIG. 3 – Évolution de l'intensité laser  $I(\tau)$  en fonction du temps au point  $x = 0$  (a); évolution des composantes du spectre de Fourier spatial pour la première partie de la série temporelle ( $0 < \tau < 8 \cdot 10^4$ ) (b). Les paramètres sont  $\delta = 3$ ,  $r = 25$ ,  $\sigma = 0.01$ ,  $\gamma = 0.2$  et  $A = 0.05$

#### 3.1 Dynamique au seuil d'instabilité

Étudions à présent l'apparition de ce régime. Au voisinage du seuil d'instabilité ( $r \approx 12$ ), l'évolution de l'intensité est assez complexe (Fig. 4a). Le spectre de Fourier temporel (Fig. 4b) révèle deux fréquences principales  $f_0$  et  $f_1$ , ainsi qu'un troisième pic important à la fréquence  $f_2 \approx f_0 + f_1$ . Le reste du spectre est essentiellement composé de petits paquets de pics comme celui situé autour de  $f_0 - f_1 \approx \frac{f_0}{5}$  : ceci révèle un accrochage des fréquences  $f_0$  et  $f_1$  qui aura une influence sur la dynamique. Le peu de combinaisons linéaires de  $f_0$  et  $f_1$  sur le spectre de Fourier, la régularité de l'apparition des “bouffées” de

grande amplitude (Fig. 4a) et l'absence de sensibilité exponentielle aux conditions initiales montrent que la dynamique est quasi-périodique. L'évolution temporelle du spectre de

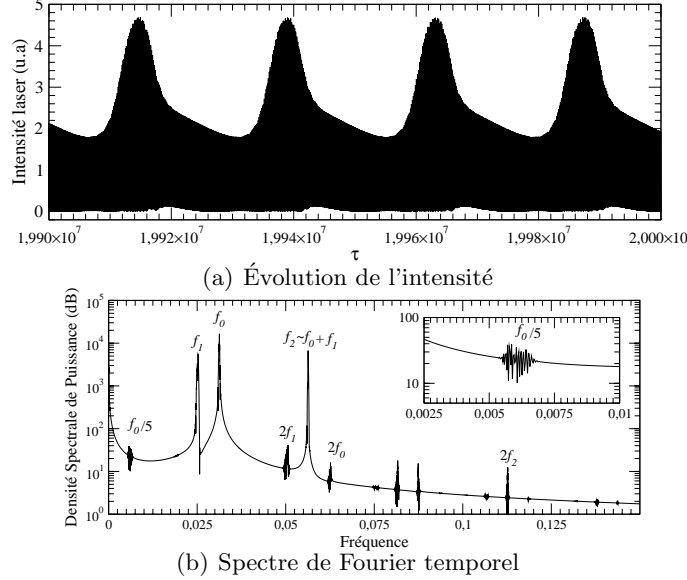


FIG. 4 – Évolution de l'intensité laser  $I(\tau)$  en fonction du temps au point  $x = 0$  pour un pompage  $r = 12.58$  (a) et son spectre de Fourier temporel (b).

Fourier spatial révèle trois vecteurs d'onde qui coexistent mais qui évoluent différemment (Fig. 5). Leurs valeurs sont reliées aux trois fréquences qui apparaissent sur le spectre de Fourier temporel du champ électrique par la relation de dispersion [1]. La composante  $k = 0$  (vecteur d'onde de la solution qui était stable au-dessous du second seuil) s'annule pendant les “phases” d'oscillations périodiques (de période 5) de l'intensité. Il ne subsiste pendant ces phases que deux vecteurs d'onde correspondant à deux fréquences temporelles. Ces deux vecteurs ne s'annulent jamais mais les composantes de Fourier correspondantes varient en amplitude (Fig. 5). Ensuite, la composante  $k = 0$  réapparaît pendant les “bouffées” et les trois vecteurs d'onde coexistent : ceci confirme que le comportement est bien quasi-périodique mais comporte trois fréquences pendant ces “bouffées”. Ces trois composantes spatiales vont se “séparer” sous augmentation de  $r$  : elles apparaîtront alternativement dans l'évolution du spectre spatial. Chacune correspondra alors à une intensité constante, et donc à une onde progressive transverse. C'est ainsi que naîtra la structure spatio-temporelle analysée en section 3 (Fig. 3). L'application de cinquième retour (Fig. 6) révèle une concentration de points autour de la première bissectrice, signature d'une lente évolution autour d'une orbite de période 5 pour l'intensité. Une telle tangence révèle la présence d'une bifurcation tangente qui doit apparaître pour des valeurs peu différentes des paramètres de contrôle. Ainsi, c'est un comportement quasi-périodique proche d'une bifurcation tangente ce qui lui confère ces propriétés très particulières. Comme le montre l'application de cinquième retour (Fig. 6), les bouffées de grande amplitude se développent sur une structure compliquée. A l'aide d'une reconstruction tridimensionnelle de la section de Poincaré, nous avons montré que l'attracteur du système est un tore  $T^3$  avec un processus de réinjection complexe.

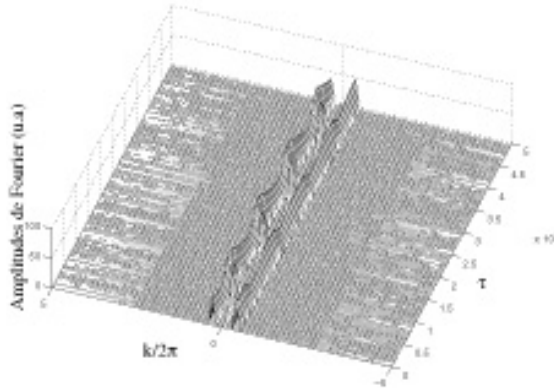


FIG. 5 – Évolution des composantes du spectre de Fourier spatial pour  $r = 12.58$ .

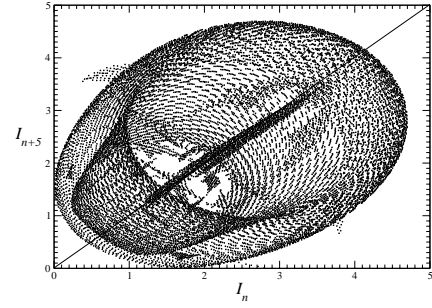


FIG. 6 – Application de cinquième retour à une section de Poincaré sur l'attracteur reconstruit à partir des coordonnées dérivées de l'intensité laser pour  $r = 12.58$ . La concentration des points autour de la première bissectrice révèle une bifurcation tangente autour d'une orbite de période 5.

### 3.2 Scénario de développement des instabilités

Lorsqu'on augmente  $r$ , le régime quasi-périodique particulier, observé près du second seuil, se transforme en un régime quasi-périodique à trois fréquences de topologie différente : 3 plateaux d'intensité constante se discernent, correspondant à 3 orbites périodiques visitées selon la même séquence (Fig. 7). On montre qu'elles correspondent à des ondes progressives transverses de vecteur d'onde unique. La dynamique présente la structure spatio-temporelle de base du régime observé à  $r = 25$  (Fig. 3), sauf que la séquence comporte cette fois 3 vecteurs d'onde. Ce régime, sous augmentation de  $r$ , de-

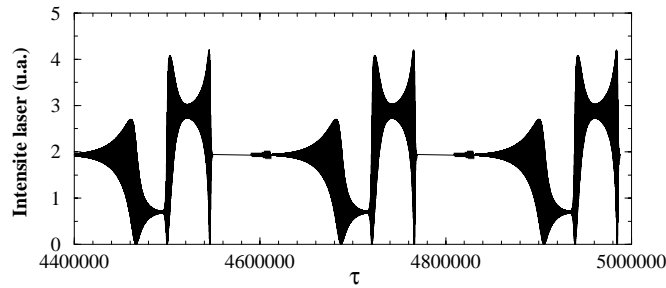


FIG. 7 – Évolution de l'intensité laser  $I(\tau)$  en fonction du temps au point  $x = 0$  pour un pompage  $r = 12.7$ .

vient ensuite chaotique : c'est une intermittence construite sur trois orbites périodiques. En continuant d'augmenter  $r$ , les phases laminaires s'allongent progressivement jusqu'à l'apparition d'une nouvelle orbite périodique (nouveau plateau d'intensité). Ce mécanisme se répète et on assiste à la création de cinq, voire six orbites périodiques sous augmentation du paramètre de pompage [3] : le régime devient plus complexe et plusieurs bouffées deviennent chaotiques. Enfin, en approchant le seuil de restabilisation de la solution stationnaire pour les grandes valeurs de  $r$ , la phase laminaire correspondant à la solution spatialement homogène instable (de vecteur d'onde nul) devient de plus en plus longue

(Fig. 8). Les bouffées disparaissent ensuite pour laisser place à un régime stationnaire d'intensité constante au-delà du seuil de restabilisation.

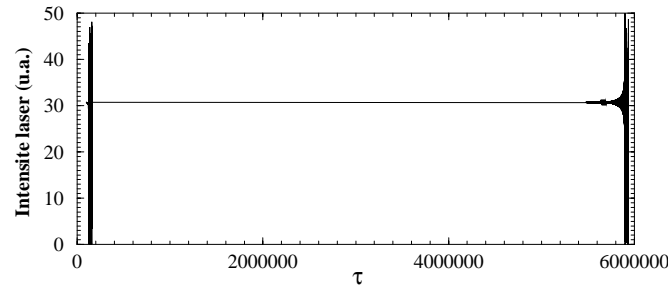


FIG. 8 – Évolution de l'intensité laser  $I(\tau)$  en fonction du temps au point  $x = 0$  pour un pompage  $r = 40.5$ . La séquence comporte cinq plateaux d'intensité constante (dont quatre ne sont pas très visibles à cause de la longue phase de plus grande intensité).

## Remerciements

Les auteurs remercient Serge Bielawski pour ses discussions stimulantes.

## Références

- [1] D. Amroun, M. Brunel, C. Letellier, H. Leblond, F. Sanchez, *Instabilités laser spatio-temporelles dans un milieu à élargissement homogène*, Comptes-rendus de la 6ème Rencontre du Non-Linéaire, Paris, 25-30 (2003).
- [2] D. Amroun, M. Brunel, C. Letellier, H. Leblond, F. Sanchez, *Complex intermittent dynamics in large-aspect-ratio homogeneously broadened single-mode lasers*, soumis à Physica D.
- [3] D. Amroun, M. Brunel, C. Letellier, H. Leblond, F. Sanchez, *Nouveau régime d'intermittences dans un laser monomode à élargissement homogène*, Comptes-rendus du 4ème Colloque sur le Chaos Temporel et le Chaos Spatio-Temporel, Rouen, 5-10 (2003).
- [4] P. K. Jakobsen, J. V. Moloney, A. C. Newell, R. Indik, *Space-time dynamics of wide-gain-section lasers*, Phys. Rev. A **45**, 8129 (1992).
- [5] P. Coullet, L. Gil, F. Rocca, *Optical vortices*, Opt. Commun., **73**, 403 (1989).
- [6] P. K. Jakobsen, J. Lega, Q. Feng, M. Staley, J. V. Moloney, A. C. Newell, *Nonlinear transverse modes of large-aspect-ratio homogeneously broadened lasers: I. Analysis and numerical simulation*, Phys. Rev. A **49**, 4189 (1994).
- [7] Q. Feng, J. V. Moloney, A. C. Newell, *Amplitude instabilities of transverse traveling waves in lasers*, Phys. Rev. Lett. **71**, 1705 (1994).
- [8] G. K. Harkness, W. J. Firth, J. B. Geddes, J.V. Moloney, E. M. Wright, *Boundary effects in large-aspect-ratio lasers*, Phys. Rev. A **50**, 4310 (1994).
- [9] L. A. Lugiato, M. Milani, *Disappearance of laser instabilities in a Gaussian cavity mode*, Opt. Comm. **46**, 57 (1983).

## Fissures oscillantes dans les feuilles élastiques minces

B. Audoly, P. M. Reis et B. Roman

*LMM, UPMC, 4 pl. Jussieu, F-75252 Paris*

*PMMH, ESPCI, 10 rue Vauquelin, F-75231 Paris*

*MCND, Univ. of Manchester, M13 9PL, UK*

`audoly@lmm.jussieu.fr`

### Résumé

Nous présentons une nouvelle instabilité oscillante de fissure qui se produit lorsqu'un outil de découpe assez large est forcé à travers une feuille mince fragile préalablement entaillée. Nos expériences révèlent que l'amplitude et la longueur d'onde de la fissure dépendent linéairement de la largeur de l'indenteur sur une grande gamme de largeurs, et ne dépendent ni de la largeur du film, ni de la vitesse de découpe. Nous proposons un mécanisme pour cette instabilité, fondé sur un couplage entre l'avancée de la fissure et les déformations transverses du film.

## 1 Introduction

L'étude de la rupture est un sujet ancien mais qui reste toujours actif, notamment en ce qui concerne la compréhension du chemin de propagation et de son contrôle : peut-on prévoir la forme des morceaux de verre brisé ? Des expériences récentes bien contrôlées ont récemment permis d'observer des comportements intéressants, qui restent pour une large part inexpliqués. Une instabilité oscillante obtenue pendant la propagation dynamique d'une fissure a été rapportée dans une feuille pré-étirée de caoutchouc [6]. Dans un autre contexte, la propagation quasi-statique d'une fissure oscillante a été observée dans une bande mince de verre soumise à un gradient thermique [1, 2, 5], une expérience d'une grande simplicité qui a motivé de nombreuses études théoriques [3, 4].

Nous présentons ici des résultats sur les fissures oscillantes dans un contexte expérimental original : un objet, appelé *pointe de découpe*, déchire une feuille mince de polymère encastree par ses bords. La pointe de découpe est perpendiculaire au film et se déplace longitudinalement. Au-dessus d'une taille critique de la pointe, la fissure suit un trajet oscillant caractéristique et très reproductible — on arrive même à reproduire l'expérience à la main. L'instabilité se produit sur une large gamme d'échelles, voir la Fig. 1d) et e). L'observation d'une fissure oscillante dans ce contexte représente un défi à notre compréhension de la propagation des fissures. De plus, ces résultats peuvent avoir des applications concrètes, la découpe précise des films minces étant largement employée dans l'industrie.

## 2 Expériences

Nous avons effectué des expériences bien contrôlées dans des feuilles minces faites de différents polymères, pour différentes épaisseurs, et nous avons étudié les fissures résultantes en fonction de la largeur de la pointe de découpe. Un schéma du dispositif expérimental est présenté sur la Fig. 1a) et b). Il consiste en une feuille mince plane (de dimensions

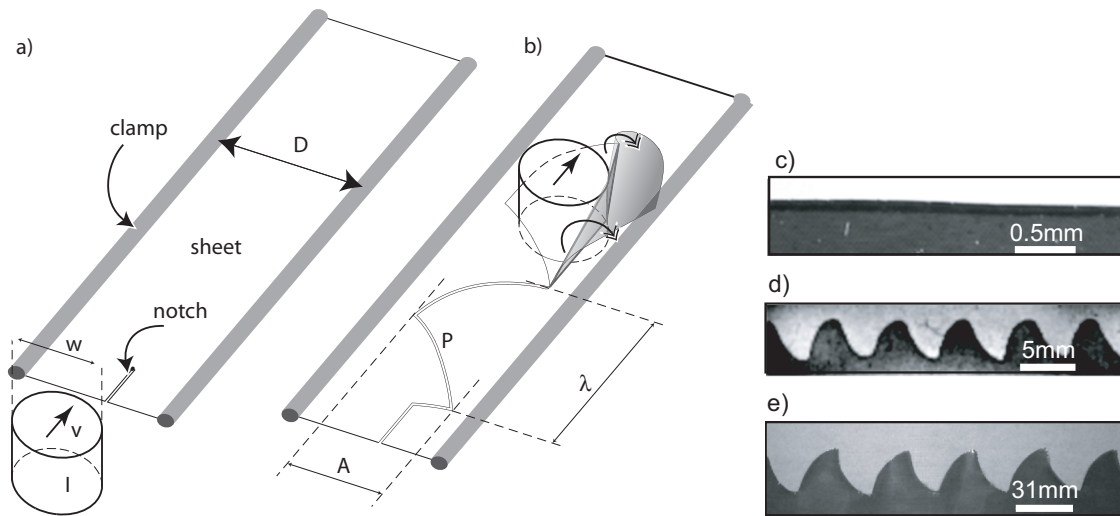


FIG. 1 – a) et b) Diagramme schématique du dispositif expérimental. Une pointe de découpe cylindrique traverse une feuille mince de polymère encastrée sur ses bords et entaillée, ce qui produit une fissure oscillante  $P$ . a) Configuration initiale de l'expérience. b) Configuration typique pendant la fissure. L'avancée de la pointe de découpe induit des déformations hors du plan (doubles flèches et region grisée) avec une propagation en mode III à la pointe de la fissure. c–e) Bord de la feuille vu du dessus (polypropylène de  $27\ \mu\text{m}$  d'épaisseur) pour trois largeurs de pointes de découpe: c)  $w = 0.15\text{mm}$  (fissure droite), d)  $w = 5\text{mm}$  (fissure oscillante), e)  $w = 31\text{mm}$  (fiss. oscillante). L'échelle est donnée par les rectangles blancs.

variant entre  $6 \times 60\text{ mm}$  et  $120 \times 500\text{ mm}$ ) encastrée le long des ses bords et montée sur un châssis en translation. Ce châssis est déplacé à vitesse constante,  $v$ , vers la pointe de découpe, constituée d'un cylindre ou un prisme droit de section rectangulaire de taille variable ( $0.05\text{ mm} \leq w \leq 60\text{ mm}$ ). Une caméra était installée directement au-dessus du dispositif, permettant d'observer la fissure se propageant dans le repère de la pointe de découpe. La feuille était initialement entaillée sur un bord pour positionner et initier la fissure. Nous avons employé à la fois des feuilles de polypropylène bi-orienté et d'acétate de cellulose, d'épaisseurs variant entre  $25$  et  $130\ \mu\text{m}$ . Les modules d'Young et énergie de fracture respectifs ont été mesurés dans les intervalles  $E = 1\text{--}2\text{ GPa}$  et  $\gamma = 2\text{--}5\text{ kJ/m}^2$ . Bien que polymériques, ces matériaux sont fragiles, car ils ont été fortement étirés lors de leur fabrication. Par conséquent, ils subissent peu de déformations plastiques lors de la propagation de la fissure mais, étant minces, supportent des flexions fortes sans initiation de fissure. Ceci explique qu'ils soient largement utilisés comme emballages dans l'industrie (ils sont résistants mais faciles à déchirer une fois la fissure initiée). Les fissures oscillantes décrites ci-dessous n'ont pas pu être observées dans des matériaux ductiles.

### 3 Fissures oscillantes

Lorsque l'on force la pointe de découpe à travers la feuille mince, le matériau est déchiré, et laisse une fissure de forme bien définie et très reproductible. Pour des pointes de découpe assez grandes, la fissure est oscillante comme le montrent les exemples de la

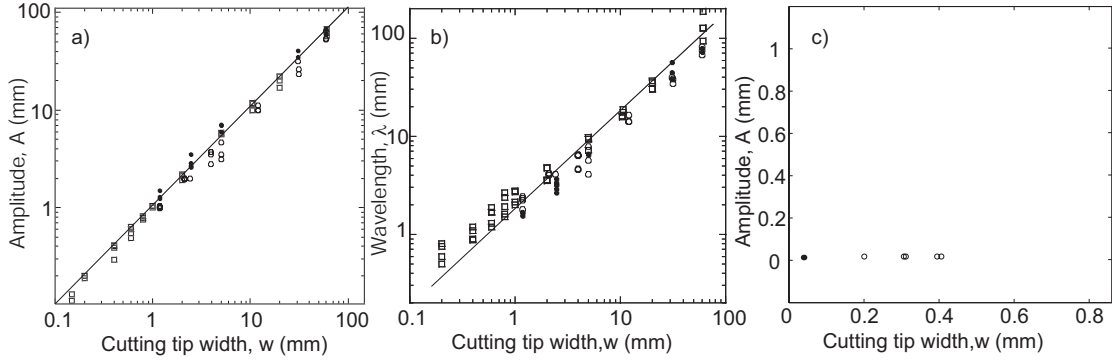


FIG. 2 – Tracés en unités logarithmiques de l'amplitude  $A$  pic à pic (a) et de la longueur d'onde  $\lambda$  (b) des oscillations en fonction de la largeur  $w$  de l'outil de découpe pour différents matériaux et différentes épaisseurs (symboles clairs pour du poly-propylène de 25 à 53  $\mu\text{m}$ , et sombres pour de l'acétate de cellulose de 100 à 130  $\mu\text{m}$ ), et pour un outil de découpe cylindrique ( $\circ\bullet$ ) ou à section rectangulaire ( $\square$ ). L'amplitude et la longueur sont bien représentées par des droites de pente unité sur une gamme de presque 3 décades. Les lignes en traits pleins représentent la meilleure interpolation linéaire de pente 1. c) Amplitude pic à pic du trajet de fissure pour différentes largeurs de l'outil de découpe (forme rectangulaire), montrant la transition en motifs rectilignes et oscillants. Les cercles ( $\circ$ ) correspondent à des régions de bistabilité où les fissures oscillantes et rectilignes peuvent être observées.

Fig. 1d) et e) pour deux tailles de pointe très différentes. Dans le régime oscillant, la fissure suit un chemin non sinusoïdal ressemblant à des ailerons de requins assemblés, constitué de portions régulières reliées par des points anguleux. Cependant, comme on s'y attend, pour des pointes de découpe suffisamment fines, la fissure redevient rectiligne; Fig. 1c). Ces résultats révèlent donc une instabilité nouvelle dans la fracture des films minces de polymères, avec une transition entre motifs de découpe rectiligne et oscillants lorsque la taille de l'outil de découpe augmente.

On s'intéresse ici principalement au régime bien au-dessus du seuil. Comme le montre la Fig. 2, nous trouvons que l'amplitude  $A$  et la longueur d'onde  $\lambda$  du trajet oscillant dépendent linéairement de la largeur de la pointe de découpe, sur pratiquement trois décades. Cette dépendance linéaire s'applique pour de nombreux matériaux et une grande gamme d'épaisseurs. De plus, nous n'avons pas observé de variation du motif en réalisant les expériences avec des vitesses très différentes, dans la gamme  $0.06 \text{ mm/s} < v < 64 \text{ mm/s}$ . Nous avons aussi vérifié que, pour une taille donnée de l'objet  $w = 2 \text{ mm}$ , le motif est indépendant de la largeur de la bande plastique  $D$  pour  $3.3w < D < 21w$ . C'est *a priori* surprenant, car on pouvait penser à  $D$  comme une longueur caractéristique naturelle du problème.

Le processus de propagation de la fissure sur une période, vu par dessus dans le référentiel de l'objet est représenté sur la figure 3. Notons  $T$  la position de la fissure, qui se propage avec la vitesse  $v_T$ . En suivant les clichés Fig. 3a)-f), l'objet se déplace à vitesse constante  $v$  par rapport au film, comme indiqué par la flèche blanche épaisse. Entre  $t_1$  et  $t_2$ ,  $T$  se propage vers la gauche. Pendant cette phase de propagation lente, la composante selon  $y$  de  $v_T$  est plus faible que  $v$  et un nouveau contact  $N'$  finit par se former entre l'indenteur

et le bord plan du film (ligne blanche continue). Pendant cette phase  $t_1 < t < t_2$ , un pli (ligne en pointillés et flèches doubles blanches) produit des déformations de plus en plus fortes au bord gauche du film. Parce que le point de contact  $N$  est poussé vers la gauche par l'indenteur, ce pli est sous tension, produisant des contraintes près de la pointe de la fissure montrées par les flèches grises, et une direction de propagation de la fissure perpendiculaire à ce pli (flèche noire  $v_T$ ). Entre  $t_2$  et  $t_3$ , les deux lèvres de la fissure sont poussées contre l'indenteur et sont ainsi étirées. L'étirement de la lèvre droite domine finalement à  $t_3$ , et la direction des contraintes près de la fissure change alors; une phase de propagation dynamique s'ensuit. Ceci relâche la plus grande partie de l'énergie élastique dans le film. Pour  $t_4 < t < t_5$ , un nouveau point de contact  $N''$  apparaît sur le bord gauche de la fissure. Le cliché  $t_5$  correspond ainsi au milieu de la période, image miroir de  $t_2$ , et les contraintes à  $T$  provoquent de nouveau une propagation vers la gauche. La deuxième demi-période d'oscillation est similaire,  $t_6$  nous ramenant au point de départ  $t_1$  après une période complète.

La dépendance linéaire de l'amplitude  $A$  et la longueur d'onde  $\lambda$  en fonction de  $w$  présentée plus haut doit tomber en défaut près de la région de transition vers la propagation droite. Dans ce régime, la feuille ne peut plus être considérée comme mince par rapport aux dimensions de l'indenteur, énergies de courbure et d'étirement devenant alors du même ordre. Nous avons utilisé des lames rectangulaires fines (utilisées pour la mesure de jeu mécanique) avec  $0.0375 < w < 0.8\text{mm}$ . Pour de telles tailles, on observe la propagation

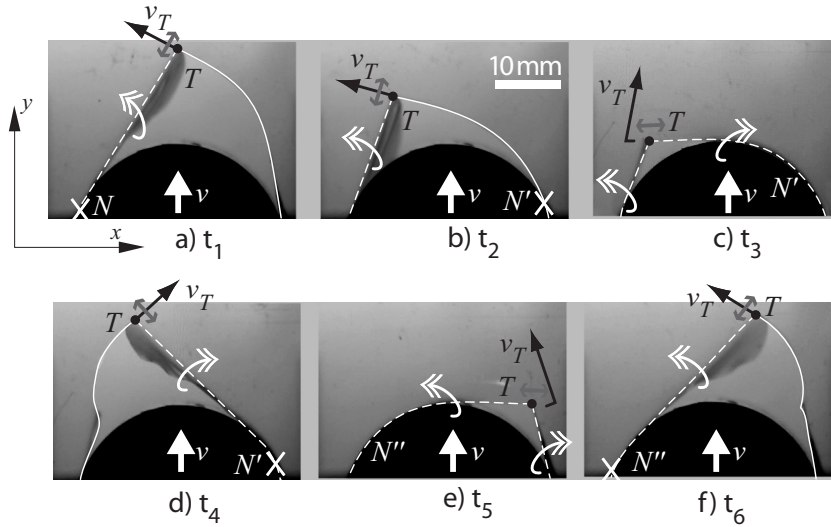


FIG. 3 – Séquence de clichés expérimentaux montrant la propagation d'une fissure oscillante sur une période,  $\Delta t = 32\text{ s}$ , vue du dessus dans le repère de l'outil de découpe. La pointe de la fissure est en  $T$  et progresse à la vitesse  $v_T$ . Les lignes blanches ont été ajoutées pour aider la visualisation : les lignes pleines représentent un bord fissuré, alors qu'un pli est indiqué par une ligne pointillée. Près de ces plis, l'outil force le film à se déformer hors du plan (région sombre), comme indiqué par la double flèche. Les flèches grises représentent les directions principales des contraintes près de  $T$ . Un film typique peut être consulté sur le Web [7].



grâce à un microscope avec un objectif  $2 \times$ . Une transition claire est observée (Fig. 2) d'une propagation droite vers un état oscillant, lorsque  $w$  est augmenté. Au dessus d'une taille critique  $w_c$ , l'amplitude des oscillations varie linéairement avec  $w$ , comme rapporté plus haut. Au dessus du point de transition, près de  $w_c$ , une région de bi-stabilité permet d'observer à la fois des états oscillants et droits.

## 4 Discussion et conclusion

Le scénario d'instabilité que nous présentons suggère que l'origine des oscillations repose dans les propriétés mécaniques des feuilles minces élastiques et leur lien avec la géométrie des surfaces. Sous des contraintes extérieures, les feuilles minces élastiques se courbent pour éviter l'extension, puisque l'énergie de courbure est faible comparée à celle d'étirement [8]. Pour conserver leur distances, elles adoptent alors des formes développables, réunion de lignes droites, les *generatrices*. Il est utile de diviser la feuille au cours de la propagation de la fissure en deux zones. Une *zone molle* définie comme la région où la feuille peut se déformer en générant seulement de l'énergie de courbure, zone où elle s'accommode facilement de la présence de l'indenteur. D'autre part, pas les *zones dures* où la feuille n'est pas libre de se courber, et la présence de l'indenteur génère des contraintes d'étirement importantes, conduisant finalement à la propagation de la fissure. Ces arguments forment la base d'un modèle quantitatif de propagation de fissure dans les feuilles minces qui nous présenterons prochainement. Un avant-goût en est disponible sur [7].

Pour conclure, nous rapportons un nouveau mode de fissure oscillante lorsqu'un indenteur est déplacé à travers une feuille mince de matière plastique. Bien que ces motifs rappellent ceux qui apparaissent lors de la trempe de bande de verre [1, 2, 5], une différence importante réside dans le fait que le mécanisme de l'oscillation est ici au couplage entre la propagation de la fissure et les déplacements de la feuille hors du plan. L'amplitude et la longueur d'onde de l'oscillation sont indépendante de la vitesse de l'indenteur, de l'épaisseur ou de la largeur de la feuille, et varie linéairement avec la taille de l'objet. Pour des tailles d'indenteur en dessous de  $w_c$ , aucune oscillation n'est observée, et la propagation se fait en ligne droite.

Nous souhaitons remercier Mokhtar Adda Bedia pour des discussions, et Charles Baroud pour avoir mis en contact les groupes de Paris et de Manchester qui avaient commencé à travailler indépendamment. Les expériences décrites plus haut ont été rapportées simultanément par notre groupe [9] et par Ghatak et Mahadevan [10]. La modélisation du phénomène est encore peu satisfaisante [11], et fera l'objet d'une publication prochaine.

## Références

- [1] Yuse A. and Sano M., *Transition between crack patterns in quenched glass plates*, Nature **362**, pp. 329–331, (1993)
- [2] Ronsin O., Heslot F. and Perrin B., *Experimental study of quasistatic brittle crack propagation*, Phys. Rev. Let. **75** (1995)
- [3] Adda-Bedia M. and Pomeau Y., *Crack instabilities of a heated glass strip*, Phys. Rev. E **52**, pp. 4105–4113, (1995)
- [4] Yang B. and Ravi-Chandar K., *Crack path instability in a quenched glass plate*, J. Mech. Phys. Solids **49** pp. 91–130, (2001)
- [5] Deegan R., Chheda S., Patel L., Marder M. and Swinney H., *Wavy and rough crack in Silicon*, (2002).
- [6] Deegan R., Petersan P., Marder M. and Swinney H., *Oscillating fracture paths in rubber*, Phys. Rev. Let. **88**, (2002).
- [7] <http://www.lmm.jussieu.fr/platefracture/>
- [8] Pogorelov A., *Bending of surfaces and stability of shells*, Translation of mathematical monographs, AMS, (1988).
- [9] B. Roman, B. Audoly, P. M. Reis, S. De Villiers, V. Viguié, D. Vallet *Oscillatory fracture paths in thin elastic sheets* C. R. Mécanique **331**, No 12, 811–816 (2003)
- [10] A. Ghatak and L. Mahadevan *Crack Street: The Cycloidal Wake of a Cylinder Tearing through a Thin Sheet* Phys. Rev. Letters **91** 215507 (2003)
- [11] B. Audoly, B. Roman, P. M. Reis, *Comment on "Crack Street: The Cycloidal Wake of a Cylinder Tearing through a Thin Sheet"* Submitted to Physical Review Letters (2003)

## Dynamique spatiale d'un système hôte-parasitoïde

P. Auger\*, C. Lett\*, T. Nguyen-Huu\*, J.C. Poggiale\*\*

\* *Laboratoire Biométrie et Biologie Evolutive,  
UMR CNRS 5558, Université Claude Bernard Lyon 1,  
43 boulevard du 11 novembre 1918, 69622 Villeurbanne Cedex, France*

\*\* *Centre d'Océanologie de Marseille,  
Laboratoire d'Océanographie et de Biogéochimie, UMR CNRS 6535,  
Campus de Luminy - Case 901, 13288 Marseille Cedex 09, France  
pauger@biomserv.univ-lyon1.fr*

### Résumé

Le but de ce travail est d'étudier les effets de la fréquence de dispersion sur le synchronisme spatial d'un système hôte-parasitoïde [8]. Ce travail constitue la suite d'un article [20] dans lequel nous avons étudié un système d'une chaîne linéaire de sites connectés par des flux migratoires. Ici, nous considérons une grille spatiale bidimensionnelle carrée. Nous montrons qu'au-dessus d'un seuil de fréquence de dispersion, la dynamique de la population peut être décrite par un modèle macroscopique régissant les densités totales de population d'insectes sur la grille.

## 1 Introduction

Les séries chronologiques concernant les effectifs d'une même espèce à différents endroits présentent un synchronisme significatif. On peut observer ce synchronisme spatial pour beaucoup d'espèces différentes d'insectes [1], de poissons [4], d'oiseaux [5] et de mammifères [9]. Bien qu'il diminue avec la distance entre les populations, on peut observer cet effet de synchronisme pour des distances importantes, de quelques kilomètres à des milliers de kilomètres [11]. Afin d'expliquer ce synchronisme spatial, deux causes principales ont été proposées. La première est connue comme l'effet Moran résultant de corrélations environnementales [14]. Une deuxième cause possible est la dispersion [15].

## 2 Modèle spatialisé

Dans un environnement homogène, la dynamique d'interaction hôte-parasitoïde avec des générations discrètes peut être décrite par un couple d'équations différentielles du premier ordre (1)

$$\begin{aligned} n_{t+1} &= \lambda(n_t) n_t \exp(-ap_t) \\ p_{t+1} &= cn_t (1 - \exp(-ap_t)) \end{aligned} \quad (1)$$

qui correspond au modèle de Nicholson-Bailey avec un taux de croissance des hôtes  $\lambda(n_t)$ . Ici  $n_t$  et  $p_t$  sont les densités respectives des hôtes et des parasitoïdes à la génération  $t$ . Pour le taux de croissance des hôtes, nous adoptons la forme logistique  $\lambda(n_t) = \exp\left(r\left(1 - \frac{N_t}{K}\right)\right)$  où  $r$  est un paramètre positif et  $K$  la capacité limite. Par conséquent, en l'absence des

parasitoïdes, la population d'hôtes tendrait vers  $K$ . Le paramètre  $a$  est l'efficacité de recherche du parasitoïde et  $c$  est le nombre moyen de parasitoïdes femelles émergeant de chaque hôte infecté. Si nous supposons que l'environnement se compose d'un treillis carré avec  $A \times A$  sites, la dynamique implique deux phases. La première phase correspond aux interactions hôte-parasitoïde sur chaque site. Les équations (1) nous permettent de calculer les populations locales sur chaque site d'une génération à la suivante. La deuxième phase est la dispersion entre les sites voisins. Nous supposons qu'une proportion constante  $\mu_n$  (resp.  $\mu_p$ ) de migrants pour la population d'hôtes (resp. parasitoïdes) quitte chaque site pour aller vers les huit plus proches voisins. Le processus complet de dispersion peut être décrit par une matrice  $M$  non négative qui n'est pas montrée ici. Le modèle complet combine la dispersion et les interactions locales selon l'équation (2).

$$N_{t+1} = F(M^k N_t) \quad (2)$$

Les composantes du vecteur  $N_t$  de dimension  $2A^2$  sont les densités des hôtes et des parasitoïdes sur chaque site. Le vecteur des fonctions  $F$  est de la même dimension et incorpore les deux équations précédentes (1) d'interactions locales pour tous les sites de la grille. Le paramètre  $k$  est un nombre entier que nous appelons fréquence de dispersion. Quand le paramètre  $k = 1$ , il y a un seul événement de dispersion entre deux générations. Quand  $k > 1$ , le processus de dispersion est répété plusieurs fois. Dans ce cas, au lieu d'aller seulement vers les huit sites voisins les plus proches, les migrants peuvent atteindre des sites plus lointains. Cette situation est susceptible de se produire pour la plupart des associations hôte-parasitoïde concernant des insectes adultes ailés (comme des guêpes, des papillons, des mouches ou des moucheron [10]-[11]). Quand  $k$  devient assez grand, le processus de dispersion est rapide par rapport aux interactions locales. Il est alors possible de construire un modèle réduit, également appelé modèle agrégé, qui régit les densités totales de populations d'hôtes et de parasitoïdes de la grille.

Les méthodes d'agrégation peuvent être employées dans le cas de systèmes dynamiques impliquant deux échelles de temps ou plus, en temps continu aussi bien que pour des modèles en temps discret [12]-[17]. Le modèle agrégé est obtenu en deux étapes. À la première étape, nous négligeons le processus lent de l'interaction locale et nous étudions le processus rapide de dispersion qui est caractérisé par un équilibre rapide stable, qui correspond à la même proportion  $1/A^2$  d'hôtes et de parasitoïdes sur chaque site. Cet équilibre rapide correspond à une distribution homogène spatiale des hôtes et des parasitoïdes sur la grille, et donc à un synchronisme spatial. Dans la deuxième étape, nous faisons l'approximation suivante : Pour toute génération  $t$ , nous supposons que le système est à l'équilibre rapide. Puis en substituant l'équilibre rapide dans les équations (1) du système complet, et par sommation des densités de population d'insectes de tous les sites de la grille, nous obtenons un modèle réduit (2) régressant les densités totales d'hôtes et de parasitoïdes.

$$\begin{aligned} n_{t+1} &= n_t \exp \left( r \left( 1 - \frac{n_t}{KA^2} \right) - \frac{a}{A^2} p_t \right) \\ p_{t+1} &= cn_t \left( 1 - \exp \left( -\frac{a}{A^2} p_t \right) \right) \end{aligned} \quad (3)$$

La figure 1 présente des simulations numériques du modèle complet (2) avec  $A = 200$ ,  $a = 0.2$ ,  $r = 2.6$ ,  $K = 50$ ,  $c = 0.4$  et  $\mu_N = \mu_P = 1$  pour des valeurs croissantes du paramètre  $k$ . Le modèle complet prend en compte  $2A^2 = 80000$  équations non-linéaires

couplées en temps discret. L'état initial correspond à quelques hôtes et parasitoïdes situés sur un unique site et zéro partout ailleurs. Après une dynamique transitoire, on observe des structures spatiales correspondant à des spirales pour les densités des hôtes et des parasitoïdes de manière similaire aux travaux [18]-[19]. L'effet de l'accroissement du nombre d'événements de dispersion sur le modèle spatial de la densité de population des hôtes est une sorte d'effet de zoom, les spirales devenant plus grandes. Pour  $k = 1$ , il existe 6 spirales à l'intérieur du réseau quand il en existe une seule pour  $k = 4$ .

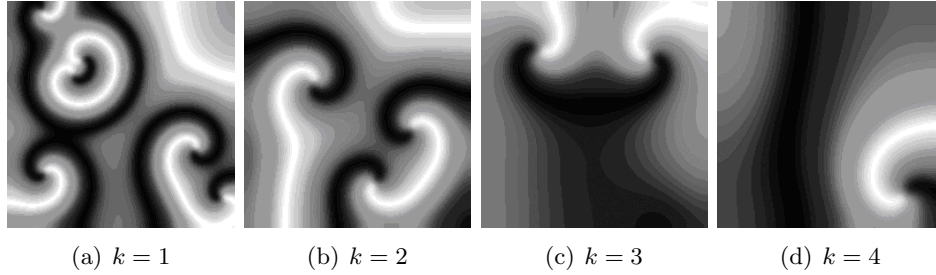


FIG. 1 – Simulations numériques pour le modèle complet avec  $A = 200$ ,  $a = 0.2$ ,  $r = 2.6$ ,  $K = 50$ ,  $c = 0.4$  et  $\mu_N = \mu_P = 1$ . La densité d'hôtes sur chaque cellule est représentée pour les valeurs les plus élevées en noir.

La figure 6.2(a) présente des simulations numériques du modèle agrégé (2) pour les mêmes valeurs de paramètres, mais pour une grille réduite ( $A = 50$ ). Après une dynamique transitoire qui n'est pas montrée, l'attracteur du modèle agrégé est une courbe invariante stable, représentée en noir sur la figure 6.2(a). Les figures 6.2(a), 6.2(b) et 6.2(c) présentent des simulations numériques du modèle complet pour les mêmes valeurs des paramètres que sur la figure 6.2(a) et avec  $\mu_N = \mu_P = 1$  et  $k = 1$ .

Pour rendre plus facile la comparaison entre la dynamique des modèles complet et agrégé, l'attracteur du modèle agrégé est représenté en noir et les solutions du modèle complet sont montrées en gris. À chaque génération  $t$ , les densités totales d'hôtes et de parasitoïdes sont calculées à partir du modèle complet (2) et également à partir du modèle agrégé (2). Les observations de la dynamique spatiale du modèle complet ont montré que pendant une phase transitoire (non présentée ici), une spirale a démarré mais n'a pas été persistante. La figure 6.2(d) montre que les solutions du modèle complet convergent par la suite vers l'attracteur du modèle agrégé.

Quand  $r = 2.2$  (Les autres paramètres étant inchangés), l'attracteur du modèle agrégé est périodique et correspond aux cinq points noirs montrés sur la figure 3a. Pour une valeur de fréquence de dispersion de  $k = 1$ , contrairement au cas du schéma 2, une spirale a envahi la grille et était persistante, et les solutions du modèle complet ne convergeaient pas vers l'attracteur du modèle agrégé (ce résultat n'est pas montré). La figure 3 présente la comparaison de l'attracteur du modèle agrégé avec les solutions du modèle complet quand la fréquence de dispersion est augmentée jusqu'à  $k = 2$ . Dans ce cas, la spirale n'a pas persisté. Le synchronisme spatial a été observé partout sur la grille pour un nombre de générations plus petit que 500, comme le montre la figure 3b présentant l'évolution dans le temps du coefficient de variation de la distribution des hôtes qui tend vers zéro. La figure 3a montre que les solutions du modèle complet tendent vers l'attracteur du modèle agrégé.

La non persistance des structures spatiales quand le paramètre  $k$  est augmenté peut être bien comprise à partir de la figure 1 qui montre qu'une augmentation de  $k$  provoque

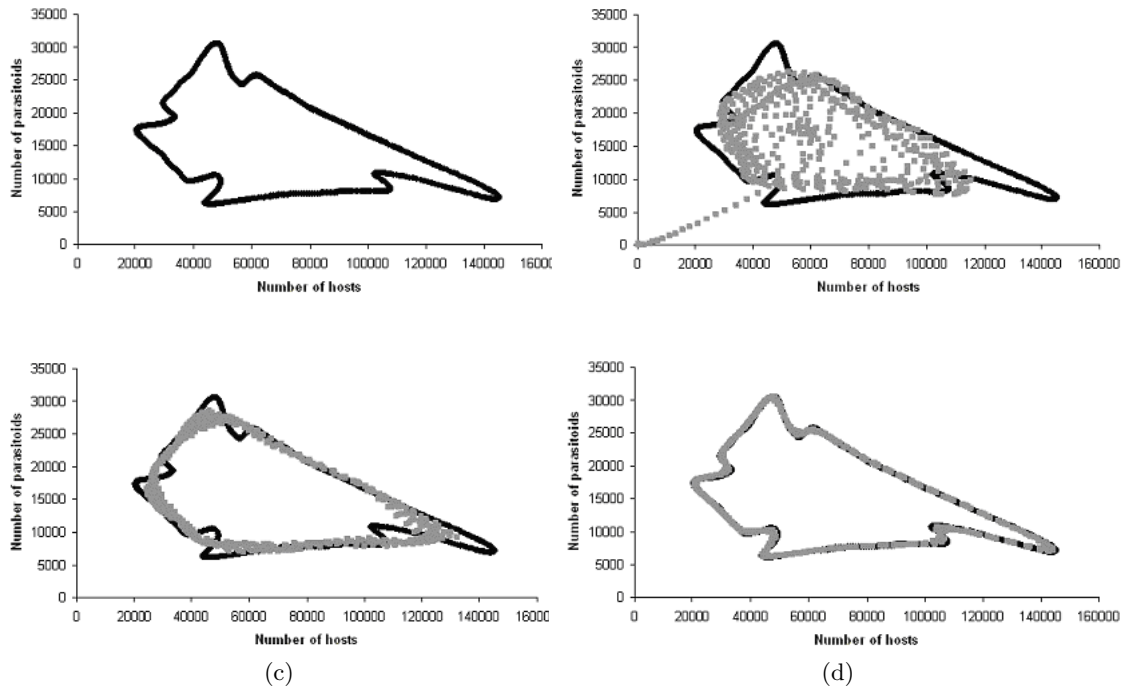


FIG. 2 – 6.2(a) Simulations numériques pour le modèle agrégé avec  $A = 50$ ,  $a = 0.2$ ,  $r = 2.6$ ,  $K = 50$ ,  $c = 0.4$ . 6.2(b) - 6.2(d) Simulation numérique du modèle agrégé comme sur la figure 6.2(a) en noir, et simulation numérique du modèle complet avec  $A = 50$ ,  $a = 0.2$ ,  $r = 2.6$ ,  $K = 50$ ,  $c = 0.4$ ,  $\mu_N = \mu_P = 1$  et  $k = 1$  en gris pour  $0 \leq t \leq 500$  6.2(b),  $500 \leq t \leq 1000$  6.2(c) et  $1500 \leq t \leq 2000$  6.2(d).

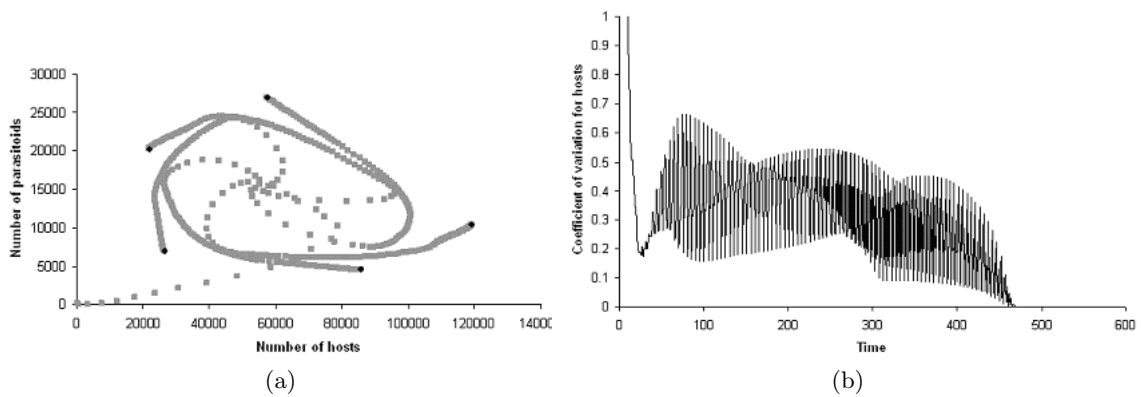


FIG. 3 – 6.3(a) Simulation numérique du modèle agrégé (noir) et complet (gris) dans les mêmes conditions que sur la figure 2 mais avec  $r = 2.2$  et  $k = 2$ . 6.2(b) Coefficient de variation de la distribution spatiale des hôtes en fonction du temps pour le modèle complet.

un effet d'agrandissement des spirales. Par conséquent, pour une taille donnée du réseau spatial, on peut comprendre que pour quelques valeurs de la fréquence de dispersion, la grille bidimensionnelle n'est pas assez grande pour entretenir une spirale persistante. Par conséquent, il existe une valeur seuil  $\tilde{k}$  du paramètre  $k$  au-dessous de laquelle les structures spatiales persistent et au-dessus de laquelle elles ne persistent pas :

- si  $k < \tilde{k}$ , aussi longtemps que nous pouvons le vérifier numériquement, les structures spatiales persistent, la dynamique locale est asynchrone d'un site à l'autre et le modèle agrégé n'est pas utile pour prédire la dynamique du modèle complet.
- si  $k > \tilde{k}$ , il existe un temps fini tel que les structures spatiales ne persistent pas, le coefficient de variation de la distribution de la densité des hôtes et des parasitoïdes tend vers zéro, la dynamique des sites devient synchrone et le modèle agrégé est utile pour prévoir le comportement asymptotique du modèle complet

Nous avons réalisé plusieurs simulations pour des grilles bi-dimensionnelles de taille  $A^2 = 2500$  et nous avons trouvé que, en fonction des conditions initiales et des valeurs des paramètres, la valeur seuil du paramètre  $k$  était soit 1 (comme sur la figure 2) ou 2 (comme sur la figure 3). Le tableau 1 montre les valeurs critiques de la fréquence de dispersion pour différentes tailles de grilles.

taille du réseau $A^2$	2500	10000	40000
valeur du seuil de la fréquence de dispersion $\tilde{k}$	1-2	3-5	7-10

FIG. 4 – Valeur critique de la fréquence de dispersion pour laquelle le synchronisme spatial se produit.

### 3 Conclusion

Notre travail a montré que la fréquence de dispersion  $k$  joue un rôle important dans la persistance des modèles spatiaux. Il existe une valeur-seuil de  $k$  tel que pour de plus grandes valeurs les structures spatiales ne persistent pas et les densités des sites deviennent synchrones. Un modèle agrégé régissant toutes les densités de population d'insectes permet alors de prédire le comportement asymptotique du modèle complet. L'existence d'une valeur seuil de  $k$  n'est pas étonnante a priori. En effet, la diffusion tend à réduire les gradients spatiaux et à favoriser l'homogénéité spatiale. Par conséquent, quand les événements de dispersion deviennent plus fréquents, on peut imaginer qu'un état homogène spatial peut se produire. Ainsi, pour une valeur élevée de  $k$ , on peut imaginer que les proportions d'hôtes et de parasitoïdes deviennent semblables d'un site à l'autre, détruisant les structures spatiales et induisant un synchronisme spatial. Cependant, nos simulations ont montré que pour des réseaux de 10000-40000 sites, une valeur de 5 à 10 événements de dispersion par génération est suffisante pour permettre le synchronisme spatial. Dans de telles situations, les individus se dispersent dans un disque dont le rayon représente environ 5% de la taille du côté de la grille carrée, ce qui correspond à une dispersion sur de courtes distances en comparaison à la taille de l'habitat. En conséquence, pour des étendues réalistes du domaine de dispersion entre deux générations, il est possible de construire un modèle agrégé qui peut fournir des informations utiles au sujet du comportement asymptotique du modèle complet.

## Références

- [1] Pollard E. *Synchronism of population fluctuations: the dominant influence of widespread factors on local butterfly populations*, Oikos, **60**, (7-10 1991),
- [2] Grenouillet, G., Hugueny, B., Carrel, G. A., Olivier, J. M. & Pont, D. *Large-scale synchronism and inter-annual variability in roach recruitment in the Rhône River: the relative rôle of climatic factors and density dependent processes*, Freshwater Biol. **43**, 1-16 (2000).
- [3] Cattadori, I. M., Merler, S. & Hudson, P. J. *Searching for mechanisms of synchronism in spatially structured gamebird populations*, J. Anim. Ecol. **69**, 620-638 (2000).
- [4] Ims, R. A. & Andreassen, H. P. *Spatial synchronization of vole population dynamics by predator birds*, Nature **408**, 194-196 (2000).
- [5] Sinclair, A. R. E. et al. *Can the solar cycle and climate synchronise the snowshoe hare cycle in Canada? Evidence from tree rings and ice cores*, Am. Nat. **141**, 173-198 (1993).
- [6] Hudson, P. J. & Cattadori, I. *The Moran effect: a cause of population synchronism*, Trends Ecol. Evol. **14**, 1-2 (1999).
- [7] Ruxton, G. D. & Rohani, P. *Fitness dependent dispersal in metapopulations and its consequences for persistence and synchronism*, J. Anim. Ecol. **67**, 530-539 (1998).
- [8] Hanski, I. *Metapopulation dynamics*, Nature **396**, 41-49 (1998).
- [9] Lett, C., Auger, P. & Bravo de la Parra, R. *Migration frequency and the persistence of host-parasitoid interactions*, J. Theor. Biol. **221**, 639-654 (2003).
- [10] Godfray, H. C. J. *Parasitoids. Behavioral and Evolutionary Ecology* (Princeton University Press, Princeton, 1994).
- [11] Hochberg, M. E. & Ives, A. R. *Parasitoid Population Biology* (Princeton University Press, Princeton, 2000).
- [12] Auger, P. & Roussarie, R. *Complex ecological models with simple dynamics: From individuals to populations*, Acta Biotheor. **42**, 111-136 (1994).
- [13] Auger, P. & Poggiale, J.-C. *Aggregation and emergence in systems of ordinary differential equations*, Math. Comput. Model. **27**, 1-21 (1998).
- [14] Arino, O., Sanchez, E., Bravo de la Parra, R. & Auger, P. *A model of an age-structured population with two time scales*, SIAM J. Appl. Math. **60**, 408-436 (1999).
- [15] Bernstein, C., Auger, P. & Poggiale, J.-C. *Predator migration decisions, the ideal free distribution and predator-prey dynamics*, Am. Nat. **153**, 267-281 (1999).
- [16] Bravo de la Parra, R., Sanchez, E., Arino, O. & Auger, P. *A discrete model with density dependent fast migration*, Math. Biosci. **157**, 91-109 (1999).
- [17] Auger, P. & Bravo de la Parra, R. *Methods of aggregation of variables in population dynamics*, C. R. Acad. Sci. III **323**, 665-674 (2000).
- [18] Hassell, M. P., Comins, H. N. & May, R. M. *Spatial structure and chaos in insect population dynamics*, Nature **353**, 255-258 (1991).
- [19] Comins, H. N., Hassell, M. P. & May, R. M. *The spatial dynamics of host-parasitoid systems*, J. Anim. Ecol. **61**, 735-748 (1992).
- [19] Rohani, P. & Miramontes, O. *Host-parasitoid metapopulations: the consequences of parasitoid aggregation on spatial dynamics and searching efficiency*, Proc. R. Soc. Lond. B **260**, 335-342 (1995).



## Contrôle de la bifurcation de Hopf d'un Laser à Electrons Libres

S. Bielawski<sup>1</sup>, C. Bruni<sup>2,3</sup>, G. L. Orlandi<sup>2,3</sup>, D. Garzella<sup>2,3</sup>, M.E. Couprie<sup>2,3</sup>

1) *Laboratoire PhLAM/CERLA, Université des Sciences et Technologies de Lille, F-59655 Villeneuve d'Ascq Cedex, France.*

2) *CEA/DSM/DRECAM/SPAM, Batiment 522, 91191 Gif-sur-Yvette, France.*

3) *Laboratoire pour l'Utilisation du Rayonnement Electromagnétique, Bâtiment 209D, Université Paris Sud, BP34, 91898 Orsay CEDEX, France.*

`serge.bielawski@univ-lille1.fr`

### Résumé

Un Laser à Electrons Libres (LEL) résulte de l'interaction d'un faisceau d'électrons relativistes avec une onde optique, qui est générée par émission de rayonnement synchrotron au passage des électrons dans une structure magnétique où règne un champ magnétique périodique permanent (le milieu amplificateur). Sur un LEL basé sur anneau de stockage, l'amplification dépend du désaccord entre la fréquence de passage des électrons dans le milieu amplificateur et la fréquence d'aller-retour de l'onde optique dans la cavité optique. Selon le désaccord, des régimes d'oscillations de l'enveloppe des impulsions apparaissent au voisinage de régimes pour lesquels le laser possède les meilleures caractéristiques (trains d'impulsions réguliers, stabilité, puissance, largeur temporelle et spectrale).

Nous avons mis au point une technique de contrôle permettant de stabiliser le système accélérateur-laser sur un état instable (associé à un comportement régulier du laser). Le dispositif de contre-réaction contrôle le gain du laser en agissant sur les dispositifs d'accélération des électrons (cavité Radio-fréquence). L'ensemble de cette méthode, testée sur un modèle de LEL et expérimentalement sur le LEL de Super-ACO, sera présenté dans le cadre de ces journées.

## 1 Introduction

Le contrôle de bifurcations locales est important notamment dans des systèmes où la stabilité est primordiale. Dans le cas du LEL en configuration oscillateur, des régimes de type cycle limite ont été mis en évidence tant sur des LEL basés sur des accélérateurs linéaires [1], que sur anneaux de stockage [2, 3, 4, 5, 6, 7]. Pour des LEL basés sur anneaux de stockage et lorsque le régime du laser est de type cycle limite, les impulsions sont alors groupées en macro-impulsions, qui sont pulsées à des fréquences lentes (centaines de Hertz). Ces régimes pulsés peuvent être particulièrement gênants pour des expériences utilisant les LEL (e. g. expériences pompe-sonde). Il a été prouvé que ces régimes non stationnaires ont une origine dynamique déterministe [8, 9]. Souvent, dans des systèmes dynamiques possédant ces propriétés, il existe un ou plusieurs états stationnaires, qui ne sont pas en général observés car ils sont instables. L'existence même d'un tel état permet de contrôler le système. Il est en principe possible de stabiliser un de ces états stationnaires instables avec une boucle de contre-réaction entre une mesure et un paramètre [10, 11].

D'abord, la dynamique longitudinale d'un LEL sur anneau de stockage est présentée et illustrée avec l'exemple de Super-ACO (Orsay, France). Puis, le contrôle des zones pulsées est analysé théoriquement et expérimentalement dans le cas de Super-ACO.

Longueur des paquets $\sigma_\tau$	80-180 ps
Espacement entre deux paquets	120 ns
Largeur temporelle du laser (FWHM)	20-50 ps
Fréquence de répétition du laser	8.33 MHz

TAB. 1 – *Caractéristiques temporelles des paquets d'électrons et du LEL de Super-ACO*

## 2 Dynamique longitudinale

Une onde électromagnétique est générée par émission de rayonnement synchrotron au passage d'un faisceau d'électrons dans le champ magnétique périodique permanent d'un onduleur, et est stockée dans une cavité optique. Elle est amplifiée [12] suite à son interaction avec le faisceau d'électrons relativistes, issu d'un accélérateur de particules. L'effet laser conduit à une augmentation de la dispersion en énergie des paquets d'électrons, c'est-à-dire la largeur rms de la distribution en énergie des paquets.

Le LEL de Super-ACO (Cf. Tableau 1) émet à une longueur d'onde de 350 nm accordable sur 10 nm, avec un mode  $TEM_{00}$  comme mode transverse principal. Le LEL reproduit la structure temporelle pulsée à haute cadence des paquets d'électrons à partir desquels il est généré. Deux paquets espacés de 120 ns circulent dans l'anneau de stockage Super-ACO. A l'échelle micro-temporelle, l'impulsion laser est pulsée à la fréquence de passage des paquets d'électrons dans la cavité optique du laser, soit 8.33 MHz.

La dynamique macro-temporelle des impulsions, c'est-à-dire l'évolution de l'enveloppe des impulsions, dépend du désaccord entre la fréquence de passage des électrons dans l'onduleur, et la fréquence d'aller-retour de l'onde lumineuse dans la cavité optique. Ce désaccord est expérimentalement introduit à Super-ACO en variant la fréquence de la cavité radio-fréquence (RF) présente sur l'anneau afin de compenser les pertes d'énergie, par rayonnement synchrotron, des électrons à chaque tour. Une variation de sa fréquence entraîne un changement de la fréquence de révolution des paquets (1 Hz de variation correspond à 1.2 fs de retard des paquets par rapport à l'émission spontanée émise par le paquet précédent). Selon le désaccord, le laser peut présenter un régime stationnaire stable (Cf. Figure 1b), ou un cycle limite (Cf. Figure 1a) [13].

Comme l'illustre la figure 1c, la courbe d'accord possède cinq zones. La zone centrale (zone 3) correspond à un laser stationnaire stable optimisé en terme de puissance, de largeur d'impulsion et de largeur spectrale. En zone 2 et 4, le laser devient pulsé à une fréquence autour de 300 Hz. Pour de plus grands désaccords (zones 1 et 5), le laser redevient continu, mais avec une largeur temporelle et spectrale plus grande qu'en zone centrale. A l'accord parfait, le barycentre de l'impulsion laser coïncide avec le barycentre de la distribution longitudinale des paquets d'électrons. Une variation du désaccord, entraîne une différence de position entre les barycentres des distributions. IL a été montré analytiquement que la bifurcation présente sur la courbe désaccord est une bifurcation de Hopf [19].

La dynamique du LEL sur anneau de stockage est reproduite par un modèle comprenant l'évolution tour par tour  $n$  dans la cavité optique de la distribution en intensité du laser  $y_n(\tau)$  (avec  $\tau$  la coordonnée longitudinale), du gain du laser  $G_n(\tau)$ , qui dépend des paramètres des paquets d'électrons, et de la dispersion en énergie  $\sigma_n$  [15]. La figure 2 montre l'accord entre l'expérience et ce modèle concernant l'évolution de l'intensité du laser et du barycentre du laser en fonction du désaccord. Comme l'illustre la figure 2a, le laser est stationnaire stable pour des désaccords proches de l'accord parfait (-2/2 Hz); il

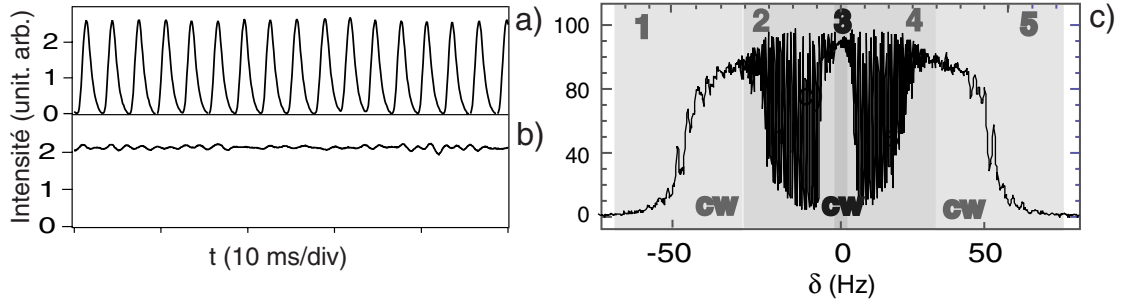


FIG. 1 – Structures macro-temporelles observées sur le LEL de Super-ACO. a) et b) représentent l'évolution de l'enveloppe des impulsions picoseconde dans le cas a) d'un cycle limite, b) d'un régime stationnaire stable. c) Courbe d'accord i. e. intensité laser recueillie avec un photomultiplicateur en fonction de la variation de la fréquence de la cavité RF à 100 MHz.

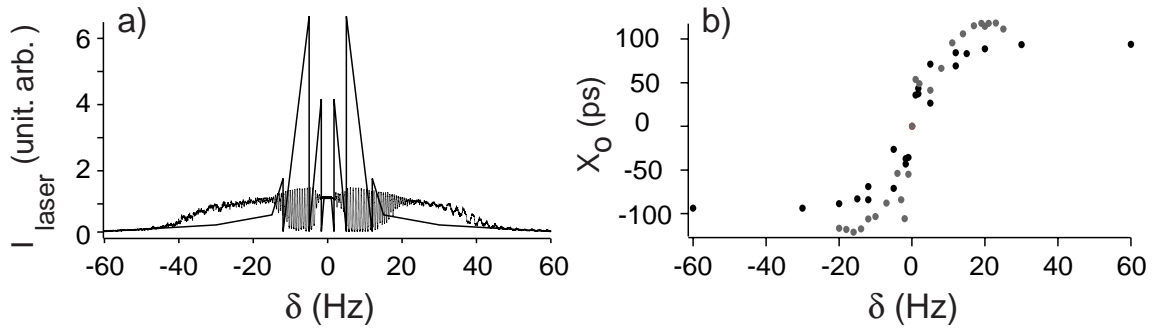


FIG. 2 – a) Courbe de d'accord (i. e. intensité laser recueillie avec un photomultiplicateur en fonction de la variation de la fréquence de la cavité RF à 100 MHz) et b) Position du barycentre de l'impulsion laser en fonction du désaccord. Les courbes expérimentales (grises) sont reproduites par celles données par le modèle itératif (noires). Le maximum d'intensité pour le laser pulsé est différent dans le cas numérique et théorique. Cela provient du détecteur utilisé (Photomultiplicateur) dont le temps de montée diminue la valeur crête.

devient pulsé pour des désaccords compris entre -12/-2 et 2/12 Hz; puis redevient stationnaire stable pour de grands désaccords. L'évolution du barycentre du laser par rapport à celui du paquet suit une fonction de type arctangente (Cf. Figure 2b). Pour de petits désaccords, le barycentre subit une grande variation, par contre pour de grands désaccords, le barycentre adopte un comportement asymptotique.

Ce modèle itératif peut être réécrit sous forme d'équations aux dérivées partielles. Comme la solution de  $y_n(\tau)$  varie lentement avec le nombre de tour  $n$ , les pertes, le gain, et le désaccord sont faibles, cette simplification, qui est souvent utilisée dans le cas d'un laser pulsé (modes bloqués)[16, 17], est possible. De cette façon, le LEL apparaît comme un système spatio-temporel et l'effet du désaccord comme une translation. Ces équations présentent l'avantage de simulations plus rapides. Les différents régimes de la courbe d'accord expérimentale sont reproduits par ce système d'équations aux dérivées partielles. La solution est stationnaire stable, proche de l'accord parfait, et pour de larges désaccords. Entre ces régions, il y a une solution du type cycle limite avec lequel coexiste une solution stationnaire instable. Sous ces conditions, la stabilité du LEL peut être contrôlée.

### 3 Contrôle des zones pulsées

En s'inspirant de travaux déjà réalisés sur le contrôle des lasers[18, 19], la dérivée de l'intensité du laser est choisie comme signal d'entrée de la contre-réaction. L'intensité est mesurée avec un détecteur plus lent que la nanoseconde afin de ne pas résoudre la structure micro-temporelle, et plus rapide que la milliseconde afin de mettre en évidence la structure macro-temporelle. La contre-réaction peut être appliquée sur plusieurs paramètres jouant sur le gain du laser. Les résultats présentés ici sont obtenus avec le désaccord comme paramètre de contrôle. Le désaccord  $\delta$  devient alors une variable dynamique :

$$\delta(t) = \delta_0 + \beta \frac{dI}{dt} \quad (1)$$

Une telle contre-réaction a été testée expérimentalement sur le LEL de Super-ACO [20]. L'intensité  $I(T)$ , mesurée avec un photomultiplicateur, est dérivée analogiquement et amplifiée. La fréquence appliquée à l'anneau de stockage est donc la somme de la valeur fixée (pour laquelle le laser est pulsé) et du signal de sortie de la boucle de contre-réaction données par l'équation 1. Dans ces conditions, le contrôle peut être réalisé en choisissant de manière empirique le gain de la contre-réaction  $\beta$ . La figure 3 illustre une transition typique observée expérimentalement sur le LEL de Super-ACO lorsque le contrôle est actif puis inactif grâce à un interrupteur électronique. La figure 3a montre le régime pulsé du laser qui se stabilise vers un état stationnaire instable. Le signal de contrôle sur la figure 3b, est nul lorsque la contre-réaction est éteinte, puis il se stabilise avec l'intensité du laser. Les fluctuations d'intensité du laser stabilisé sont similaires à celles d'un laser en zone 3.

La figure 4 représente la position du laser (i.e. la position du barycentre de l'impulsion laser par rapport à celui de la distribution longitudinale des paquets d'électrons) mesurée expérimentalement [21] en fonction du désaccord lorsque la contre-réaction est éteinte ou allumée. Pour un désaccord fixé, la position du laser pour une solution stationnaire instable s'écarte de celle mesurée pour une solution de type cycle limite. Cette différence de position diminue à mesure que le désaccord augmente. Cet effet est reproduit par les modèles itératif et continu.

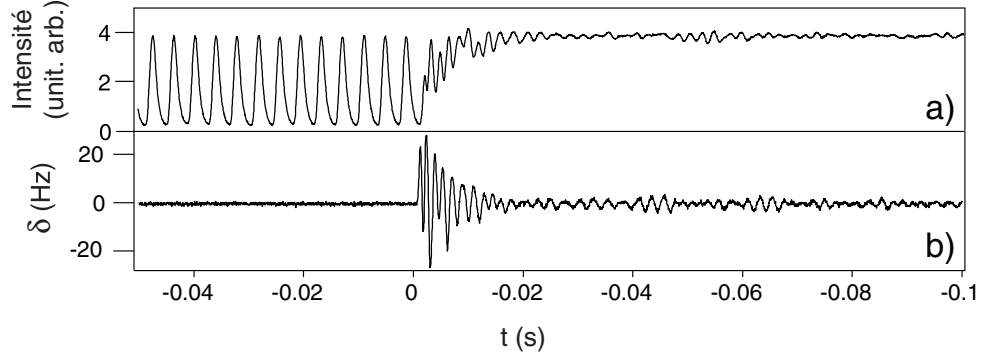


FIG. 3 – a) Intensité du laser en fonction du temps et b) Dérivée analogique amplifiée de l'intensité du laser en fonction du temps. Pour les temps négatifs la contre-réaction était éteinte, et allumée pour les temps positifs.

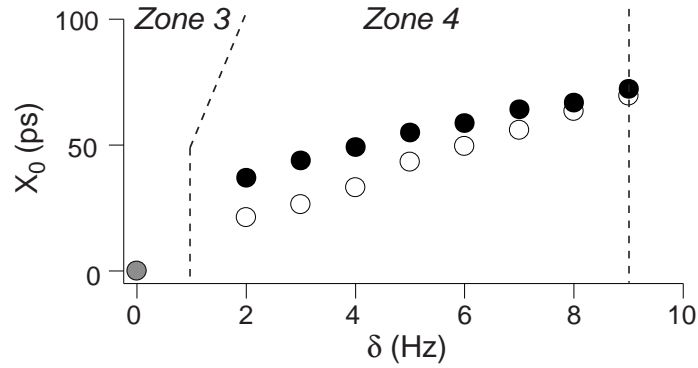


FIG. 4 – Evolution du barycentre de l'impulsion laser en fonction du désaccord lorsque la contre-réaction est ○) éteinte (Régime pulsé, zone 4) ou ●) allumée (régime stationnaire instable (zone 4)). Le point gris correspond à la position du laser à l'accord parfait en zone 3 où son régime est stationnaire stable. Le barycentre de l'impulsion laser correspond alors au barycentre de la distribution longitudinale des électrons.

## 4 Conclusion

La nature déterministe de la dynamique des LEL sur anneaux de stockage permet d'obtenir la suppression des instabilités de type cycle limite en utilisant une contre-réaction. Les modifications nécessaires à apporter aux paramètres de contrôle sont très petites (tendant vers zéro en absence de bruit), car la stabilisation s'effectue sur un état stationnaire déjà existant (sous forme instable) pour le système non contrôlé. Ceci peut être mis à profit pour les expériences d'applications utilisant un LEL (e. g. des expériences pompe sonde), pour lesquelles l'accès à un état stationnaire est primordial. Cette méthode peut être mise en oeuvre sur d'autres LEL implantés sur anneaux de stockage. Des premiers résultats sont d'ores et déjà obtenus sur le LEL européen implanté sur ELETTRA (Trieste, Italie) [6, 22].

## 5 Remerciements

The CERLA est financé par le ministère chargé de la recherche, la région Nord-Pas de Calais et le FEDER.

## Références

- [1] D. A. Jaroszynski et al., Phys. Rev. Lett. **70**, 3412 (1993).
- [2] M. Billardon, D. Garzella, M. E. Couprie, Phys. Rev. Lett. **69**, 2368 (1992).
- [3] H. Hama et al., Nucl. Instr. Meth. A **375**, 32 (1996).
- [4] N. Sei et al., Nucl. Instr. Meth. A **407**, 187 (1998).
- [5] V. N. Litvinenko et al., Nucl. Instr. Meth. A **475**, 240 (2001).
- [6] R. P. Walker et al., Nucl. Instr. Meth. A **475**, 20 (2001).
- [7] G. De Ninno et al., Nucl. Instr. Meth. A **483**, 177 (2002).
- [8] M. Billardon, Phys. Rev. Lett. **65**, 713 (1990).
- [9] C. Bruni, et al., Publication des Rencontres du non linéaire (2004).
- [10] E. Ott et al., Phys. Rev. Lett. **64**, 1196 (1990).
- [11] R. Roy et al., Phys. Rev. Lett. **68**, 1259 (1992).
- [12] JMJ.Madey, Jour. Appl. Phys., **42** (5), 1906-1913 (1971).
- [13] M. E. Couprie et al, Proceedings of EPAC (2000).
- [14] G. De Ninno et al., Phys. Rev. Lett. **92**, 09480 (2004).
- [15] G. De Ninno et al., Eur. Phys. J. D **22**, 269 (2003).
- [16] H. Haus et al., J. Opt. Soc. Am. B **8**, 2068 (1991).
- [17] A. Dunlop et al., Opt. Lett. **21**, 770 (1996).
- [18] S. Bielawski et al., Phys. Rev. A **47**, 3276 (1993).
- [19] N. Joly and S. Bielawski, Opt. Lett. **26**, 692 (2001).
- [20] S. Bielawski et al., accepté dans Phys. Rev. E. Rapid communication.
- [21] R. Roux et al., Nucl. Instr. Meth. A **393**, 37 (1997).
- [22] C. Bruni et al., To be published in the proceedings of EPAC (2004).

## Transition vers la turbulence de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz dans une colonne de plasma magnétisé

F. Brochard, G. Bonhomme et E. Gravier

*LPMIA, Université Henri Poincaré,  
BP 239 - 54506 Vandoeuvre-lès-Nancy cedex  
frederic.brochard@lpmi.uhp-nancy.fr*

### Résumé

Nous nous sommes intéressés aux instabilités basse fréquence qui surviennent dans les plasmas magnétisés du fait de l'existence de gradients transverses au champ magnétique. Après avoir montré que l'augmentation de la valeur du champ magnétique permet d'observer sous certaines conditions trois régimes réguliers dominés chacun par une instabilité différente, nous avons entrepris l'étude de la transition vers le chaos et la turbulence pour chacune de ces instabilités. Dans cette étude, nous nous concentrons sur la caractérisation de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz et sa transition vers la turbulence. Nous montrons en particulier que la bifurcation fait intervenir l'interaction entre deux modes d'oscillation de fréquences incommensurables, selon un scénario similaire à celui déjà observé pour les ondes de dérive.

## 1 Introduction

Dans les plasmas magnétisés confinés, il existe des instabilités universelles appelées ondes de dérive pouvant conduire à des régimes de chaos spatio-temporel [1]. Le contrôle de ce chaos [2] ouvrirait en particulier des perspectives à long terme sur le contrôle du transport turbulent non diffusif, responsable des pertes de particules et d'énergie en travers des lignes de champ magnétique dans les réacteurs à fusion.

Des travaux récents ont montré qu'il était possible sous certaines conditions de mettre également en évidence deux autres types d'instabilités au sein du même dispositif expérimental, en jouant sur le cisaillement de vitesse azimutale : l'instabilité de Kelvin-Helmholtz [3] et celle de Rayleigh-Taylor [4, 5]. Afin de mieux comprendre le transport turbulent et de pouvoir améliorer l'efficacité des dispositifs actuels de contrôle, il était intéressant d'étudier la transition vers le chaos et la turbulence de ces instabilités.

Après avoir présenté dans un premier temps les éléments qui nous permettent de caractériser l'instabilité de Kelvin-Helmholtz, nous montrons que sa transition vers la turbulence suit une route de type Ruelle-Takens-Newhouse dans laquelle un régime quasi-périodique est engendré par l'interaction de deux modes de fréquences incommensurables. Nous montrerons enfin que ce comportement peut être décrit à partir d'un oscillateur de van der Pol incluant un terme de forçage.

## 2 Observation des instabilités

### 2.1 Dispositif expérimental

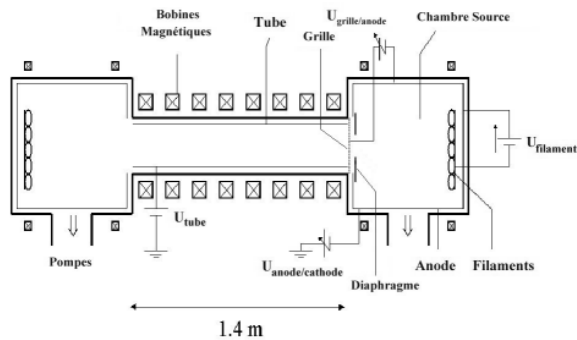
Les expériences sont menées dans le dispositif expérimental MIRABELLE (Fig.1(a)) [6], en plasma d'argon. Les principaux paramètres de contrôle sont d'une part l'intensité du

champ magnétique et d'autre part différentes polarisations incluant la tension de décharge. Les mesures sont effectuées au moyen de sondes de Langmuir dans la partie centrale de la machine, de section cylindrique. Il y règne un champ magnétique uniforme, dirigé le long de l'axe, dont l'intensité peut être ajustée de 0 à 120 mT. Dans cette étude, le diamètre de la colonne de plasma est réduit de moitié par l'ajout d'un diaphragme entre la chambre source et la section centrale de la machine. Ce diaphragme joue ici un rôle essentiel, puisqu'en raidissant les profils de densité et de potentiel plasma il provoque le cisaillement de vitesse à l'origine de l'apparition de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz.

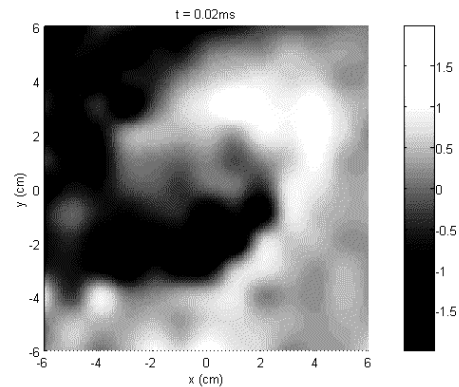
## 2.2 Les instabilités rencontrées

Le confinement d'un plasma par un champ magnétique s'accompagne nécessairement de l'existence d'un gradient transverse de pression. Les conditions sont dès lors réunies pour provoquer l'apparition d'ondes de dérive, ces fluctuations de basse fréquence des densités électronique et ionique qui puisent leur énergie dans de tels gradients (elles sont l'analogue des ondes de Rossby dans les écoulements géostrophiques). Dans une configuration cylindrique où les gradients sont radiaux et le champ magnétique dirigé le long de l'axe, la propagation des ondes de dérive est essentiellement azimutale. Cette propagation azimutale s'effectue à une vitesse proportionnelle à  $\nabla n_e / B$ , où  $n_e$  est la densité électronique et  $B$  l'intensité du champ magnétique.

L'existence d'un champ électrique radial à l'équilibre  $E(r)$  induit une dérive du plasma également dans la direction azimutale, à la vitesse  $E(r)/B$  appelée vitesse de dérive électrique. Cette rotation peut avoir pour effet un simple décalage Doppler de la fréquence des fluctuations, mais peut aussi conduire à l'apparition de nouvelles instabilités semblables à celles rencontrées en hydrodynamique. Une instabilité de Rayleigh-Taylor peut ainsi apparaître, la force centrifuge jouant le rôle du champ de pesanteur, à la condition que la région interne du plasma, plus dense, tourne au moins à la même vitesse que la région externe moins dense. L'existence d'un cisaillement de vitesse peut également conduire à l'apparition d'une instabilité de type Kelvin-Helmholtz [3]. Dans ces deux cas de figure, la propagation de l'instabilité est purement azimutale, et sa vitesse de phase de l'ordre de la vitesse de dérive électrique.



(a) La machine à plasma MIRABELLE



(b) Fluctuations de potentiel flottant, montrant un mode azimutal  $m=1$

FIG. 1 – Dispositif expérimental et observation des fluctuations dans une section droite de la colonne



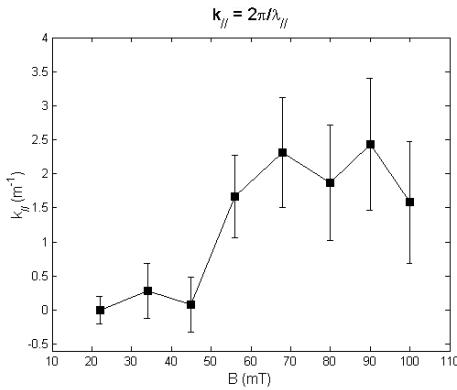
### 2.3 Caractérisation de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz

Afin de minimiser la part d'incertitude liée à des mesures parfois difficiles, un grand nombre de critères sont pris en compte pour parvenir à identifier de façon certaine chacune de ces instabilités. Les données expérimentales sont confrontées aux critères théoriques de Jassby [7] qui sont résumés dans le tableau 1.

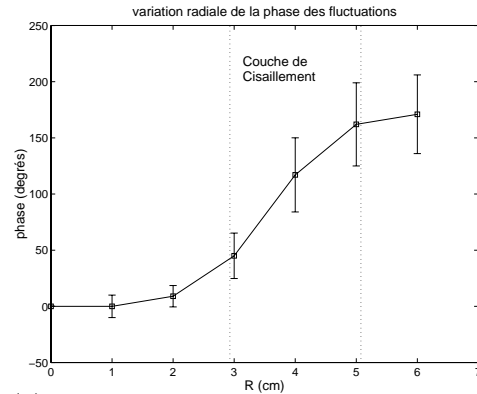
L'analyse des résultats révèle que les trois types d'instabilités peuvent être observés dans notre dispositif, en fonction de l'intensité du champ magnétique [4,5]. Pour de faibles valeurs de ce champ (colonne de droite), toutes les données concourent à indiquer la présence d'une instabilité de Kelvin-Helmholtz. Pour de grandes valeurs de champ magnétique, les enregistrements indiquent au contraire que le régime de plasma est dominé par les ondes de dérive, tandis que des instabilités de Rayleigh-Taylor sont enregistrées pour des valeurs intermédiaires. La variation du nombre d'onde axiale en fonction de l'intensité du champ magnétique illustre bien cette évolution (Fig. 2(a)). La variation radiale de la phase des fluctuations de potentiel flottant à bas champ constitue par ailleurs à elle seule un bon indice de la présence d'une instabilité de Kelvin-Helmholtz (Fig. 2(b)).

Paramètres	Ondes de dérive	Rayleigh-Taylor	Kelvin-Helmholtz	Données expérimentales (KH)
$k_{\parallel}$	$\sim \frac{1}{L}$	0	0	0
vitesse de propagation	$\frac{V_{De}}{\sigma} \pm \frac{E}{B}$	$\frac{E}{B}$	0.2 à 0.6 $\frac{E}{B}$	$0.6 \frac{E}{B} = 650m/s$
variation radiale locale de la phase	$< \pi/4$	$\pi/4$ à $\pi/2$	$\pi/2$ à $\pi$	$\gtrsim \pi/2$
localisation	$\text{Max}(\omega_{De})$	$\text{Max}(\omega_E)$	$\text{Max}(\frac{dn}{rdr})$	$r = 3cm$
$ \frac{e\phi}{kT_e} _{Max}$	1	1	$\gg 1$	4
$ \frac{e\phi}{kT_e} / \frac{\tilde{n}}{n} $	$\gtrsim 1$	$\lesssim 1$	$\gg 1$	11

Tab. 1 - Identification des instabilités. On note  $k_{\parallel}$  : nombre d'onde axial;  $\phi$  : potentiel plasma;  $n$  : densité électronique;  $T_e$  : température électronique;  $K$  : constante de Boltzmann;  $e$  : charge de l'électron;  $V_{De}$  : vitesse diamagnétique électronique.



(a) évolution du nombre d'onde parallèle en fonction du champ magnétique



(b) Variation radiale de la phase des fluctuations à bas champ ( $B = 22mT$ )

FIG. 2 – Caractérisation de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz

### 3 Transition vers le chaos et la turbulence pour l'instabilité de Kelvin-Helmholtz

Pour mener cette étude, nous travaillons à de faibles valeurs du champ magnétique, dans des régimes où la présence d'une instabilité de Kelvin-Helmholtz est garantie par la vérification de l'ensemble des critères présentés dans le tableau 1 (cf. colonne de droite). La tension de décharge anode/cathode est utilisée comme paramètre de contrôle lors de la transition vers la turbulence. Dans la situation de départ, le signal enregistré en  $r = 3\text{cm}$  est périodique (Fig.3(a)). L'analyse de Fourier montre un pic à la fréquence  $f_1 = 5.6\text{kHz}$  correspondant à un mode azimutal  $m = 1$  (Fig.3(b)). Cette même analyse effectuée à plus grand rayon, de l'autre côté de la couche de cisaillement, révèle toutefois à côté du premier harmonique de ce mode  $m = 1$  la présence d'un pic à la fréquence  $f_2 = 2*f_1 + \delta f$  attribué à un mode azimutal  $m = 2$ . Les figures 3(c-d) représentent le portrait de phase et la section de Poincaré associée. On diminue alors légèrement la valeur du paramètre de contrôle. Une modulation périodique de l'amplitude du signal apparaît, d'abord à l'extérieur de la couche de cisaillement, puis à l'intérieur à mesure que l'on diminue la valeur du paramètre de contrôle (Fig.3(e)). Le spectre de Fourier prend dans ce cas une forme en triangle rectangle caractéristique du phénomène de *periodic pulling* ou entraînement imparfait périodique (Fig.3(f)) [8]. Le portrait de phase révèle un tore  $T^2$  typique d'un régime quasi-périodique (Fig.3(g-h)). Si on diminue encore la valeur du paramètre de contrôle, le système évolue ensuite rapidement vers un état fortement turbulent (Fig.3(i-l)). Pour

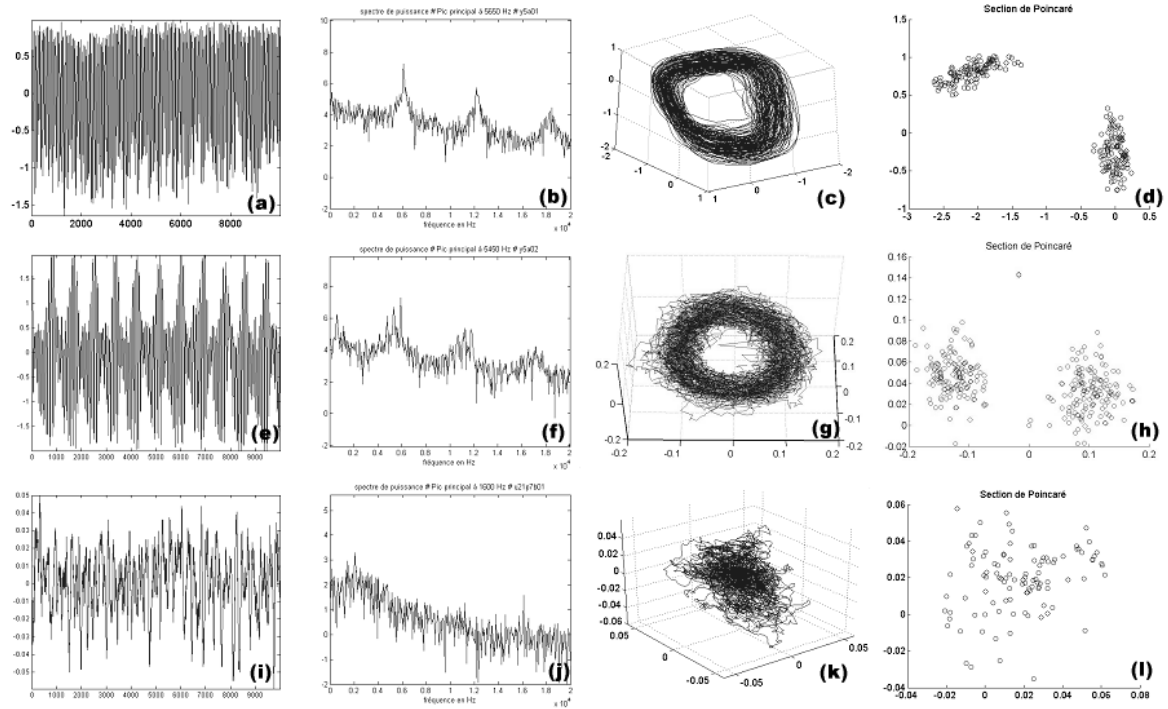


FIG. 3 – Visualisation de la transition vers la turbulence : de gauche à droite, signal, transformée de Fourier, portrait de phase et section de Poincaré pour les régimes périodique (a-d), quasi-périodique (e-h) et turbulent (i-l), en  $r = 3\text{ cm}$

accéder à la dynamique temps-fréquence du régime quasi-périodique, on procède à une transformée en ondelettes du signal représenté sur la figure 3(e). L'évolution temporelle

de la fréquence du signal montre clairement un phénomène de glissement périodique entre les deux fréquences  $f_1$  et  $f_2$  (Fig.4). Plus précisément, on assiste à un entraînement du mode azimutal  $m=1$  de fréquence  $f_1$  par le mode de fréquence  $f_2$  de structure azimutale supposée  $m = 2$ . L'entraînement n'est toutefois pas total puisqu'il n'aboutit pas à une synchronisation. Au contraire, cet entraînement s'interrompt périodiquement, ce que l'on peut expliquer par une amplitude insuffisante du mode exciteur, ou par un écart trop important entre les fréquences  $f_1$  et  $f_2$ . En-deçà d'une certaine valeur du paramètre de contrôle, cette interaction non-linéaire provoque un élargissement du spectre et la perte du régime de quasi-périodicité au profit d'un régime turbulent.

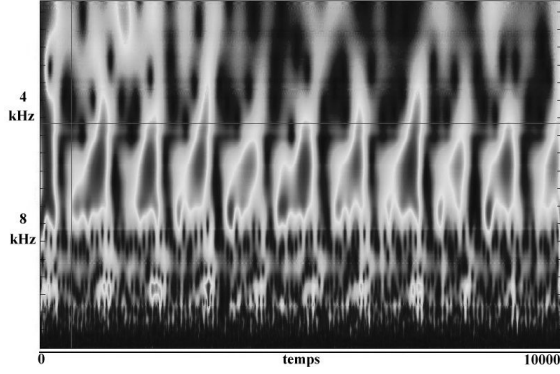


Fig.4 - Evolution temporelle de la fréquence du signal quasi-périodique

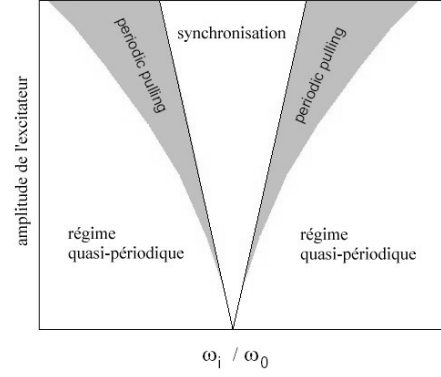


Fig.5 - Schéma d'une langue d'Arnold

## 4 Comparaison avec un oscillateur de van der Pol

Afin de modéliser notre système, nous nous intéressons à l'oscillateur de van der Pol en régime forcé [9], qui permet de reproduire relativement simplement un grand nombre de phénomènes non linéaires rencontrés dans les plasmas, comme la synchronisation, le *periodic pulling*, l'intermittence et le chaos. Mathématiquement, l'équation de van der Pol en régime forcé s'écrit sous la forme suivante :

$$\ddot{x} + \epsilon(\beta x^2 - 1)\omega_0 \dot{x} + \omega_0^2 x = A_0 \cos(\omega_{ex} t)$$

Le terme de droite est un terme de forçage qui s'oppose au terme de friction (second terme). En l'absence de forçage, ce terme non-linéaire conduit à un cycle limite stable. L'interaction non linéaire entre l'excitateur et le système excité enrichit la dynamique. Pour une valeur donnée de l'amplitude de forçage  $A_0$ , il existe des gammes de fréquence d'excitation  $\omega_{ex}/2\pi$  pour lesquelles la réponse du système va consister en un entraînement ou une synchronisation, ce que l'on peut représenter sur un schéma en 'langue d'Arnold' (Fig.5). En résolvant cette équation pour des paramètres en bon accord avec les données expérimentales, on obtient une solution présentant les mêmes battements que le signal expérimental et dont le spectre de Fourier est comparable (Fig.6(a)). Le résultat de la transformée en ondelettes de cette solution est lui aussi très proche de ce que l'on obtient pour les signaux expérimentaux, ce qui nous conforte dans notre interprétation (Fig.6(b)).

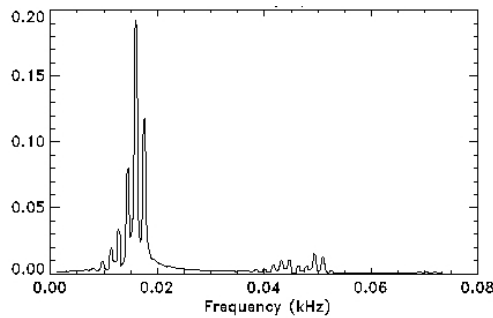


Fig. 6(a) -Spectre de Fourier de l'oscillateur de van der Pol

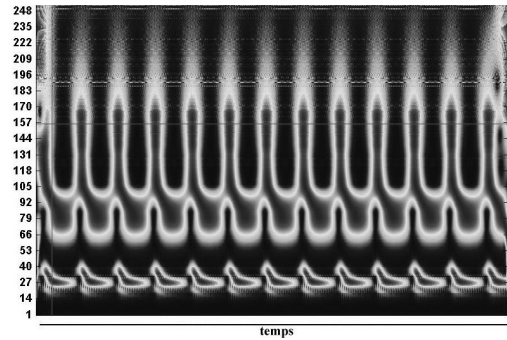


Fig. 6(b) -Evolution temporelle de la fréquence d'un oscillateur de van der Pol

## 5 Conclusion

Une caractérisation précise des différentes instabilités se développant dans notre plasma nous permet de nous pencher sur l'étude de leur transition vers le chaos et la turbulence. Nous avons ainsi pu démontrer pour l'instabilité de Kelvin-Helmholtz l'existence d'un scénario de bifurcation reposant sur l'interaction non linéaire entre deux modes de fréquences incommensurables. L'un des deux modes subit une synchronisation imparfaite de la part de l'autre, ce qui entraîne un élargissement du spectre et conduit finalement à la turbulence. La nature spatio-temporelle de ce chaos, bien que pressentie, reste à démontrer, et fera l'objet de mesures dans les prochaines semaines. Ce travail se poursuit également par l'étude de la transition vers la turbulence pour l'instabilité de Rayleigh-Taylor.

## Références

- [1] T. Klinger et al., *Route to drift wave chaos and turbulence in a bounded low- $\beta$  plasma experiment*, Phys. Rev. Lett., **79**, 20 (1997).
- [2] C. Schröder T. Klinger, D. Block, A. Piel, G. Bonhomme, V. Naulin, *Mode selective control of drift wave turbulence*, Phys. Rev. Lett., **86**, 25 (2001).
- [3] F. W. Perkins & D. L. Jassby, *Velocity shear and low-frequency plasma instabilities*, Phys. Fluids, **14**, 1, (1971).
- [4] E. Gravier, F. Brochard, G. Bonhomme, T. Pierre, J.L. Briançon, *Low frequency instabilities in a laboratory magnetized plasma column*, Physics of plasmas, **11**,2 (2004).
- [5] F. Brochard, G. Bonhomme, E. Gravier, *Instabilités basse fréquence dans une colonne de plasma magnétisé de laboratoire*, 4ème colloque Chaos temporel et Chaos spatio-temporel, Rouen, 15-16 décembre 2003.
- [6] T. Pierre, G. Leclert, F. Braun, *Magnetized double-plasma device for wave studies*, Rev. Sci. Instrum. **58** (1), 1987, 6-11.
- [7] D.L. Jassby, *Transverse velocity shear instabilities within a magnetically confined plasma*, Phys. Fluids, **15** (9), 1590 (1972).
- [8] M. Koepke et al., *Periodic nonlinear wave-wave interaction in a plasma discharge with no external oscillatory driving force*, Phys. Plasmas, **3**, 12 (1996).
- [9] B. van der Pol, *Forced oscillations in a circuit with non-linear resistance*, Phil. Mag. S. **7** 3, 13, 65-80 (1927).

## Caractérisation du chaos temporel généré sur un oscillateur forcé de type Laser à Electrons libres

C. Bruni<sup>1</sup>, D. Garzella<sup>1,2</sup>, G. L. Orlandi<sup>1,2</sup>, M. E. Couprie<sup>1,2</sup>

1) CEA/DSM/DRECAM/SPAM, Batiment 522, 91191 Gif-sur-Yvette, France.

2) Laboratoire pour l'Utilisation du Rayonnement Electromagnétique,  
Bâtiment 209D, Université Paris Sud, BP34, 91898 Orsay CEDEX, France.  
christelle.bruni@lure.u-psud.fr

### Résumé

Sous certaines perturbations, un Laser à Electrons Libres (LEL) basé sur un anneau de stockage peut osciller naturellement à sa fréquence de résonance. Lorsque le gain du laser est modulé de façon non linéaire, le LEL présente soit des pulsations périodiques à la fréquence de la modulation, ainsi qu'à ses harmoniques, soit un régime chaotique. Une première analyse des séries temporelles expérimentales met en évidence la sensibilité aux conditions initiales, et permet ainsi de déduire un exposant maximum de Lyapunov positif caractéristique du chaos déterministe. Afin de représenter les attracteurs de ces différents régimes, la dimension de plongement est calculée. Les séries temporelles prises dans différentes conditions de modulation sont comparées avec un code numérique basé sur un système de deux équations différentielles couplées et normalisées. Les séquences ainsi obtenues par fréquence de modulation sont en accord expérimentalement et théoriquement sur le LEL de Super-ACO (Orsay, France).

## 1 Introduction

La dynamique d'un Laser à Electrons libres se manifeste sur plusieurs échelles de temps (Cf. Tableau 1). Une perturbation avec un temps caractéristique de l'ordre de celui du temps de montée du laser peut empêcher le laser de démarrer. Les oscillations synchrotron cohérentes [1] modifient le gain du laser sur une échelle de temps de l'ordre de son temps de montée et peut affecter sa stabilité. Le LEL est aussi sensible aux perturbations dont la fréquence est proche de la fréquence de résonance naturelle du laser  $f_r$ . Une modulation du gain du laser avec une fréquence proche de  $f_r$  permet de mettre en évidence la dynamique chaotique du laser. Les premières analyses réalisées pour le chaos sur les LEL basé sur les anneaux de stockage ACO et Super-ACO montrent que le laser suit les lois du chaos déterministe [2]. Les études théoriques et expérimentales du LEL de Super-ACO en réponse à une modulation du désaccord ont été réalisées [3, 4, 5, 6]. D'autres investigations théoriques avec un simple modèle ont permis de déterminer les exposants de Lyapunov du système [4]. D'abord, la modulation expérimentale du gain ainsi que les variables mesurables du laser sont décrites. Ensuite, le caractère déterministe du système est mis en évidence sur le LEL de Super-ACO. Enfin, les régimes chaotiques du laser sont représentés grâce aux portraits de phase dans l'espace relatif à la dimension de plongement calculée.

Temps de montée	10-60 $\mu$ s
Oscillation synchrotron cohérentes	35-70 $\mu$ s
Fréquence de résonance	2-5 ms

TAB. 1 – *Temps caractéristiques de la dynamique du LEL de Super-ACO*

## 2 Dispositif expérimental

### 2.1 La modulation du gain

Le LEL de Super-ACO peut présenter une réponse chaotique à une modulation non linéaire de son gain. Le gain dépend du désaccord entre la fréquence de passage des électrons dans le milieu amplificateur (e.g. un onduleur) et la fréquence d’aller-retour de l’onde lumineuse dans la cavité optique. Pour une distribution gaussienne longitudinale des paquets dans un anneau de stockage, le désaccord et le gain sont reliés par la relation suivante :  $G(\tau) = g_0 \exp \frac{-(\tau+\delta)^2}{\sigma_\tau^2}$ ,  $G$  étant le gain du laser,  $\tau$  la coordonnée longitudinale,  $g_0$  le gain initial du laser,  $\delta$  le désaccord,  $\sigma_\tau$  la largeur rms de la distribution longitudinale des paquets d’électrons. Une modulation sinusoïdale du désaccord mène à une variation non linéaire du gain du laser en fonction du temps :  $\delta(t) = A \cos(2\pi f t) + B$ ,  $A$  et  $f$  étant respectivement l’amplitude et la fréquence de la modulation, et  $B$  une constante. Généralement, la modulation est appliquée sur un laser proche de l’accord parfait ( $B = 0$ ). Le désaccord est appliqué expérimentalement sur le LEL de Super-ACO en changeant la fréquence de la cavité Radio-Fréquence (RF) à 100 MHz.

### 2.2 Variables accessibles expérimentalement

L’intensité du laser  $I(t)$  est mesurée avec un photomultiplicateur.  $X(t)$ , le barycentre de l’impulsion laser par rapport à celui de la distribution longitudinale des électrons, est mesuré en utilisant une contre-réaction en boucle ouverte [5]. Elle compare la position  $X(t)$  par rapport à la position à l’accord parfait et compense cette différence en variant la fréquence de la cavité RF.  $I(t)$  et  $X(t)$  qui composent les séries temporelles, sont enregistrées grâce à un oscilloscope (Lecroy, LT264M, 350 MHz, 1 GS/s) et échantillonnées à 50000 points sur 2 secondes (Cf. Figure 1a,b). L’analyse d’images prises par une caméra à double balayage de fente (Hamamatsu C5680) [6] sur une échelle de temps maximum de 1 seconde (Cf. Figure 1c,d).

## 3 Chaos déterministe

### 3.1 Séries temporelles et spectres en fréquences

Pour un régime chaotique (Cf. Figure 1b), l’intensité du laser n’est plus périodique et le maximum des macro-impulsions varie contrairement à un régime périodique (Cf. Figure 1a). Sur la figure 1a, le maximum de l’intensité des macro-impulsions  $I_{max}$  fluctue d’environ 10%, et son minimum  $I_{min}$  est toujours nul. D’autre part, sur la figure 1b,  $I_{max}$  varie d’environ 35%, et  $I_{min}$  de 60%. Ces comportements (apériodicité et fluctuations d’intensité) sont caractéristiques d’un régime chaotique.

L’apériodicité d’une série temporelle peut être mieux analysée dans l’espace de Fourier. La figure 1TFb montre que le spectre en fréquence se soulève pour un régime chaotique [7], comparé à celui d’un régime de type cycle limite (Cf. Figure 1TFa). Comme le

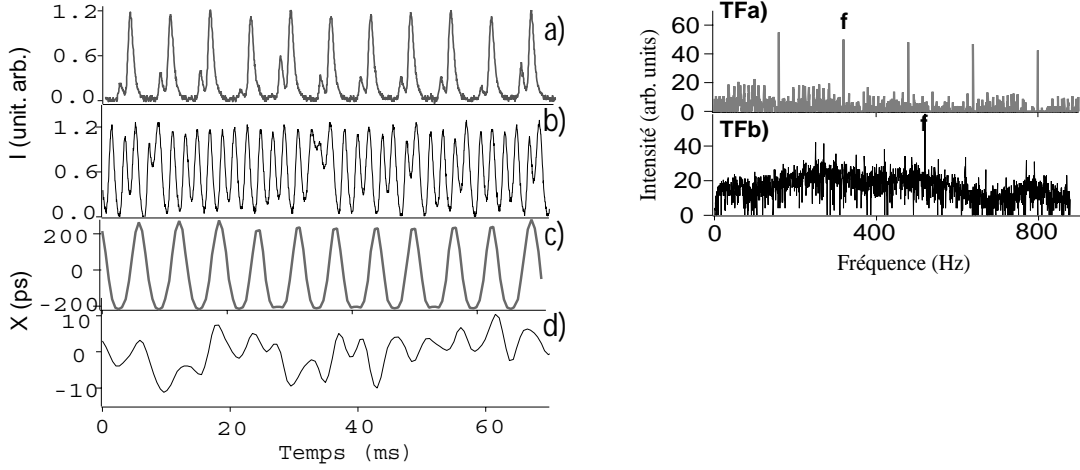


FIG. 1 – a) régime périodique de type  $2T$ ,  $f=320$  Hz,  $A=100$  Hz, b) Régime chaotique,  $f=520$  Hz,  $A=10$  Hz : enregistrement de  $I(t)$  avec un oscilloscope, c)  $f=320$  Hz,  $A=100$  Hz, d)  $f=520$  Hz,  $A=10$  Hz ;  $X(t)$  est obtenu avec l'analyse des images prises par une caméra à double balayage de fente. Transformée de Fourier des figures TFa) 1a, TFb) 1b.

chaos est engendré grâce à une modulation, la fréquence de la modulation domine et des sous-harmoniques peuvent apparaître. Des séquences, où la fréquence de la modulation est fixée et l'amplitude est augmentée, ont été réalisées. Elles montrent que le chaos apparaît plus souvent pour une fréquence proche de la fréquence de résonance (300-500 Hz). Par exemple pour une fréquence de 320 Hz, la séquence est : 1T-Chaos-3T-Chaos-2T; et pour  $f=520$  Hz : 1T-Chaos-2T-Chaos-1T. Les différents régimes ont été mis en évidence par l'analyse des séries temporelles à l'aide des spectres en fréquence, des coefficients maximum de Lyapunov et des portraits de phase [4, 5, 6].

### 3.2 Coefficient de Lyapunov maximum

La figure 3a présente trois séries temporelles en intensité, pour lesquelles les macro-impulsions (représentées dans les cadres) sont identiques, puis elles diffèrent à la fois en période et en intensité. Ceci illustre la croissance exponentielle dans le temps de trajectoires voisines. Différents modèles numériques existent pour obtenir le coefficient de Lyapunov maximum d'une série temporelle. La figure 3b, déduite d'une méthode décrite dans la référence [8, 10], représente la croissance exponentielle dans le temps de trajectoires voisines. Elle est caractérisée par une croissance linéaire dans le temps, dont la pente est le coefficient maximum de Lyapunov de 3.38/ms. Cet exposant positif, estimé d'une série temporelle du LEL de Super-ACO, est une signature de la nature déterministe du chaos.

## 4 Représentation dans l'espace des phases

### 4.1 Le modèle LAS

Le modèle numérique LAS [9] reproduit l'amplification de l'onde lumineuse et le phénomène de saturation du LEL passage par passage dans le milieu amplificateur. L'effet laser conduit à une augmentation de la dispersion en énergie des paquet, c'est-à-dire la

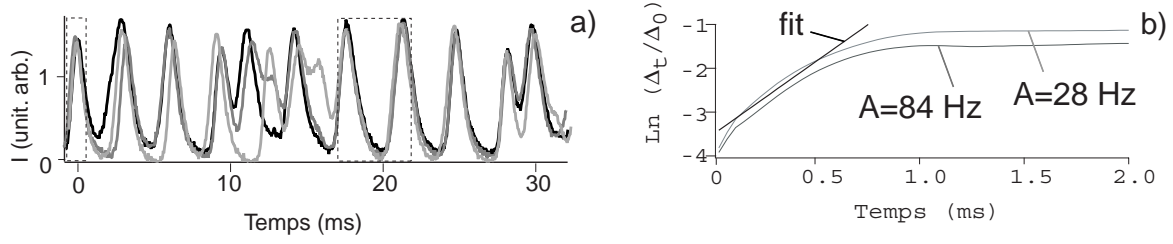


FIG. 2 – a) *Intensité du laser en fonction du temps  $I(t)$  mesurée avec un photomultiplicateur, pour trois trajectoires dont les conditions initiales sont proches.  $f=320$  Hz,  $A=198$  Hz. b) Calcul de  $\ln(\frac{\Delta_t}{\Delta_0})$  en fonction du temps pour des séries expérimentales avec  $f=320$  Hz. Le code numérique utilisé est décrit dans la référence [9]. L'ajustement est réalisé sur la partie linéaire de la courbe.*

largeur rms de la distribution en énergie des électrons. Le modèle est basé sur l'évolution de la distribution en intensité du laser, et de la dispersion en énergie :

$$y_n(\tau) = (1 - P)y_{n-1}(\tau)[1 + g_0(\frac{P}{g_0})^{\Sigma_n} e^{\frac{-(\tau+\delta)^2}{2\sigma_\tau^2}}] + i_s e^{\frac{-(\tau+\delta)^2}{2\sigma_\tau^2}} \quad (1)$$

$$\Sigma_n = \Sigma_{n-1} - \frac{2T_0}{\tau_s}[\Sigma_{n-1} - \int y_{n-1}(\tau)d\tau] \quad (2)$$

avec

$$\Sigma_n = \frac{\sigma_{\gamma n}^2 - \sigma_{\gamma 0}^2}{\sigma_{\gamma e}^2 - \sigma_{\gamma 0}^2} \quad (3)$$

$y_n$  étant la distribution en intensité du laser selon la coordonnée longitudinale  $\tau$ ,  $n$  le nombre de passage dans la cavité optique,  $P$  les pertes de la cavité optique,  $g_0$  le gain initial du laser,  $\Sigma$  la dispersion en énergie normalisée,  $T_0$  la fréquence de passage des électrons dans le milieu amplificateur,  $\tau_s$  le temps d'amortissement synchrotron,  $\sigma_{\gamma n}$  la dispersion en énergie au passage  $n$ ,  $\sigma_{\gamma 0}$  à l'instant initial et  $\sigma_{\gamma e}$  à l'équilibre.

Une troisième équation couplée de la modulation du désaccord est ajoutée. L'espace des phases théorique est donc trois. Sur une échelle de temps de l'ordre de la seconde, il est possible d'accéder expérimentalement à l'espace à deux dimensions formé par  $I(t)$  et  $\delta(t)$ , mais pas directement à la troisième variable donnée par la dispersion en énergie. L'intensité du laser et la position sont déduits de la méthode des moments.  $I(t)$  étant le moment d'ordre 0 de  $y_n(\tau)$ , et la position le moment d'ordre 1.

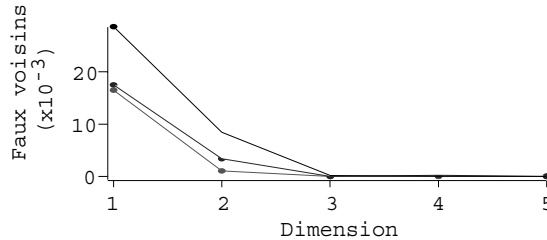


FIG. 3 – *Nombre de faux voisins en fonction de la dimension pour trois séries expérimentales d'intensité laser  $I(t)$  pour  $f=320$  Hz.*



## 4.2 Portraits de phase

L'espace des phases expérimentales est reconstruit à partir des coordonnées retardées [11]. L'espace des phases est donnée par les coordonnées indépendantes  $[I(t), I(t+\delta\tau), I(t+2\delta\tau), \dots, I(t+m\delta\tau)]$ , où  $(m-1)$  est appelé dimension de plongement, et  $\delta\tau$  le retard. Pour une meilleure représentation des portraits de phases, la fonction d'auto corrélation d'une série temporelle est calculée [12]. Pour de grandes fonctions d'auto corrélation,  $I(t+\delta\tau)$  peut être déduit de  $I(t)$ , et les coordonnées sont indépendantes lorsque la fonction d'auto corrélation est faible.

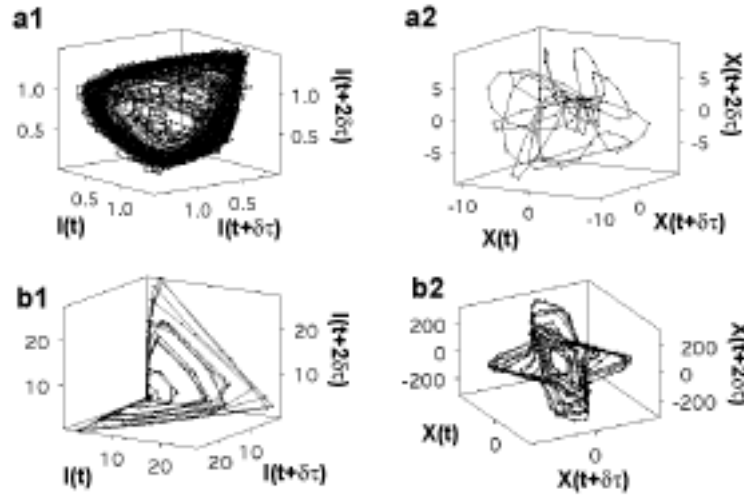


FIG. 4 – Portrait de phase pour  $f=520$  Hz, a)  $A=10$  Hz, expérimental a1)  $I(t)$ ,  $\delta\tau=0.64$  ms, a2)  $X(t)$ ,  $\delta\tau=6.9$  ms b)  $A=70$  Hz, théorique b1)  $I(t)$ ,  $\delta\tau=0.12$  ms, b2)  $X(t)$ ,  $\delta\tau=0.48$  ms. Conditions :  $\tau_s=9$  ms,  $P=0.5\%$ ,  $g_0=2\%$ ,  $T_0=120$  ns,  $\sigma_{\gamma 0}=6.5 \cdot 10^{-4}$ ,  $\sigma_{\gamma e}=14.2 \cdot 10^{-4}$ .

La dimension de l'espace des phases d'une série temporelle peut être obtenue par la méthode des faux voisins [13]. Le nombre de faux voisins chute vers zéro pour la dimension de plongement de la série temporelle. La figure 3 montre que la dimension de plongement pour le LEL de Super-ACO est trois :  $I(t), I(t+\delta\tau), I(t+2\delta\tau)$ . Après avoir calculé les retards, il est possible de reconstruire les portraits de phases avec la dimension de plongement appropriée. La figure 3 compare les portraits de phases théoriques et expérimentaux de l'intensité du laser  $I(t)$ , et de la position du barycentre du laser  $X(t)$ . L'allure de la surface obtenue sur la figure 4a1 évoque celle d'une huître. Le portrait de phase a été réalisé en utilisant une série temporelle enregistrée par un oscilloscope digital (50000 échantillons sur 2 secondes). Le caractère topologique d'un régime chaotique est vérifié : la surface [7] n'emplit pas tout l'espace. L'attracteur théorique de la figure 4b1, reconstruit avec 16500 points sur 60 ms, est en accord avec l'attracteur expérimental (Cf. Figure 4a1), présentant aussi une surface en forme d'huître. L'attracteur théorique de la position  $X(t)$  ressemble à une étoile symétrique avec quatre branches. La surface n'est pas totalement remplie à cause du nombre d'itérations utilisé (16500 points sur 60 ms), qui est un compromis avec le temps de calcul. L'attracteur expérimental associé sur la figure 4a2 est limité par le nombre de points de la série temporelle obtenue grâce à une caméra à double balayage de fente (128 points sur 70 ms). Il semble correspondre qualitativement à la figure 4b2, même

si le nombre de points rend l'analyse imprécise. Les portraits de phase des séries temporelles théoriques sont en accord qualitatif avec les portraits de phases expérimentaux. Le modèle LAS reproduit la dynamique longitudinale en fonction du désaccord, observée à Super-ACO.

## 5 Conclusion

De l'analyse brute des séries temporelles, il résulte que le LEL tend vers un comportement chaotique. L'accord entre la dimension de plongement et la dimension théorique de l'espace des phase montre que les séries temporelles ne sont pas trop bruitées. Le calcul des coefficients de Lyapunov maximum confirme le fait que le LEL suit une dynamique déterministe. Le modèle LAS reproduit bien les portraits de phase expérimentaux. Le caractère déterministe implique que des systèmes de contrôle [14] peuvent être appliqués sur un tel laser. Ceci a permis de contrôler les zones pulsées présentes sur la courbe d'accord [15, 19]. Les portraits de phase vont aussi être étudiés sous une approche topologique [20].

## Références

- [1] M. E. Couprie et al., Nucl. Instr. and Meth. A **429**, 165 (1999).
- [2] M. Billardon, Phys. Rev. Lett. **65**, 713 (1990).
- [3] G. De Ninno et al., Eur. Phys. J. D **22**, 269 (2003).
- [4] C. Bruni et al., To be published in Nucl. Instr. and Meth. A.
- [5] C. Bruni et al., Rencontres du non linéaire (2003).
- [6] C. Bruni et al., Rencontres du non linéaire (2002).
- [7] W. Wang et al., Phys. Rev. E **51**, 653 (1995).
- [8] M. E. Couprie et al., Nucl. Instr. and Meth. A **258**, 374 (1995).
- [9] R. Roux et al., Nucl. Instr. and Meth. A **393**, 33 (1997).
- [10] D. Dangoisse et al., Phys. Rev. A **36**, 4775 (1987).
- [11] G. Benettin et al., Phys. Rev. A **14**, 2338 (1976).
- [12] H. Kantz et T. Schreiber, Cambridge University Press, Cambridge (1997).
- [13] H. Kantz, Phys. Rev. A **185**, 77 (1994).
- [14] J. D. Farmer, Physica **4D**, 336 (1982).
- [15] P. Grassberger, et al., Int. J. Bifurcation and Chaos **1**, 521 (1991).
- [16] M. B. Kennel, et al., Phys. Rev. A **45**, 3403 (1992).
- [17] E. Ott et al., Phys. Rev. Lett. **64**, 1196 (1990).
- [18] S. Bielawski et al., accepté dans Phys. Rev. E. Rapid communication.
- [19] G. De Ninno et al., Phys. Rev. Lett. **92**, 09480 (2004)
- [20] C. Letellier et al., Phys. Rev. E **52-5**, 4754 (1995)

## Contrôle du chaos Hamiltonien

G. Ciraolo, C. Chandre, R. Lima, M. Vittot

*Centre de Physique Théorique (FRUMAM),  
CNRS, Luminy Case 907, 13288 Marseille CEDEX 09 France  
ciraolo@cpt.univ-mrs.fr*

### Résumé

Nous montrons qu'un contrôle du chaos Hamiltonien est possible en utilisant des petites perturbations appropriées dont la forme peut être explicitement calculée [1]. En particulier, il est possible de réduire la diffusion chaotique d'un système Hamiltonien avec 1.5 degrés de liberté qui modélise la diffusion de particules chargées dans un champ électrique turbulent à travers le champ magnétique de confinement dans les dispositifs de fusion thermonucléaire contrôlée [2]. Bien qu'encore loin des applications expérimentales, ce résultat suggère qu'une stratégie pour contrôler le transport turbulent dans les plasmas magnétisés est envisageable [3]. La robustesse du contrôle est étudiée en termes de changements par rapport à la valeur optimale du contrôle (existence d'une région significative d'efficacité autour du contrôle optimal) [4].

## 1 Introduction

Les pertes d'énergie et de particules dues au transport anormal dans les appareils de confinement magnétique de type tokamak sont encore un sérieux obstacle pour la fusion thermonucléaire contrôlée [5]. Le transport anormal d'origine non collisionnelle est aujourd'hui attribué à la présence de fluctuations turbulentes du champ électrique dans les plasmas de fusion. Il y a plusieurs années, il a été montré que la modélisation  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  des mouvements du centre guide des particules tests chargées donne une explication naturelle de la diffusion à travers le champ magnétique de confinement  $\mathbf{B}$  [6].

Les états de meilleur confinement trouvés empiriquement et la possibilité de réduire et/ou supprimer le chaos avec les perturbations paramétriques des systèmes dissipatifs, suggèrent d'étudier la possibilité d'une stratégie de contrôle du transport chaotique anormal par des perturbations appropriées agissant au niveau microscopique des mouvements des particules chargées. En revanche, les modèles mentionnés sont Hamiltoniens et contrôler le chaos dans ces modèles nécessite des stratégies bien différentes car il n'y a pas d'ensembles attractifs dans leur espace des phases.

Dans cet article, nous développons une stratégie pour contrôler le chaos dans les systèmes Hamiltoniens. L'idée centrale et le sens du *contrôle* est que l'on cherche à modifier de manière pertinente la dynamique du système à travers des petites perturbations telles que la structure originale du système est conservée.

Dans le cas des systèmes dissipatifs, une stratégie efficace pour le contrôle est la stabilisation des orbites périodiques instables où la dynamique est attirée. Pour les systèmes Hamiltoniens on cherche des petites perturbations qui rendent le système intégrable ou plus proche de l'intégrabilité.

Dans la suite, nous décrivons le modèle Hamiltonien à 1.5 degrés de liberté pour le mouvement  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  des particules chargées dans un champ électrique *spatialement turbulent*. En suite, nous présentons le problème du contrôle et nous calculons analytiquement

le terme du contrôle. Enfin nous vérifions numériquement l'efficacité de notre méthode de contrôle.

## 2 Le modèle

Dans l'approximation du centre guide, les équations du mouvement des particules chargées en présence d'un champ magnétique toroïdal intense et d'un champ électrique non stationnaire sont

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{c}{B^2} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \times \mathbf{B} = \frac{c}{B} \begin{pmatrix} -\partial_y V(x, y, t) \\ \partial_x V(x, y, t) \end{pmatrix}, \quad (1)$$

où  $V$  est le potentiel électrostatique,  $\mathbf{E} = -\nabla V$ , et  $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$ . Pour définir un modèle, on choisit

$$V(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}} V_{\mathbf{k}} \sin[\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + \varphi_{\mathbf{k}} - \omega(\mathbf{k})t], \quad (2)$$

où  $V_{\mathbf{k}}$  décroissent comme une fonction donnée de  $\mathbf{k}$ , en accord avec les données expérimentales. Pour simplifier encore le modèle, on considère  $\omega(\mathbf{k}) = \omega_0$  constant et les phases  $\varphi_{\mathbf{k}}$  aléatoires, de manière à reproduire un champ turbulent. De plus nous considérons pour  $|V_{\mathbf{k}}|$  une loi de puissance en  $\mathbf{k}$ , afin de reproduire les caractéristiques spectrales obtenues expérimentalement [7]. La forme explicite du potentiel est donc [6]

$$V(x, y, t) = a \sum_{m,n=1}^N \frac{\sin[2\pi(nx + my) + \varphi_{nm} - 2\pi t]}{2\pi(n^2 + m^2)^{3/2}}. \quad (3)$$

Dans la suite on prendra  $N = 25$ . Les coordonnées spatiales  $x$  et  $y$  jouent le rôle de variables canoniquement conjuguées. Nous étendons l'espace des phases  $(x, y)$  en  $(E, \tau, x, y)$  où la nouvelle variable dynamique  $\tau$  évolue comme  $\tau_t = \tau_0 + t$  et  $E$  est canoniquement conjuguée à  $\tau$ . Si on absorbe la constante  $c/B$  de (1) dans l'amplitude  $a$ , on peut considérer des petits valeurs de  $a$  quand  $B$  est grand.

## 3 Le terme de contrôle

Le Hamiltonien autonome du système est donc

$$\tilde{H}(E, \tau, x, y) = E + V(x, y, \tau) \quad (4)$$

et les équations du mouvement sont

$$\dot{\tau} = 1, \quad \dot{x} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \dot{y} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial x} = -\frac{\partial V}{\partial x}. \quad (5)$$

Pour des petites valeurs de  $a$  le Hamiltonien (4) a la forme  $H = H_0 + \epsilon V$ , c'est-à-dire, un Hamiltonien intégrable  $H_0$  plus une petite perturbation  $\epsilon V$ . Pour simplifier, on suppose que la moyenne de  $V$  sur les angles est nulle. Le problème du contrôle dans les systèmes Hamiltoniens est de trouver une petite perturbation  $f$  telle que  $H + f$  est intégrable. Dans ce papier, nous nous intéressons à trouver un terme de contrôle partiel  $f_2$  d'ordre  $\epsilon^2$  tel que le Hamiltonien donné par  $H_c = H_0 + \epsilon V + \epsilon^2 f_2$  est plus proche de l'intégrabilité, i.e.

tel que  $H_c$  est canoniquement conjugué à  $H_0 + O(\epsilon^3)$ . On développe une transformation de Lie sur  $H_c$ , générée par la fonction  $S$ :

$$H'_c = e^{\epsilon \hat{S}} H_c \equiv H_c + \epsilon \{S, H_c\} + \frac{\epsilon^2}{2} \{S, \{S, H_c\}\} + \dots, \quad (6)$$

où  $\{\cdot, \cdot\}$  est le crochet de Poisson et l'action de l'opérateur  $\hat{S}$  sur  $H$  est définie par  $\hat{S}H = \{S, H\}$ . Un développement en série de puissances par rapport à  $\epsilon$  de  $H'_c$  donne

$$\begin{aligned} H'_c &= H_0 + \epsilon [\{S, H_0\} + V] \\ &\quad + \epsilon^2 \left[ f_2 + \{S, V\} + \frac{1}{2} \{S, \{S, H_0\}\} \right] + O(\epsilon^3). \end{aligned} \quad (7)$$

La fonction génératrice  $S$  est choisie telle que

$$\{S, H_0\} + V = 0, \quad (8)$$

pourvu que cette équation ait une solution. Le terme de contrôle  $f_2$  donné par l'annulation de terme d'ordre  $\epsilon^2$

$$f_2 = -\frac{1}{2} \{S, V\}, \quad (9)$$

satisfait la condition requise que  $H_c$  est canoniquement conjugué à  $H_0$  à des termes d'ordre  $\epsilon^3$  près. Si on ajoute des termes d'ordre supérieur en  $\epsilon$  dans le terme de contrôle, on peut construire  $f$  tel que  $H_c = H + \epsilon^2 f$  est intégrable pour  $\epsilon$  suffisamment petit [1].

Dans le cas que nous considérons,  $H_0 = E$ . L'équation (8) devient

$$-\frac{\partial S}{\partial t} + V = 0, \quad (10)$$

et donc  $S$  est une primitive par rapport au temps de  $V$ . Nous choisissons  $S$  de moyenne temporelle nulle. Pour le modèle (3), la fonction génératrice  $S$  est

$$S(x, y, \tau) = \frac{a}{(2\pi)^2} \sum_{\substack{m, n=1 \\ n^2 + m^2 \leq N^2}}^N \frac{\cos [2\pi(nx + my) + \varphi_{nm} - 2\pi\tau]}{(n^2 + m^2)^{3/2}}, \quad (11)$$

et le calcul de  $f_2$  donne

$$\begin{aligned} f_2(x, y, \tau) &= \frac{a^2}{8\pi} \sum_{n_1, m_1, n_2, m_2} \frac{n_2 m_1 - n_1 m_2}{(n_1^2 + m_1^2)^{3/2} (n_2^2 + m_2^2)^{3/2}} \\ &\quad \times \sin[2\pi[(n_1 - n_2)x + (m_1 - m_2)y] + \varphi_{n_1 m_1} - \varphi_{n_2 m_2}]. \end{aligned} \quad (12)$$

## 4 Etude numérique

Nous avons vérifié l'efficacité de notre méthode de contrôle à l'aide de simulations numériques. Nous avons comparé les propriétés des trajectoires de particules obtenues avec le Hamiltonien (4) et avec le Hamiltonien contrôlé dont le terme de contrôle est donné par (12). La figure 1 montre des sections de Poincaré de deux trajectoires avec les

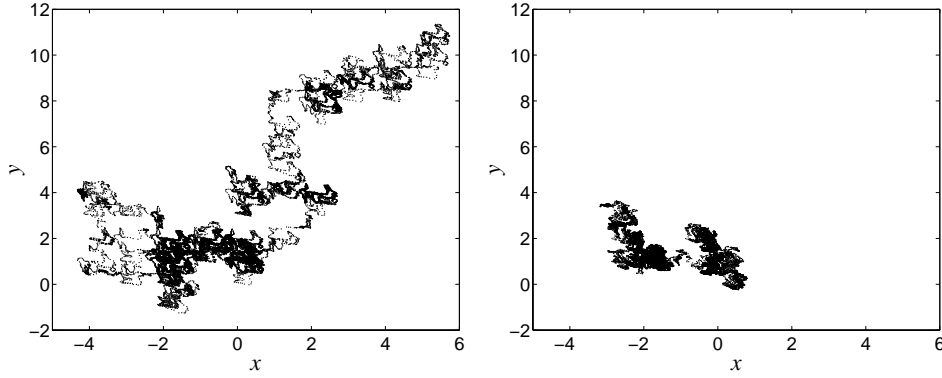


FIG. 1 – Section de Poincaré d’une trajectoire obtenue à partir du le Hamiltonien (4) (à gauche) et pour le Hamiltonien (4) plus le terme de contrôle (12) (à droite) avec  $a = 0.8$ .

mêmes conditions initiales calculées avec et sans le terme de contrôle. Une réduction significative de la diffusion est observée avec le terme de contrôle. Afin d’étudier les propriétés de diffusion du système, nous avons considéré un ensemble de  $\mathcal{M}$  particules distribuées uniformément au hasard dans le domaine  $0 \leq x, y \leq 1$  pour  $t = 0$ . Nous avons calculé le déplacement quadratique moyen  $\langle r^2(t) \rangle$  en fonction du temps

$$\langle r^2(t) \rangle = \frac{1}{\mathcal{M}} \sum_{i=1}^{\mathcal{M}} \|\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_i(0)\|^2, \quad (13)$$

où  $\mathbf{x}_i(t) = (x_i(t), y_i(t))$ ,  $i = 1, \dots, \mathcal{M}$  est la position de la  $i$ -ème particule au temps  $t$  obtenue par intégration des équations (5) avec condition initiale  $\mathbf{x}_i(0)$ . Sur la figure 2, nous représentons  $\langle r^2(t) \rangle$  pour trois valeurs différentes de  $a$ . Quand le comportement de  $\langle r^2(t) \rangle$  est linéaire dans le temps, le coefficient de diffusion est obtenu par

$$D = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\langle r^2(t) \rangle}{t}.$$

Le coefficient de diffusion  $D$  en fonction de  $a$  est représenté sur la figure ???. Une réduction significative de ce coefficient est observée quand on ajoute le terme de contrôle. Comme attendu, l’action du terme de contrôle devient plus faible lorsque  $a$  augmente dans la direction de la phase très chaotique.

On peut vérifier la robustesse du contrôle en remplaçant  $f_2$  par  $\delta \cdot f_2$  et en faisant varier le paramètre  $\delta$  à partir de sa valeur de référence  $\delta = 1$ . La figure 3 montre que la diminution, ainsi que l’augmentation, de l’amplitude du terme de contrôle (qui est proportionnelle à  $\delta \cdot a^2$ ) entraîne une perte d’efficacité dans la réduction du coefficient de diffusion. Le fait qu’un plus grand terme de contrôle (que celui qui est calculé) n’est pas plus efficace signifie que le terme de contrôle que nous avons déterminé est très bien adapté et que le contrôle ainsi obtenu n’est pas un effet brutal.

On définit les pas horizontaux (respectivement verticaux) comme étant les distances couvertes par la particule tests entre deux changements de signe successifs de la composante horizontale (respectivement verticale) de la vitesse. L’effet du contrôle est analysé en termes de distribution de probabilité (PDF) des pas. En suivant les trajectoires des particules tests pour un grand nombre de conditions initiales sans et avec contrôle, on représente sur la

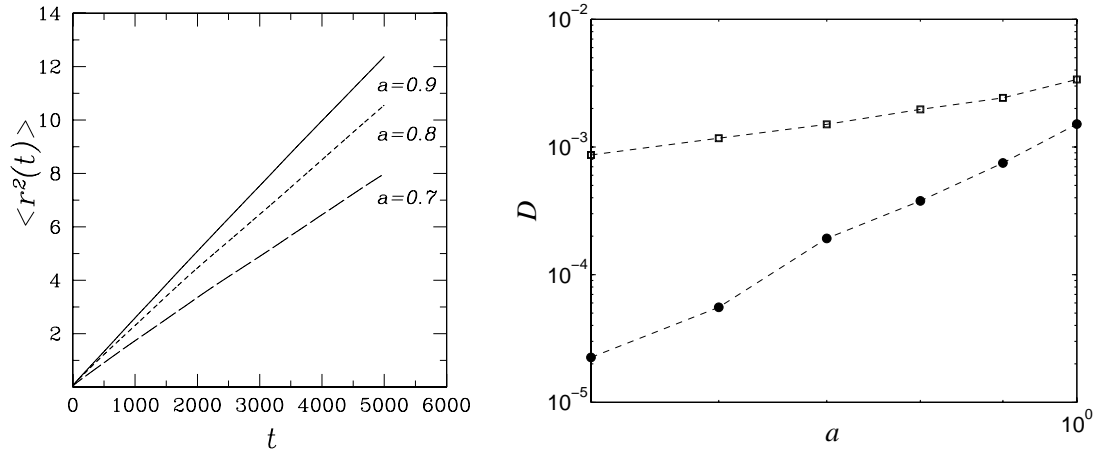


FIG. 2 – Déplacement quadratique moyen  $\langle r^2(t) \rangle$  en fonction du temps  $t$  obtenu avec le Hamiltonien (4) pour trois valeurs différentes de  $a$  (à gauche). A droite, on montre le coefficient de diffusion  $D$  en fonction du paramètre  $a$  pour  $H$  donné par (4) (carrés) et donné par le Hamiltonien (4) plus le terme de contrôle (12) (cercles).

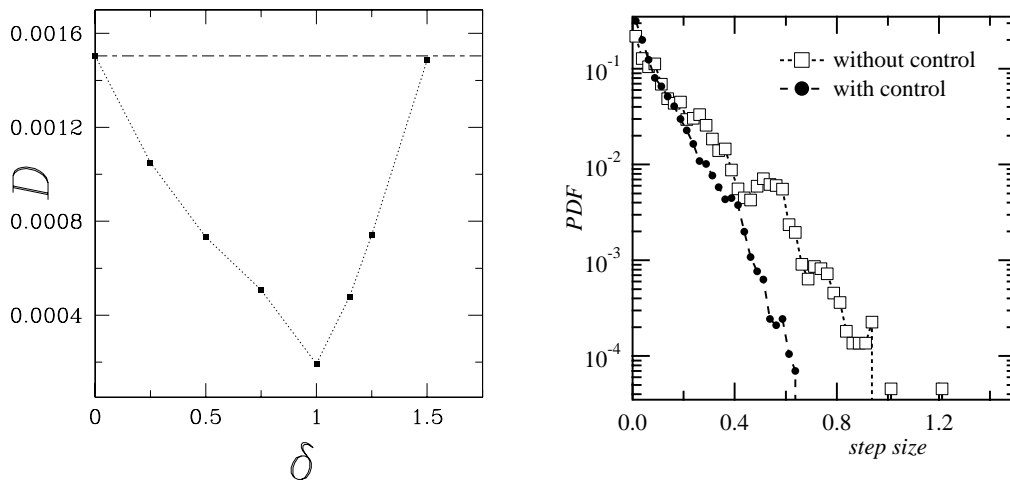


FIG. 3 – Coefficient de diffusion  $D$  en fonction de l'amplitude  $\delta$  du terme de contrôle (12) pour  $a = 0.7$  (à gauche). Distribution de probabilité des pas horizontaux avec et sans contrôle (à droite).

Figure 3 (à droite) les PDF des pas associés. On observe une réduction marquée de la probabilité de distribution des pas grands avec contrôle par rapport au cas sans contrôle. La procédure de contrôle réduit les pas grands (plus grands que 0.5).

Afin de mesurer l'amplitude relative du contrôle  $f_2$  par rapport au Hamiltonien (4), nous avons calculé les valeurs moyennes:

$$\sqrt{\frac{\langle f_2^2 \rangle - \langle f_2 \rangle^2}{\langle V^2 \rangle - \langle V \rangle^2}} \approx 0.01a \quad (14)$$

Ceci signifie que le terme de contrôle est une petite modification du potentiel électrostatique.

## 5 Conclusion

Pour conclure, nous avons mis en place une nouvelle stratégie pour le contrôle de la diffusion chaotique pour la dynamique Hamiltonienne en utilisant la théorie de perturbation. Puisque la formule du terme de contrôle est explicite, nous sommes capables de comparer la dynamique avec et sans contrôle dans un modèle simplifié, décrivant le transport anormal dans les plasmas magnétisés.

## Références

- [1] M. Vittot, *Perturbation Theory and Control in Classical or Quantum Mechanics by an Inversion Formula*, J. Phys. A: Math. Gen., à paraître (2004).
- [2] G. Ciraolo, C. Chandre, R. Lima, M. Vittot, M. Pettini, C. Figurella, Ph. Ghendrih, *Controlling chaotic transport in a Hamiltonian model of interest to magnetized plasmas*, J. Phys. A: Math. Gen. **37**, 3589 (2004).
- [3] Ph. Ghendrih, Y. Sarazin, G. Attuel, S. Benkadda, P. Beyer, G. Falchetto, C. Figurella, X. Garbet, V. Grandgirard, M. Ottaviani, *Theoretical analysis of the influence of external biasing on long range turbulent transport in the scrape-off layer*, Nuclear Fusion **43**, 1013 (2003).
- [4] G. Ciraolo, C. Chandre, R. Lima, M. Vittot, M. Pettini, Charles Figurella, Philippe Ghendrih, *Control of Hamiltonian chaos as a possible tool to control anomalous transport in fusion plasmas*, Phys. Rev. E **69** (4) (2004).
- [5] W. Horton, *Drift waves and transport*, Rev. Mod. Phys. **71**, 735 (1999).
- [6] M. Pettini, A. Vulpiani, J.H. Misguich, M. De Leener, J. Orban, R. Balescu, *Chaotic diffusion across a magnetic field in a model of electrostatic turbulent plasma*, Phys. Rev. A **38**, 344 (1988).
- [7] A.J. Wootton, H. Matsumoto, K. McGuire, W.A. Peebles, Ch.P. Ritz, P.W. Terry, S.J. Zweben, *Fluctuations and anomalous transport in tokamaks* Phys. Fluids B **2**, 2879 (1990).



## Brisure spontanée de symétrie dans un Oscillateur Paramétrique Optique de type II

L. Longchambon, N. Treps, T. Coudreau, J. Laurat et C. Fabre

*Laboratoire Kastler Brossel*

*Case 74, UPMC, 4 Place Jussieu, 75005 Paris*

`coudreau@spectro.jussieu.fr`

### Résumé

La dynamique des Oscillateurs Paramétriques Optiques (OPO) est étudiée depuis de nombreuses années tant expérimentalement que théoriquement. Dans un OPO de type II à reconversion paramétrique, c'est à dire pompé à la fréquence fondamentale  $\omega_0$  et dans lequel les ondes produites sont polarisées orthogonalement, il a été prédit dans le cas triplement résonnant l'apparition d'une brisure spontanée de symétrie. Les puissances de sortie des deux ondes à la fréquence fondamentale sont alors très différentes. Nous avons mis au point un OPO de type II à reconversion paramétrique à double cavité afin d'augmenter le nombre de paramètres ajustables. Grâce à ce système, nous avons montré expérimentalement pour la première fois à notre connaissance cette brisure spontanée de symétrie.

## 1 Introduction

Un Oscillateur Paramétrique Optique est constitué d'un cristal  $\chi^{(2)}$  placé dans une cavité optique [1]. Il est connu que lorsqu'on injecte ce système avec une onde lumineuse à la fréquence  $2\omega_0$ , il émet au-delà d'une certaine puissance pompe (puissance seuil) deux champs appelés signal et complémentaire dont les fréquences vérifient  $2\omega_0 = \omega_1 + \omega_2$ . Dans le cas d'un OPO dit de type II [2], les deux champs signal et complémentaire ont des polarisations orthogonales et le long des axes neutres du cristal. Nous étudions ici le cas d'un OPO à reconversion paramétrique c'est à dire pompé à la fréquence fondamentale  $\omega_0$  avec une polarisation à  $45^\circ$  des axes neutres du cristal, générant dans la cavité une onde à la fréquence double,  $2\omega_0$ . Cette onde sert à son tour de pompe à une onde à la fréquence  $\omega_0$ . Cependant, les relations de phase pour la génération de seconde harmonique et pour la génération paramétrique étant opposées, le champ réémis est polarisé orthogonalement au champ incident. Ce système a été étudié par de nombreux auteurs tant pour ses propriétés classiques que quantiques [3, 4, 5, 6, 7]. En particulier, il a été prédit une brisure spontanée de symétrie : la phase du champ émis à la fréquence  $\omega_0$  n'est fixée que modulo  $\pi$ . Ainsi, les intensités des faisceaux polarisés parallèlement aux axes neutres du cristal peuvent être différentes. Nous avons mis en évidence expérimentalement cette brisure spontanée de symétrie en utilisant un OPO à double cavité.

## 2 Prédictions théoriques

On considère une cavité en anneau (figure 1) contenant un cristal  $\chi^{(2)}$ . La cavité est pompée par un faisceau à la fréquence  $\omega_0$  polarisé à  $45^\circ$  des axes neutres du cristal. Les coefficients de réflexion des différents miroirs sont indiqués dans le tableau 1. Conservant la

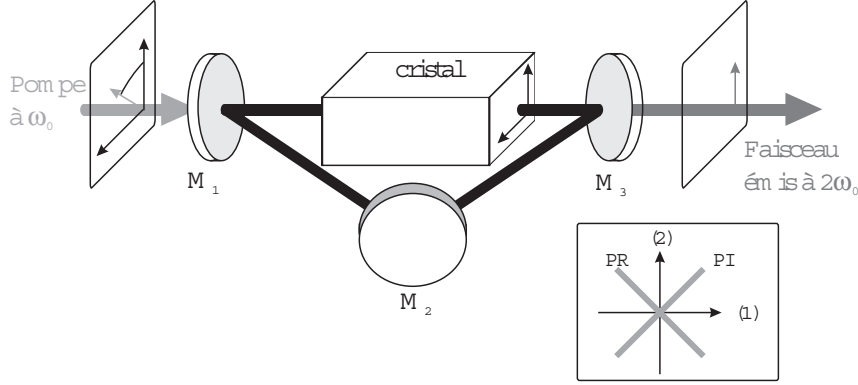


FIG. 1 – Schéma de la cavité en anneau.  $M_1$  : miroir haute réflexion à  $\omega_0$  et réflexion maximale à  $2\omega_0$ ;  $M_2$  : miroir réflexion maximale à  $\omega_0$  et  $2\omega_0$ ;  $M_3$  : miroir réflexion maximale à  $\omega_0$  et haute réflexion à  $2\omega_0$ . Dans le cadre : polarisation incidente (PI) et polarisation réfléchie (PR) par rapport aux axes neutres du cristal (1) et (2).

	$M_1$	$M_2$	$M_3$
$r(\omega_0)$	$1 - \gamma_0$	1	1
$r(2\omega_0)$	1	1	$1 - \gamma$

TAB. 1 – Coefficients de réflexion en amplitude des miroirs de la cavité

notation usuelle pour les OPOs, nous notons  $A_{1,2}$  les enveloppes des champs à la fréquence  $\omega_0$  et  $A_0$  l'enveloppe du champ à  $2\omega_0$ . La longueur optique de la cavité est telle que tous les modes sont proches de résonance. Les désaccords sont notés :

$$\Delta_{1,2} = \frac{\omega_0}{c} (n_{1,2}l + L) \text{ et } \Delta_0 = \frac{2\omega_0}{c} (n_0l + L) \quad (1)$$

où  $n_{0,1,2}$  sont les indices de réfraction du cristal,  $l$  est la longueur du cristal et  $L$  la longueur de propagation libre dans la cavité. Dans un OPO standard, le système oscille sur un couple de fréquences tel que

$$\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta. \quad (2)$$

Ici, les fréquences sont fixées par l'injection et nous supposons qu'on peut ajuster les paramètres du système de telle sorte que cette relation soit encore vérifiée. Les équations du système sont alors [5] :

$$(\gamma - i\Delta)A_1 = gA_0A_2^* + \sqrt{2\gamma}\frac{A_{in}}{\sqrt{2}} \quad (3)$$

$$(\gamma - i\Delta)A_2 = gA_0A_1^* + \sqrt{2\gamma}\frac{A_{in}}{\sqrt{2}} \quad (4)$$

$$(\gamma_0 - i\Delta_0)A_0 = \frac{g}{2}A_1A_2 \quad (5)$$

où  $A_{in}$  désigne le champ pompe et  $\sqrt{2\gamma}$  la transmission du miroir de couplage à la fréquence  $\omega_0$ . L'équation 5 permet d'exprimer  $A_0$  en fonction de  $A_1$  et  $A_2$  et on peut réinjecter cette expression dans les équations 3 et 4. On obtient alors un système d'équations non linéaires et couplées pour  $A_1$  et  $A_2$ . A partir de ce système, on peut obtenir l'équation suivante :

$$\left( (\gamma^2 + \Delta^2) - \frac{g^4}{\gamma_0^2 + \Delta_0^2} I_1 I_2 \right) (I_1 - I_2) = 0 \quad (6)$$

où  $I_i = |A_i|^2$  désigne l'intensité du champ correspondant. Cette équation admet deux solutions, l'une symétrique ( $I_1 = I_2$ ) et l'autre dissymétrique.

Dans le cas symétrique, l'intensité  $I$  des champs à la fréquence fondamentale à l'intérieur de la cavité est solution de l'équation du troisième degré :

$$\left[ (\gamma^2 + \Delta^2) + \frac{g^4 I^2}{\gamma_0^2 + \Delta_0^2} - \left( \frac{\gamma - i\Delta}{\gamma_0 + i\Delta_0} + \frac{\gamma + i\Delta}{\gamma_0 - i\Delta_0} \right) g^2 I \right] I = \gamma |A_{in}|^2 \quad (7)$$

Dans le cas dissymétrique,  $I_1$  et  $I_2$  vérifient :

$$I_1 I_2 = \frac{(\gamma_0^2 + \Delta_0^2)(\gamma^2 + \Delta^2)}{g^4} \quad (8)$$

$$I_1 + I_2 = \frac{\gamma |A_{in}|^2}{\gamma^2 + \Delta^2} + \frac{1}{g^2} [(\gamma_0 - i\Delta_0)(\gamma - i\Delta) + (\gamma_0 + i\Delta_0)(\gamma + i\Delta)] \quad (9)$$

On peut montrer [5] que la solution symétrique est stable pour :

$$I_{in} < I_{seuil} = \frac{2(\gamma^2 + \Delta^2) \left( \sqrt{(\gamma_0^2 + \Delta_0^2)(\gamma^2 + \Delta^2)} + \Delta\Delta_0 - \gamma\gamma_0 \right)}{g^2 \gamma} \quad (10)$$

alors que la solution dissymétrique est stable dans le cas contraire. Les équations 7 et 9 permettent donc de tracer l'intensité intracavité en fonction des paramètres du système. Nous verrons dans la partie suivante qu'il est possible en utilisant un système de double cavité de modifier  $\Delta$  en gardant  $\Delta_0$  constant. Nous traçons donc sur la figure 2 les intensités intracavités en fonction de  $\Delta$ , les autres paramètres étant constants. On remarque que pour

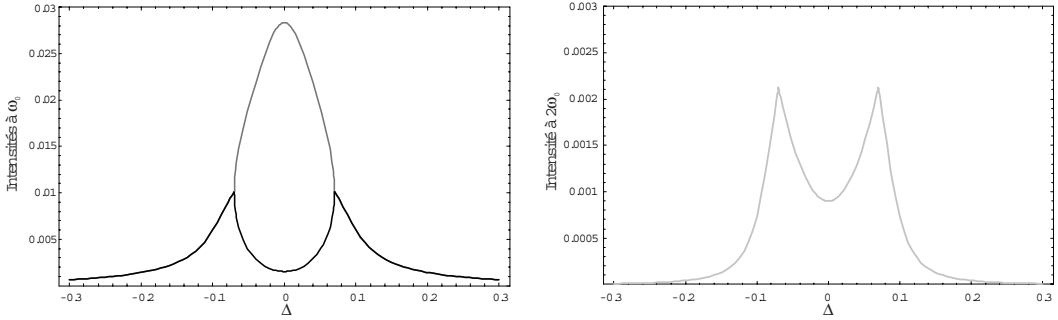


FIG. 2 – Intensités des champs à la fréquence  $\omega_0$  (gauche) et à la fréquence  $2\omega_0$  (droite) en fonction de  $\Delta$ . Les valeurs des paramètres sont  $g = 1$ ,  $\gamma_0 = 0.06$ ,  $\gamma = 0.11$ ,  $I_{in} = 0.001$ ,  $\Delta_0 = 0$

des valeurs élevées de  $|\Delta|$ , les ondes à la fréquence fondamentale sont loins de résonance et la puissance suit une fonction d'Airy. En dessous d'une valeur seuil pour  $|\Delta|$ , la brisure spontanée de symétrie apparaît : il y a reconversion de l'onde harmonique dont l'intensité diminue alors qu'on a brisure de la symétrie entre les deux ondes à la fréquence  $\omega_0$ . Nous allons maintenant décrire le montage expérimental qui nous a permis de mettre en évidence ce phénomène

### 3 Montage expérimental

Contrairement aux OPOs standards, nous utilisons un système à base d'une double cavité (voir fig. 3) : ceci ajoute en effet un degré de liberté supplémentaire qui permet la

vérification de la relation 2. Les coefficients de réflexion sont indiqués dans le tableau 2. Le faisceau sub-harmonique est produit par un laser Nd:YAG ( $\lambda = 1064 \text{ nm}$ , Lightwave 126-1024-700) et est envoyé à  $45^\circ$  des axes neutres du cristal de KTP (Cristal Laser).

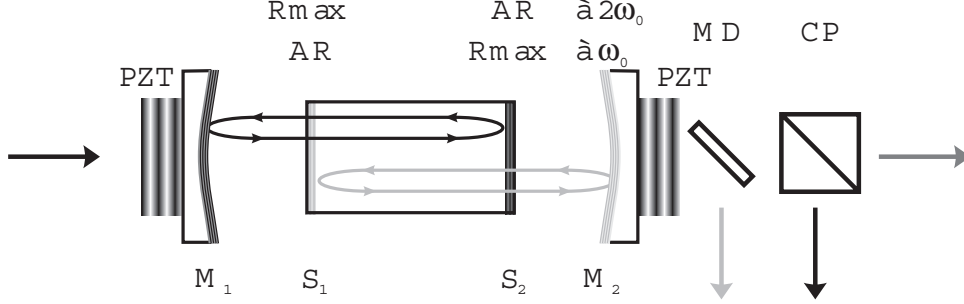


FIG. 3 – Principe de la double cavité. MD : miroir dichroïque; CP : cube polariseur; PZT : céramique piézo-électrique.

TAB. 2 – Coefficients de réflexion en intensité des différentes surfaces.

	$M_1$	$S_1$	$S_2$	$M_2$
$R(1064 \text{ nm})$	95 %	0.11 %	99.96 %	99.8 %
$R(532 \text{ nm})$	> 99.9 %	99.3 %	5.25 %	95 %

## 4 Résultats expérimentaux

Le cristal est commun à deux cavités, l'une résonnant à la fréquence  $\omega_0$  (cavité infrarouge), l'autre à la fréquence  $2\omega_0$  (cavité verte). Lorsqu'on maintient la longueur de la cavité verte fixée et qu'on balaye la longueur de la cavité infrarouge, on observe pour certaines longueurs une levée de la dégénérescence entre les intensités des deux ondes émises par le système (fig. 4). Ceci constitue la première mise en évidence de la brisure de

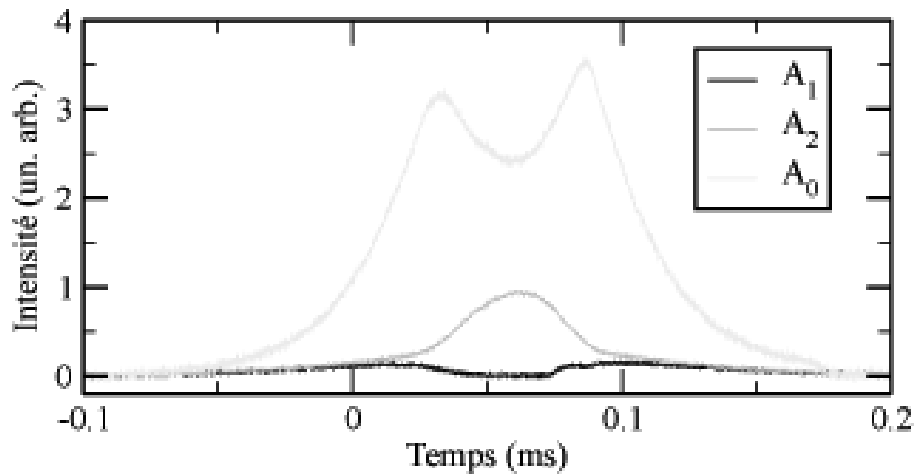


FIG. 4 – Intensités transmises par l'OPO.

symétrie décrite précédemment. Comme indiqué sur la figure 5, il est possible d'observer sur le même balayage un fonctionnement asymétrique (nécessairement à dégénérescence de fréquence) et un fonctionnement symétrique avec reconversion paramétrique (dans le cas non dégénéré en fréquence).

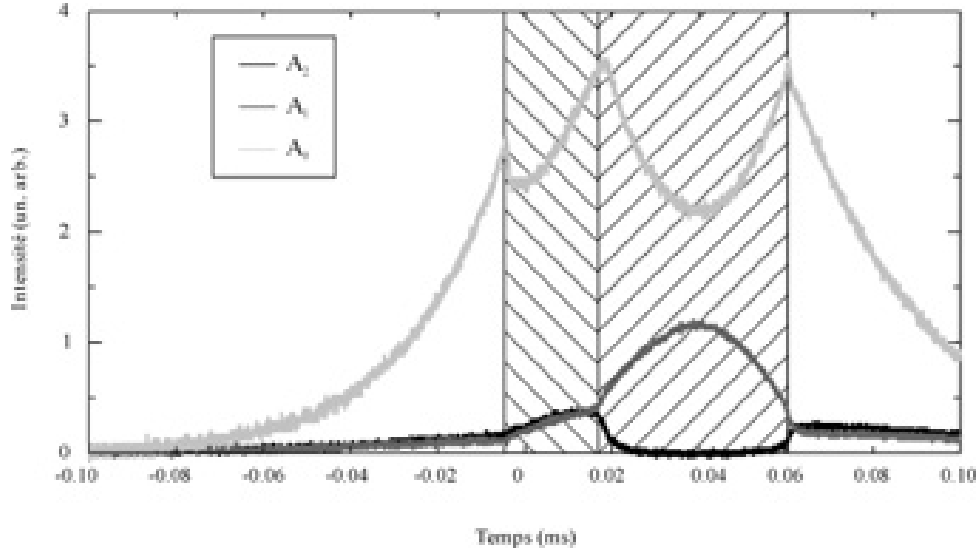


FIG. 5 – Intensités transmises par l'OPO : la zone de gauche correspond à la reconversion paramétrique en régime non dégénéré en fréquence (zone à hachures descendantes) et celle de droite à la reconversion paramétrique en régime dégénéré en fréquence (zone à hachures montantes).

## 5 Conclusion

Nous avons développé un système à double cavité permettant d'observer la brisure spontanée de symétrie prédite pour un OPO à reconversion paramétrique dans le régime dégénéré en fréquence. Ceci est la première mise en évidence expérimentale de cette brisure de symétrie.

## Références

- [1] T. Coudreau, T. Debuisschert, C. Fabre, A. Maître, *Les Oscillateurs Paramétriques Optiques: Principes et Applications*, in Sources lumineuses pour l'optoélectronique sous la direction de C. Froehly, Traité EGEM, Ed. Hermès Science, Paris (2003).
- [2] T. Debuisschert, A. Sizmann, E. Giacobino, and C. Fabre, *Type-II continuous-wave optical parametric oscillators: oscillation and frequency-tuning characteristics*, J. Opt. Soc. Am. B **10**, 1668 (1993).
- [3] A. Eschmann and M.D. Reid, *Squeezing of intensity fluctuations in frequency summation*, Phys. Rev. A **49**, 2881 (1993).
- [4] M. W. Jack, M. J. Collett, and D. F. Walls, *Asymmetrically pumped nondegenerate secondharmonic generation inside a cavity*, Phys. Rev. A **53**, 1801 (1993).
- [5] Z.Y. Ou, *Quantum-nondemolition measurement and squeezing in type-II harmonic generation with triple resonance*, Phys. Rev. A, **49**, 4902 (1994).
- [6] M A. M. Marte, *Nonlinear dynamics and quantum noise for competing  $\chi^{(2)}$  nonlinearities*, J. Opt. Soc. Am. B **12**, 2296 (1995).
- [7] U. Peschel, C. Etrich, and F. Lederer, *Symmetry breaking and self-oscillations in intracavity vectorial second-harmonic generation*, Optics Letters **23**, 500 (1998).

## Pompage inhomogène dans un oscillateur paramétrique optique dégénéré

Saliva Coulibaly et Majid Taki

*Laboratoire de Physique des Lasers, Atomes et Molécules, CNRS UMR  
8523, Centre d'Études et de Recherches Lasers et Applications, Université des  
Sciences et Technologies de Lille, UFR de Physique Bât. P5, F-59655 Villeneuve  
d'Ascq Cedex, France*

coulibal@phlam.univ-lille1.fr

### Résumé

Nous proposons, à l'aide du modèle du mean-field, une expression analytique du signal émis par l'oscillateur paramétrique optique dégénéré lorsque le profil transverse de l'onde de pompe est supposé gaussien. Pour cela, nous avons établi une approche basée sur l'approximation selon laquelle la taille du faisceau de pompe varie peu à l'échelle de sa longueur de Rayleigh. La résolution du système linéarisé, autour de sa solution de base, montre que les seuils d'émission du signal de sortie sont discrets. Les structures transverses qui apparaissent, à chacun de ces seuils, sont localisées et de type Gauss-Hermite. En tenant compte des non linéarités, nous trouvons que l'évolution spatio-temporelle du signal est gouvernée par l'équation de Ginzburg-Landau dont certains coefficients dépendent de la variable spatiale transverse. La résolution de celle-ci, près du seuil, nous donne l'expression du signal sous la forme du mode fondamental de Gauss-Hermite, ce qui nous permet de mettre en évidence et de quantifier l'élargissement spectral du signal dû au pompage inhomogène.

## 1 Introduction

L'étude des structures transverses, notamment sous forme de solitons spatiaux, prend de plus en plus d'importance. En effet de récentes prédictions [1] et observations expérimentales [2] dans des systèmes optiques, montrent que ces structures présentent d'excellentes propriétés qui pourraient servir à la réalisation de systèmes tout optique de transmission en parallèle ou de traitement d'images. Il est donc d'un grand intérêt de pouvoir sélectionner, contrôler et manipuler ces solitons, qui émergent de la complexité spatio-temporelle caractérisant les systèmes optiques non linéaires spatialement étendus. Plusieurs effets peuvent être utilisés à cet effet. Ici nous étudierons le piégeage des solitons spatiaux par les inhomogénéités de pompage dans un oscillateur paramétrique optique (OPO) dégénéré. Nous proposons, dans cette étude, d'étendre le modèle du mean-field [3, 4] en considérant que le faisceau de pompe a un profil gaussien. Afin de mener une étude analytique, nous avons supposé que la taille du faisceau de pompe varie peu à l'échelle de sa longueur de Rayleigh. Dans ce cadre, il résulte de l'analyse linéaire qui constitue la première partie de ce papier, que le nombre d'onde caractérisant les oscillations spatiales du signal dépend de la variable d'espace et que l'évolution de l'amplitude de celui-ci est gouvernée par un problème aux valeurs propres se ramenant à l'équation de Weber. On déduit de la condition de stabilité des solutions de cette équation, qui sont des fonctions de Gauss-Hermite, que les seuils d'émission du signal de sortie sont discrets. Par conséquent, il n'existe plus de courbe neutre de stabilité marginale comme c'est le cas pour

un pompage en onde plane [3]. La prise en compte des non linéarités dans la seconde partie de notre papier, permet de montrer que l'évolution spatio-temporelle obéit à l'équation de Ginzburg-Landau, dont certains coefficients dépendent de la variable spatiale transverse. Nous trouvons l'expression analytique du signal de sortie sous forme de structure localisée dans le plan transverse. Les prédictions analytiques sont en parfait accord avec les solutions obtenues par l'intégration numérique du modèle originel. En particulier, la confrontation de nos prédictions, aux solutions obtenues numériquement montre un bon accord, à la fois qualitatif et quantitatif des deux résultats.

## 2 Étude linéaire

Pour notre étude nous utiliserons le modèle standard décrivant un OPO dégénéré, sous la condition d'un accord de phase de type I et dans le cadre des approximations du champ moyen et de l'amplitude lentement variable [3]:

$$\begin{aligned}\partial_t A_p &= \gamma_p [-(1 + i\Delta_p)A_p + E(r) - A_s^2 + \frac{i}{2}\partial_r^2 A_p] \\ \partial_t A_s &= \gamma_s [-(1 + i\Delta_s)A_s + A_p A_s^* + i\partial_r^2 A_s],\end{aligned}\tag{1}$$

où  $A_p$  et  $A_s$  représentent respectivement, les enveloppes lentement variables de la pompe et du signal.  $\Delta_{p,s}$  sont les écarts entre la fréquence de la cavité et les fréquences des faisceaux de pompe et du signal,  $\gamma_{p,s}$  étant les taux de relaxation respectifs. L'opérateur  $\partial_r^2$  est le laplacien transverse, où  $r$  est la variable transverse renormalisée par rapport à la longueur caractéristique de diffraction du système de la façon suivante:  $r = \frac{x}{\sqrt{a_s}}$ ,  $x$  représentant la variable transverse physique et  $a_s$  le coefficient de diffraction du signal. Pour un OPO dégénéré, l'accord de phase conduit à  $a_s = 2a_p$  [4].  $E(r)$  est le champ de pompe incident que nous considérerons gaussien dans cette étude:

$$E(r) = E_0 \exp(-\varepsilon^2 r^2).\tag{2}$$

Où  $E_0$  est son amplitude et  $\varepsilon = \frac{\sqrt{a_s}}{w_0}$ .  $w_0$  étant la taille du faisceau.

La linéarisation du système d'Eqs. (1) autour de sa solution de base ( $A_p^0 = \frac{E(r)}{1+i\Delta_p} \equiv G(r)$ ,  $A_s^0 = 0$ ) permet de découpler les équations d'évolution des champs. On trouve pour l'évolution linéaire du signal:

$$\partial_t A_s = \gamma_s [-(1 + i\Delta_s)A_s + G(r)A_s^* + i\partial_r^2 A_s].\tag{3}$$

La résolution de cette équation reste tout de même complexe, compte tenu du profil gaussien du pompage. Pour contourner cette difficulté nous allons supposer que la taille du faisceau de pompe varie peu à l'échelle de sa longueur de Rayleigh. Dans cette configuration, le rapport  $\varepsilon$  est petit devant l'unité. Ce qui nous permet d'introduire la variable  $R$  telle que  $R = \varepsilon r$ , évoluant à la même échelle que la taille de l'onde de pompe. Le paramètre de contrôle  $G(r)$  peut alors s'écrire sous forme d'un développement en puissances de  $R$ .

$$G(R) = G(0)(1 - R^2 + \dots)\tag{4}$$

Nous pouvons dans ce cas, résoudre notre système de façon perturbative par rapport au pompage en onde plane. Le seuil dans le cas du pompage gaussien  $G_c^g$ , s'écrit alors  $G_c^g = G_c + \varepsilon G_1$ , où  $G_c$  correspond au seuil lorsque le pompage est en onde plane (pompage



homogène) et  $G_1$  le terme correctif, dû à la gaussienne, que nous déterminerons. On cherche les solutions du système sous la forme:

$$A_s = \exp(-i\omega t) \exp \left[ \frac{i}{\varepsilon} \int_0^R k(R') dR' \right] \left[ A_0 + \varepsilon A_1 + O(\varepsilon^2) \right]. \quad (5)$$

Lorsqu'on injecte l'expression (5) dans l'Eq.(3), à l'ordre dominant en  $\varepsilon$ , le système obtenu admet des solutions non triviales vérifiant la relation de dispersion suivante:

$$-\omega^2 + 2i\omega + 1 + [\Delta_s + k^2]^2 - G(R)^2 = 0 \quad (6)$$

La dépendance spatiale de celle-ci, qui constitue la spécificité de notre problème peut être éliminée si nous faisons tendre la taille ( $w_0$ ) du faisceau de pompe vers l'infini ( $\varepsilon \rightarrow 0$ ). Nous retrouvons alors la relation de dispersion obtenue pour un pompage en onde plane, qui a déjà été résolue dans des études antérieures [3]. Elles ont montrées que la nature des instabilités qui apparaissent au seuil dépend du signe du désaccord en fréquence du signal  $\Delta_s$ . En effet, quand  $\Delta_s > 0$ , ce sont les grandes longueurs d'onde ( $k_c = 0$ ) qui déstabilisent en premier le système, alors que les courtes longueurs d'onde ( $k_c \neq 0$ ) sont les plus instables lorsque  $\Delta_s < 0$ . Dans les deux cas de figure, la fréquence temporelle est nulle au seuil ( $\omega_c = 0$ ). Dans toute la suite, nous allons nous intéresser au cas général où  $k_c \neq 0$ . Dans ce cas le seuil d'émission est obtenu pour  $G_0 = G_c = 1$  et correspond à des instabilités modulationnelles dont le nombre d'onde est:  $k = k_c = \sqrt{\frac{-\Delta_s}{a_s}}$ .

Pour le cas du pompage inhomogène ( $\varepsilon \neq 0$ ), l'Eq. (6) conduit à un nombre d'onde dépendant de l'espace qui s'écrit comme:

$$k(x) = k_c + iKx + k_2x^2. \quad (7)$$

Dans cette expression,  $k_c$  correspond au nombre d'onde des oscillations spatiales, la partie complexe, à un terme d'enveloppe et le terme  $k_2x^2$  à une modulation de la phase.  $K$  et  $k_2$  sont reliés aux paramètres physiques par:

$$K = \frac{1}{w_0} \sqrt{\frac{1}{2a_s|\Delta_s|}} \quad \text{et} \quad k_2 = \frac{1}{4w_0^2|\Delta_s|\sqrt{a_s|\Delta_s|}}. \quad (8)$$

Lorsque  $w_0$  est très grand (pompage homogène) les quantités  $K$  et  $k_2$  tendent vers 0. On retrouve alors les résultats obtenus pour le pompage en onde plane.

La prise en compte des termes d'ordre supérieur en  $\varepsilon$  permet de montrer que l'évolution linéaire de l'amplitude du signal est gouvernée par un problème aux valeurs propres donné par l'équation de Weber suivante:

$$\frac{d^2 A_0(x)}{dx^2} + (Z_0 - Z_2 x^2) A_0(x) = 0, \quad (9)$$

avec  $Z_0 = \frac{G_1}{2w_0\sqrt{a_s}|\Delta_s|}$  et  $Z_2 = K^2 = \frac{1}{2w_0^2 a_s |\Delta_s|}$ .

Les solutions de l'Eq. (9) sont des fonctions de type Gauss-Hermite, dont la condition d'existence se traduit par la relation  $\frac{Z_0}{\sqrt{Z_2}} = 2n + 1$ , soit:

$$G_{1n} = (2n + 1) \sqrt{2|\Delta_s|} \quad (10)$$

où  $n$  est un entier. Nous déduisons de la relation (10), que les seuils d'émission du signal de sortie de l'OPO sont discrets.

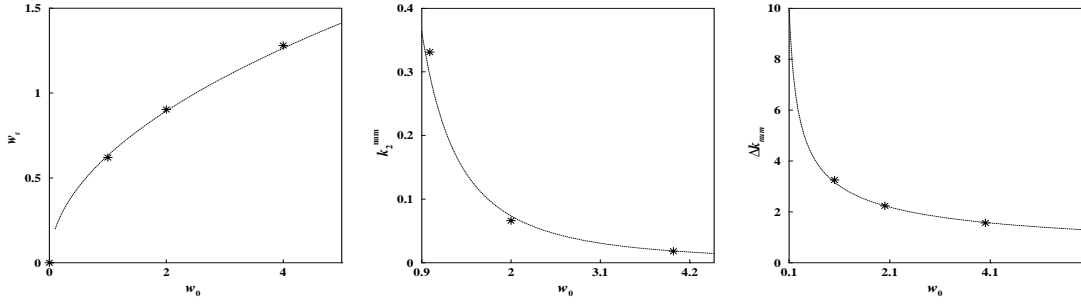


FIG. 1 – Évolution des caractéristiques du signal de sortie, en fonction de la taille du faisceau de pompe. Les étoiles correspondent aux résultats de l'intégration numérique du modèle originel de l'OPO dégénéré.  $\Delta k$  est la taille de la transformée de Fourier du signal. Les paramètres sont:  $a_s = 2a_p = 0.01$ ,  $\Delta_p = 0$  et  $\Delta_s = -2.0$ .

Ce qui veut dire qu'il n'existe plus de courbe neutre de stabilité marginale, comme c'est le cas lorsque le pompage est en onde plane [3]. Ce résultat soulève une interrogation, celle de savoir si la discrétisation des seuils implique celle du nombre d'onde des oscillations. Par un raisonnement similaire à celui utilisé dans [5], nous montrons que le nombre d'onde est déterminé de façon unique. La solution de notre système en régime linéaire s'écrit alors comme suit:

$$A_s(x) = CH_n(\sqrt{K}x)e^{-i\omega t}e^{i(k_c+k_2x^2)x}e^{-\frac{K}{2}x^2}, \quad (11)$$

où  $C$  est une constante arbitraire et  $H_n(\sqrt{K}x)$  la fonction d'Hermite d'ordre  $n$ .

L'étude linéaire nous a donc permis de déterminer les seuils, le nombre d'onde et le profil d'enveloppe des structures qui apparaissent, du fait de l'inhomogénéité spatiale qu'implique un pompage de profil gaussien. Cependant, une caractérisation complète du signal de sortie de l'OPO, nécessite la prise en compte des effets de saturation. Pour cela, nous devons prendre en compte les non linéarités.

### 3 Étude non linéaire

Le développement asymptotique au voisinage du seuil (cf. [6] pour les détails de la méthode) montre que l'évolution spatio-temporelle de l'amplitude du signal obéit à l'équation de Ginzburg-Landau réelle, dont certains coefficients sont des fonctions de la variable spatiale transverse:

$$\partial_\tau A_s = (E_0 - 1 - \frac{x^2}{w_0^2})A_s - 2a_s\Delta_s\partial_x^2 A_s - N|A_s|^2 A_s, \quad (12)$$

$$\text{où } \tau = \gamma t \quad \text{et} \quad N = \frac{2}{1 + \Delta_p^2} + \frac{1}{1 + (\Delta_p - 2\Delta_s)^2}$$

Le signal émis par l'OPO, pour le mode fondamental ( $n = 0$ ) de Gauss-Hermite, peut alors s'écrire comme suit:

$$A_s(x) = \sqrt{\frac{\sqrt{2}(E_0 - 1 - \frac{\sqrt{a_s}}{w_0})}{N}} e^{-\frac{x^2}{w_s^2}} \cos[(k_c + k_2x^2)x]. \quad (13)$$

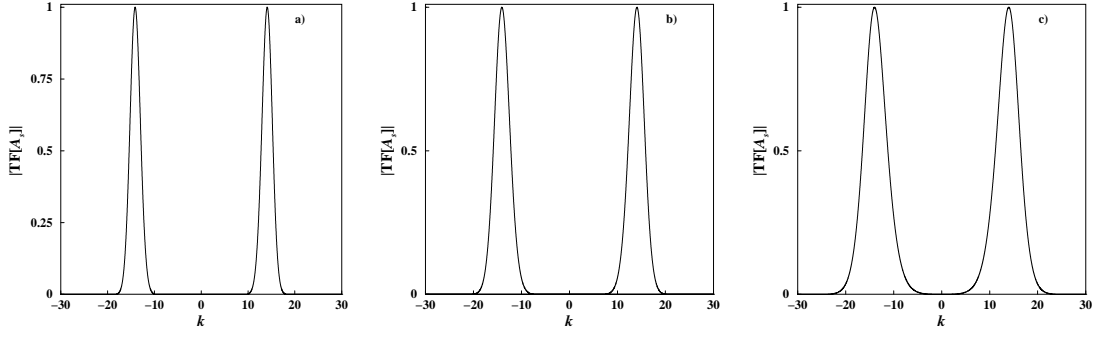


FIG. 2 – Profil du signal en champ lointain résultant de l'intégration numérique du système d'Eqs.(1) pour différentes valeurs de la taille  $w_0$  du champ de pompe. (a)  $w_0 = 4$ , (b)  $w_0 = 2$  et (c)  $w_0 = 1$  pour a), b) et c) respectivement. Tous les autres paramètres sont les mêmes que ceux de la figure (1).

Où  $w_s = \sqrt{2w_0\sqrt{2a_s|\Delta_s|}}$ , représente la taille du faisceau signal émis par l'OPO dégénéré. Ainsi la prise en compte du profil gaussien du faisceau de pompe entraîne une diminution de l'amplitude, donc de l'intensité du signal de sortie, dont la taille varie comme la racine carrée de celle du faisceau de pompe. Nous en déduisons que la taille du signal en champ lointain est inversement proportionnelle à la racine carrée de la taille du faisceau de pompe, ce qui conduit à un élargissement spectral du signal.

#### 4 Intégration numérique du modèle originel de l'OPO dégénéré

Les résultats obtenus à partir de l'intégration du modèle originel de l'OPO dégénéré Eqs. (1) sont en bon accord avec nos prédictions analytiques. En effet, nous avons effectué des simulations numériques pour différentes valeurs du waist ( $w_0$ ) de la pompe. Les caractéristiques du signal obtenu sont reportées sur le graphe correspondant au résultat analytique (Fig. 1). Nous avons aussi mis en évidence l'élargissement spectral (fig. 2). En outre, le signal donné par l'expression (13) et le signal obtenu numériquement sont en accord comme le montre la figure 3.

#### 5 Conclusion

Nous avons proposé une généralisation du modèle du mean-field décrivant la dynamique de l'OPO dégénéré, avec un accord de phase de type I, en considérant que le profil transverse du faisceau de pompe incident est gaussien. Nous avons supposé que la taille de ce faisceau varie peu à l'échelle de sa longueur de Rayleigh, ce qui nous a permis d'effectuer un calcul de perturbation par rapport au cas où le pompage est en onde plane (pompage homogène). Notre étude montre que contrairement au pompage en onde plane, il n'existe pas de courbe neutre de stabilité marginale car les seuils d'émission du signal de sortie sont discrets. De même le profil transverse du signal de sortie n'est plus une structure spatiale étendue (onde plane), mais prend la forme d'une structure localisée avec un nombre d'onde dépendant de la variable d'espace. L'intégration numérique du modèle originel donne des résultats en parfait accord avec nos prédictions.

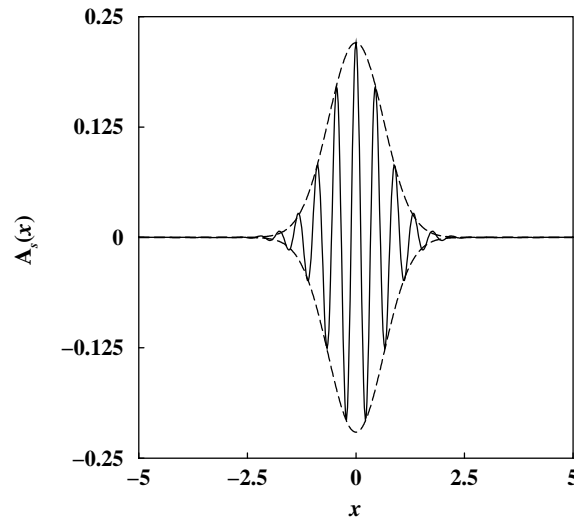


FIG. 3 – Profil transverse de l'amplitude du signal résultant de l'intégration numérique du système d'Eqs. (1) (trait plein). La courbe en pointillés correspond à l'enveloppe du signal résultant du calcul analytique. Les paramètres sont les mêmes que ceux de la figure (1).

## Références

- [1] Mustapha Tlidi and Majid Taki, Phys. Rev. Lett. **91**, 023901-1 (2003).
- [2] S. Barland et *al.*, Nature **479**, 699 (2002).
- [3] H. Ward, M.N. Ouarzazi, M. Taki, and P. Glorieux, Phys. Rev. E **63**, 016604 (2001).
- [4] Stefano Longhi, Phys. Rev. A **53**, 4488 (1994).
- [5] G.Dewel and P. Borckmans, Phys. Lett. A **138**, 189 (1989).
- [6] M.N. Ouarzazi, P.A. Bois and M. Taki, Phys. Rev. A **53**, 4408 (1996)

## Bifurcation dans un modèle non-linéaire de production du sang

F. Crauste et M. Adimy

*Laboratoire de Mathématiques Appliquées FRE 2570*

*Université de Pau et des Pays de l'Adour*

*1 avenue de l'Université, 64000 Pau*

*fabien.crauste@univ-pau.fr*

### Résumé

Nous étudions un modèle mathématique de production des cellules du sang décrit par une équation différentielle non-linéaire. La prise en compte de la longueur du cycle cellulaire introduit un retard naturel dans le modèle. Les échanges cellulaires entre la phase de prolifération et la phase de repos sont caractérisés par la présence d'un terme non-linéaire dans l'équation (fonction de Hill).

Le modèle que nous étudions tient compte du caractère non constant du cycle cellulaire. Dans ce cas, nous obtenons un résultat de stabilité globale en utilisant une fonction de Lyapunov et nous parvenons aussi à montrer qu'une bifurcation de Hopf survient inévitablement dans le processus de production du sang. L'existence de solutions périodiques nous permet de décrire un grand nombre de maladies hématologiques, caractérisées par des oscillations de toutes les cellules sanguines (en particulier, la leucémie myélogène chronique périodique).

## 1 Introduction

Le processus de fabrication du sang (globules rouges, globules blancs et plaquettes), appelé hématopoïèse, est un processus complexe ayant lieu dans la moëlle osseuse. Toutes les cellules ayant des durées de vie inégales (de l'ordre de trois mois pour les globules rouges, une semaine pour les plaquettes et une journée pour les globules blancs) et des taux de renouvellement divers, l'hématopoïèse nécessite un grand réservoir de cellules afin de maintenir et de renouveler la population de cellules sanguines. Ce réservoir est constitué de cellules souches hématopoïétiques. Ces cellules, inobservables et totipotentes, sont capables d'auto-renouvellement et de différenciation, par division. Ainsi, elles maintiennent une réserve de cellules souches et elles produisent aussi des cellules dites "progéniteurs" (*committed stem cells*) qui à leur tour se différencient en cellules matures. Ces cellules quittent ensuite la moëlle osseuse et entrent dans la circulation sanguine. Trente divisions successives (à peu près) sont nécessaires pour passer d'une cellule souche à une cellule mature prête à entrer dans le sang.

Chaque cellule impliquée dans l'hématopoïèse est soit en phase de repos soit en phase de prolifération (Burns et Tannock [3]). La phase de repos (aussi appelée phase  $G_0$ ) est un stage quiescent de la vie d'une cellule durant lequel elle ne peut se diviser. Les cellules au repos représentent 95% des cellules impliquées dans l'hématopoïèse. Ceci souligne l'importance de la phase de repos, qui ne peut-être négligée.

La phase de prolifération (qui correspond à la notion usuelle de cycle cellulaire) est constituée de quatre étapes : une phase méconnue ( $G_1$ ), la phase de synthèse de l'ADN ( $S$ ), une phase de correction des erreurs de la phase  $S$  ( $G_2$ ) et la mitose ( $M$ ). Au contraire

de la phase de repos, en phase de prolifération une cellule augmente sa maturité pour se diviser durant la mitose.

De nombreux auteurs (Mackey [5], Pujo *et al* [8, 9]) ont noté l'importance de la phase de repos par rapport à la phase de prolifération. En particulier, l'équation qui régit la dynamique de la phase de repos contient toute l'information sur le comportement de la population entière. C'est pourquoi nous ne nous intéressons, dans la suite, qu'à l'équation de la phase de repos.

On considère l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt}(t) = -\delta x(t) - \beta(x(t))x(t) + 2 \int_0^\tau e^{-\gamma a} f(a) \beta(x(t-a))x(t-a) da, \quad (1)$$

où  $x(t)$  représente la population de cellules en phase de repos à l'instant  $t \geq 0$ . Les cellules au repos sont supposées mourir à un taux constant  $\delta \geq 0$ , qui tient aussi compte de la différenciation cellulaire, et elles sont introduites en phase de prolifération avec un taux  $\beta = \beta(x(t))$  (Sachs [10]) où la fonction  $\beta$  est une fonction de Hill,

$$\beta(x) = \beta_0 \frac{\theta^n}{\theta^n + x^n}, \quad x \geq 0. \quad (2)$$

Le coefficient  $\beta_0 > 0$  est le taux maximal de réintroduction,  $\theta \geq 0$  est le nombre de cellules au repos pour lequel  $\beta$  a un taux d'échange maximal avec la phase de repos et  $n > 0$  est la sensibilité du taux de réintroduction (réaction à des stimuli extérieurs et à des changements dans la population).

En phase de prolifération, les cellules meurent par apoptose à un taux  $\gamma \geq 0$  et se divisent selon une densité  $f$  à support compact  $[0, \tau]$ , où  $0 < \tau < \infty$  (Bradford *et al.* [2]). Le troisième terme de l'équation (1) décrit le fait que les cellules qui se divisent sont des cellules introduites en phase de prolifération une génération plus tôt. Le coefficient 2 représente la division de chaque cellule mère en deux cellules filles et le terme  $e^{-\gamma a}$  tient compte du taux de survie en phase de prolifération.

La prise en compte de la longueur du cycle cellulaire introduit un retard naturel dans le modèle. L'équation (1) est en fait une équation différentielle à retard.

Récemment, Pujo-Menjouet *et al.* [8, 9] ont prouvé qu'une bifurcation de Hopf survenait dans l'équation (1) lorsque  $f$  est définie par une mesure de Dirac. Ceci revient à considérer que toutes les cellules se divisent au même âge, c'est-à-dire que la durée du cycle cellulaire est constante. Dans ce cas là, l'équation (1) se réduit à une équation différentielle à retard discret.

Contrairement aux modèles précédents, cités ci-dessus, le modèle que nous étudions tient compte du caractère non constant du cycle cellulaire. Dans ce cas, nous obtenons un résultat de stabilité globale en utilisant une fonction de Lyapunov et nous parvenons aussi à montrer qu'une bifurcation de Hopf survient inévitablement dans le processus de production du sang, entraînant l'existence de solutions périodiques.

## 2 Stabilité et bifurcation de Hopf

L'équation (1) possède deux états d'équilibres : un équilibre trivial  $x = 0$  qui existe toujours et un équilibre non-trivial, positif,  $x = x^*$  qui existe si et seulement si

$$0 < \delta < \left( 2 \int_0^\tau e^{-\gamma a} f(a) da - 1 \right) \beta_0. \quad (3)$$

Lorsque la condition (3) est satisfaite, il est facile de voir, en utilisant (2), que  $x^*$  est défini par

$$x^* = \theta \left( \left( 2 \int_0^\tau e^{-\gamma a} f(a) da - 1 \right) \frac{\beta_0}{\delta} - 1 \right)^{1/n}. \quad (4)$$

Nous nous intéressons tout d'abord au comportement de l'état d'équilibre trivial  $x = 0$ .

**THÉORÈME 1.** *L'état d'équilibre  $x = 0$  de l'équation (1) est globalement asymptotiquement stable si*

$$\left( 2 \int_0^\tau e^{-\gamma a} f(a) da - 1 \right) \beta_0 < \delta, \quad (5)$$

*et il est instable lorsque*

$$\delta < \left( 2 \int_0^\tau e^{-\gamma a} f(a) da - 1 \right) \beta_0.$$

Pour obtenir la stabilité globale de l'équilibre trivial, on montre que la fonction  $J : C^+ \rightarrow [0, +\infty)$ , définie par

$$J(\varphi) = \int_0^{\varphi(\tau)} a\beta(a)da + \int_0^\tau e^{-\gamma a} f(a) \left( \int_{\tau-a}^\tau \left( \beta(\varphi(\theta))\varphi(\theta) \right)^2 d\theta \right) da,$$

est une fonction de Lyapunov lorsque la condition (5) est vérifiée.  $C^+$  désigne l'ensemble des fonctions continues et positives sur  $[0, \tau]$ .

La condition (5) est réalisée par exemple si les taux de mortalités ( $\delta$  et  $\gamma$ ) sont élevés ou si peu de cellules sont introduites en phase de prolifération ( $\beta_0$  petit). Dans ce cas-là, la population est condamnée à l'extinction.

On peut noter que l'équilibre trivial est instable dès que l'équilibre non-trivial existe, c'est-à-dire lorsque l'inégalité (3) a lieu.

On s'intéresse dorénavant à l'équilibre  $x = x^*$  de (1), défini par (4). On suppose donc que la condition (3) est réalisée. Il n'est pas possible d'obtenir un résultat de stabilité globale pour  $x^*$  car cet équilibre existe en même temps que l'équilibre trivial  $x = 0$ . On s'intéresse donc à la stabilité locale de  $x = x^*$ . Pour cela, on linéarise l'équation (1) autour de  $x^*$ . On pose  $X(t) = x(t) - x^*$ . L'équation (1) linéarisée autour de  $x^*$  est

$$\frac{dX}{dt}(t) = -(\delta + \beta^*)X(t) + 2\beta^* \int_0^\tau e^{-\gamma a} f(a) X(t-a) da, \quad (6)$$

où  $\beta^*$  est défini par

$$\beta^* := \beta(x^*) + x^* \beta'(x^*) = \frac{\delta^2}{\alpha^2 \beta_0} \left[ 1 - \left( \frac{\alpha \beta_0}{\delta} - 1 \right) (n-1) \right],$$

et

$$\alpha := \left( 2 \int_0^\tau e^{-\gamma a} f(a) da - 1 \right) > 0.$$

L'équation caractéristique associée à (6), obtenue en cherchant des solutions sous la forme  $X(t) = e^{\lambda t}$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ , est alors

$$\lambda + \delta + \beta^* - 2\beta^* \int_0^\tau e^{-(\lambda+\gamma)a} f(a) da = 0. \quad (7)$$

En étudiant le signe des parties réelles des valeurs propres de (7) et en cherchant des valeurs propres imaginaires pures, on obtient le résultat suivant.

**THÉORÈME 2.** *On suppose que (3) est vérifiée et que l'application  $a \in [0, \tau] \mapsto e^{-\gamma a} f(a)$  est décroissante. On pose*

$$n_0 := 1 + \frac{\delta}{\alpha\beta_0 - \delta} \left[ 1 + \frac{\alpha^2\beta_0}{\alpha + 2} \right] > 1.$$

*Si  $n \leq n_0$ , l'équilibre  $x = x^*$  de (1) est localement asymptotiquement stable.*

*Si  $n > n_0$ , il existe  $n_{crit} > n_0$  tel que  $x^*$  est localement asymptotiquement stable lorsque  $n_0 \leq n < n_{crit}$  et  $x^*$  devient instable lorsque  $n = n_{crit}$  via une bifurcation de Hopf. En particulier, une solution périodique apparaît lorsque  $n = n_{crit}$ .*

Avec  $\beta_0$ ,  $\theta$ ,  $\delta$  et  $\gamma$  donnés par (Mackey [5, 6])

$$\beta_0 = 1.77 \text{ j}^{-1}, \quad \theta = 1.62 \times 10^8 \text{ cellules/kg}, \quad \delta = 0.05 \text{ j}^{-1}, \quad \gamma = 0.2 \text{ j}^{-1},$$

et  $\tau = 7$  jours, la condition (3) est vérifiée et on obtient  $n_{crit} = 2.53$ . Pour cette valeur, l'équation (1) possède une solution périodique, de période 33 jours (Fig. 1).

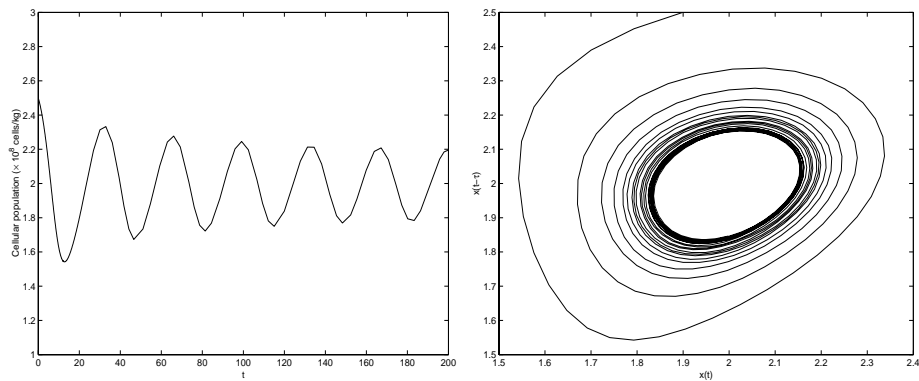


FIG. 1 – Une bifurcation de Hopf survient lorsque  $n = 2.53$ , et une solution périodique apparaît, de période 33 jours (approximativement). La solution atteint un cycle limite. L'équilibre  $x = x^*$  de l'équation (1) est instable.

### 3 Discussion

Les cellules souches sont à la base du processus de production du sang, grâce à leur totipotence, mais elles peuvent aussi être à l'origine de maladies, souvent graves. Parmi toutes les maladies qui surviennent durant l'hématopoïèse, les maladies hématologiques périodiques (*periodic hematological diseases*, Mackey et Glass [7]) jouent un rôle important, en raison de leur nature périodique. Ces maladies sont caractérisées par des oscillations significatives du nombre de cellules en circulation dans le sang, avec des périodes allant de quelques semaines à plusieurs mois, et des amplitudes variant de valeurs normales à de faibles valeurs ou bien de valeurs normales à de grandes valeurs. Ces maladies offrent une occasion de mieux comprendre les processus de régulation qui interviennent lors de la production du sang, et qui sont encore méconnus (Haurie *et al.* [4]).



Certaines maladies périodiques ne concernent qu'un certain type de cellules du sang, par exemple l'anémie hémolytique autoimmune périodique ne touche que les globules rouges (Bélair *et al.* [1]) et la thrombopénie cyclique les plaquettes (Santillan *et al.* [11]), alors que d'autres montrent des oscillations dans tous les types de cellules sanguines. C'est le cas de la leucémie myélogène chronique, un cancer des globules blancs, résultat d'une transformation maligne d'une seule cellule souche pluripotente. Chez certains patients, des oscillations de toutes les cellules sanguines ont été observées lors d'une leucémie myélogène chronique. Ce phénomène est appelé leucémie myélogène chronique périodique. La période des oscillations observées varie entre 30 et 100 jours selon les patients (Haurie *et al.* [4]), avec la même période pour les globules rouges, les globules blancs et les plaquettes. La différence entre les périodes observées et la durée du cycle cellulaire (moins d'une semaine) reste pour le moment énigmatique.

Numériquement, le modèle que nous proposons permet de faire apparaître des oscillations ayant des périodes qui correspondent à celles observées lors de maladies hématologiques périodiques, en particulier lors d'une leucémie myélogène chronique périodique. Ces résultats sont présentés sur la Fig. 2. Il apparaît qu'une augmentation de la sensibilité  $n$

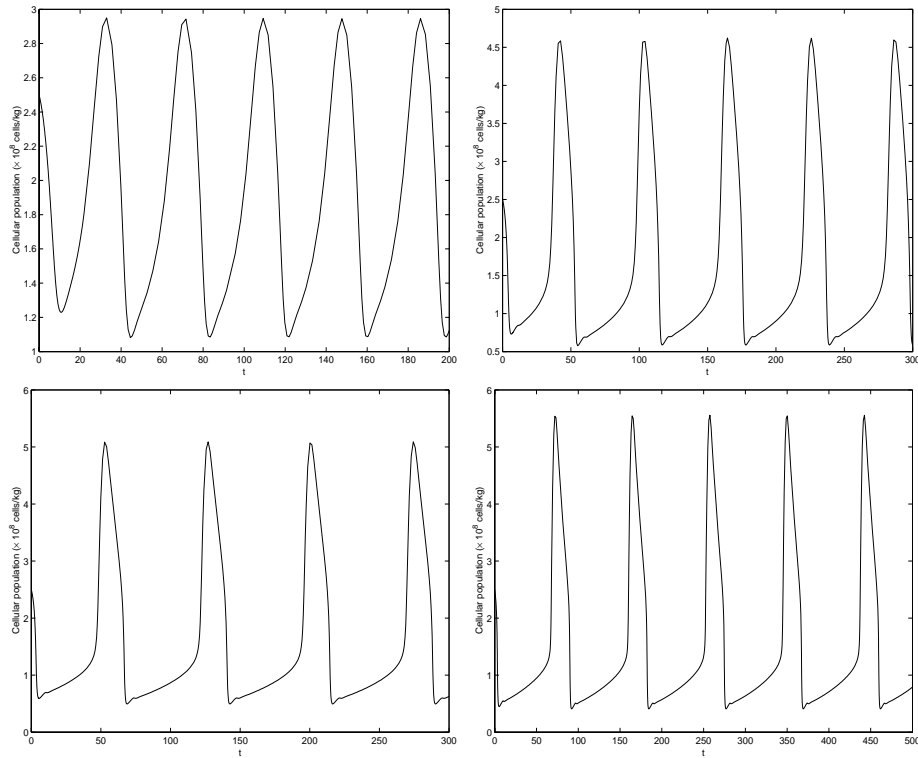


FIG. 2 – De la figure en haut à gauche à celle en bas à droite,  $n$  est respectivement égal à 2.8, 4, 5 et 7. La période des oscillations augmente avec  $n$  (de 40 jours à plus de 90 jours), ainsi que l'amplitude. Les oscillations observées à partir de  $n = 4$  jusqu'à  $n = 7$  sont caractéristiques de celles observées lors d'une leucémie myélogène chronique périodique : des périodes entre 30 et 100 jours et des amplitudes variant entre de faibles valeurs (moins de  $10^8$  cellules/kg) et des valeurs normales ( $5 \times 10^8$  cellules/kg).

entraîne une augmentation de la période des solutions de (1) ainsi qu'une augmentation de l'amplitude, avec de très faibles valeurs atteintes. On obtient des périodes allant de

40 jours ( $n = 2.8$ ) à plus de 90 jours ( $n = 7$ ), soit près de 3 mois. Ces observations correspondent à ce qui est habituellement observé lors d'une leucémie myélogène chronique périodique.

## Références

- [1] J. Bélair, M. C. Mackey and J. M. Mahaffy, *Age-structured and two-delay models for erythropoiesis*, Math. Biosci. **128**, 317-346, (1995).
- [2] G. Bradford, B. Williams, R. Rossi, I. Bertonecello, *Quiescence, cycling, and turnover in the primitive haematopoietic stem cell compartment*, Exper. Hematol. **25**, 445-453, (1997).
- [3] F.J. Burns, I.F. Tannock, *On the existence of a  $G_0$  phase in the cell cycle*, Cell. Tissue Kinet. **19**, 321-334, (1970).
- [4] C. Haurie, D. C. Dale and M. C. Mackey, *Cyclical neutropenia and other periodic hematological diseases: A review of mechanisms and mathematical models*, Blood **92**, 2629-2640, (1998).
- [5] M.C. Mackey, *Unified hypothesis of the origin of aplastic anaemia and periodic hematopoiesis*, Blood **51**, 941-956, (1978).
- [6] M.C. Mackey, *Dynamic hematological disorders of stem cell origin* in Biophysical and biochemical information transfer in recognition, Eds. Vassileva-Popova J.G., Jensen E.V. New-York: Plenum Press (1979).
- [7] M.C. Mackey, L. Glass, *From clocks to chaos. The rhythms of life.*, Princeton, Princeton University Press. (1988).
- [8] L. Pujo-Menjouet, M.C. Mackey, *Contribution to the study of periodic chronic myelogenous leukemia*, to appear.
- [9] L. Pujo-Menjouet, S. Bernard, M. C. Mackey, *Long period oscillations in a  $G_0$  model of hematopoietic stem cells*, subm. to SIAM J. Appl. Math.
- [10] L. Sachs, *The molecular control of hemopoiesis and leukemia*, C. R. Acad. Sci. Paris **316**, 882-891, (1993).
- [11] M. Santillan, J. Bélair, J. M. Mahaffy and M. C. Mackey, *Regulation of platelet production: The normal response to perturbation and cyclical platelet disease*, J. Theor. Biol. **206**, 585-603, (2000).

## Évolution Non-linéaire d'un Jet Tourbillonnaire.

I. Delbende et M. Rossi

*LIMSI-CNRS BP133, 91403 Orsay Cedex*  
*et LMM Paris VI 75252 Paris*  
 delbende@limsi.fr

### Résumé

On se propose d'approfondir le rôle des non-linéarités sur l'évolution des instabilités de jets tourbillonnaires. On considère des perturbations initiales de type modes propres de symétrie azimutale donnée correspondant aux modes les plus amplifiés. Différents scénarii ont été mis en évidence suivant la valeur du nombre de swirl. Pour les swirls les plus grands, le vortex se relaminarise en modifiant son écoulement de base. En revanche, à mesure que le jet est plus intense, on observe la formation d'une série de vortex ou de dipôles entourant le cœur du vortex initial. Pour certaines plages de nombres de swirl, ces vortex secondaires contiennent toute la circulation initiale et la zone centrale est alors simplement caractérisé par une vitesse axiale.

## 1 Introduction

De nombreux travaux traitent de la dynamique des tourbillons qui présentent en sus d'une vitesse azimutale, une composante de jet (voir par exemple [1] pour une revue). Cette configuration, appelée jet tourbillonnaire, semble être à l'origine de l'éclatement tourbillonnaire i.e. de la destruction brutale du cœur du vortex et de l'apparition d'un point de stagnation. Elle a été également observée dans de nombreuses géométries et domaines d'applications (cavité en rotation, aile delta, turbo-machines). Par ailleurs, ce type de tourbillon est caractérisé par la présence de modes normaux instables. Bien qu'un lien entre ces deux aspects n'ait pas été établi de manière claire, il est surprenant que la dynamique non linéaire des perturbations linéairement instables n'a fait l'objet, dans le passé, que de peu d'études. La relaminarisation que l'on observe dans certains cas a été étudiée [1, 2], et rendue responsable de la persistance des tourbillons de bout d'aile dans le sillage des avions [2]. Des structures en champignons ont été également mises en évidence [4]. Notre travail vise à décrire et interpréter systématiquement la saturation non linéaire d'un jet tourbillonnaire.

## 2 État de base et Stabilité Linéaire

Pratiquement tous les travaux expérimentaux ou théoriques sur les jets tourbillonnaires utilisent comme profil de référence ou encore état de base, un écoulement axisymétrique : le vortex de Batchelor [4]. Ce dernier s'écrit comme une combinaison d'une vitesse azimutale  $U_\theta$  et d'une vitesse axiale  $W$ . En coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ , ces champs sont de la forme

$$U_\theta^B(r, t) = \frac{\Gamma}{2\pi r} (1 - \exp(-\frac{r^2}{a^2})) , \quad W^B(r, t) = \frac{W_0}{(a/a_0)^2} \exp(-\frac{r^2}{a^2}) \quad (1)$$

où  $\Gamma$  représente la circulation du tourbillon,  $W_0$  la vitesse axiale initiale en  $r = 0$ . Enfin la taille du tourbillon  $a(t)$  est choisie identique pour les deux composantes non nulles de

la vitesse. Cette quantité vérifie  $a^2(t) = a_0^2 + 4\nu t$  avec  $\nu$  la viscosité cinématique et  $a_0$  la taille initiale. Le vortex de Batchelor constitue une solution exacte des équations de Navier–Stokes caractérisée par deux nombres sans dimensions: le nombre de Reynolds et le nombre de swirl  $q$  qui quantifie le rapport entre la vitesse azimutale et la vitesse axiale

$$q = \frac{\Gamma}{2\pi a_0 W_0}; \quad Re = \frac{W_0 a_0}{\nu}. \quad (2)$$

Si on néglige la diffusion visqueuse du cœur, le vortex de Batchelor est stationnaire. Il est donc susceptible d’une analyse classique en modes normaux. En résumé, la stabilité temporelle [6] indique que le vortex est instable de manière inviscide pour une plage de nombre de swirl  $0 < q < 1.5$  et que cette instabilité est dominée par des modes hélicoïdaux négatifs. Plus récemment, d’autres modes d’instabilité ont été mis en évidence. Cependant, ceux-ci sont intrinsèquement liés à la viscosité et leurs taux de croissance sont donc bien plus faibles. Dans notre étude, on se place dans le régime  $0 < q < 1.5$  et on s’intéresse à l’évolution des perturbations non-linéaires tri-dimensionnelles de la solution de Batchelor instationnaire.

L’évolution nonlinéaire est simulée numériquement par intégration directe des équations de Navier–Stokes en formulation perturbative autour de l’état de base que constitue l’écoulement parallèle de Batchelor instationnaire. On utilise pour ce faire une méthode pseudo-spectrale inspirée des travaux de [7].

### 3 Résultats

On choisit comme condition initiale un mode propre instable dont la symétrie est fixée par un nombre d’onde azimutal  $m$  et un nombre d’onde axial  $k_z$ . Dans les simulations, on a analysé les mode instables ”inviscides”  $m = -3$  et  $m = -4$  qui sont prépondérants pour l’ensemble des nombres de swirl et le nombre de Reynolds étudiés  $Re = 667$ . On présentera ici les résultats du mode instable  $m = -3$ . Le nombre d’onde axial choisi est celui du mode  $k_z$  le plus instable: on a donc pris  $k_z \sim 1.83$  ( $q = 1.$ ),  $k_z \sim 1.68$  ( $q = 0.8$ ) et  $k_z \sim 1.11$  ( $q = 0.4$ ).

À partir de ce mode, la simulation engendre, par effet nonlinéaire, des modes azimutaux  $n = m, n = 0, n = 2m, n = 4m, \dots$  dont on caractérise les amplitudes  $A_n(t)$  à l’aide de l’énergie cinétique normalisée des perturbations axiale  $w_n$ , radiale  $u_n^r$  et azimutale  $u_n^\theta$

$$[I_n^z]^2(t) \equiv \int |w_n|^2 r dr dz / E^0; \quad [I_n^\theta]^2(t) \equiv \int |u_n^\theta|^2 r dr dz / E^0 \quad (3)$$

$$[I_n^r]^2(t) \equiv \int |u_n^r|^2 r dr dz / E^0; \quad [A_n]^2(t) \equiv \int (|w_n|^2 + |u_n^r|^2 + |u_n^\theta|^2) r dr dz / E^0 \quad (4)$$

où  $E^0$  est l’énergie cinétique totale des perturbations initiales.

Dans tous les cas et sans surprise, l’amplitude  $A_m(t)$  de la perturbation initiale azimutale  $n = m$ , augmente exponentiellement sur les temps courts (voir, par exemple, la figure 1). Au-delà de cette période, différents scénarii sont observés suivant la plage du nombre de swirl  $q$ . On notera que cette évolution entre les différents régimes est graduelle: on ne peut donc parler de véritables transitions.

**Régime  $1 \leq q \leq 1.5$ .**

Après la phase linéaire, l’amplitude  $A_m$  du mode initial  $m$  sature pour ensuite décroître (figure 1a). De la même manière, après une phase de croissance, tous les autres modes

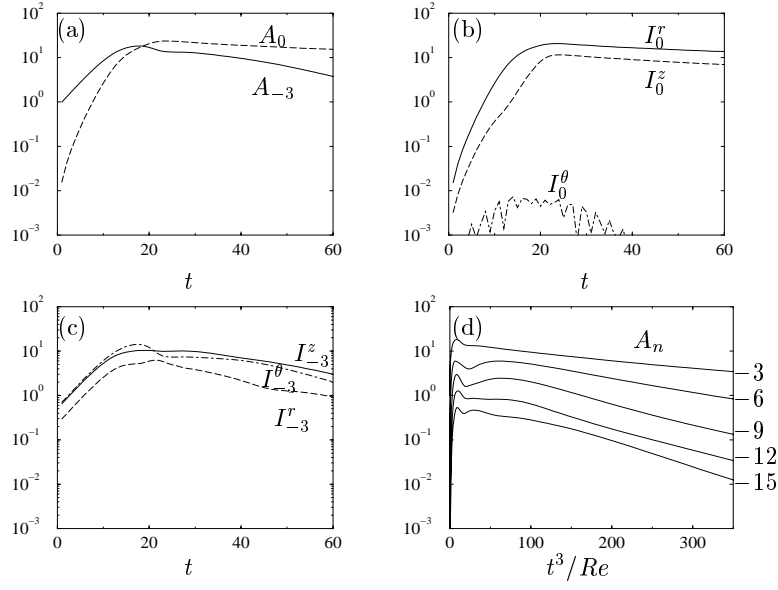


FIG. 1 – (a) Amplitude  $A_n(t)$  pour  $n = m$  (trait continu) et  $n = 0$  (trait pointillé). (b) Energies  $I_n^z(t)$ ,  $I_n^r(t)$  et  $I_n^\theta(t)$  des perturbations axiale, radiale et azimutale du mode initial  $n = m$  en fonction du temps. (c) Idem pour le mode  $n = 0$ . (d) Amplitude  $A_n(t)$  pour  $n = -3, \dots, -15$  en fonction de  $t^3/Re$ . Paramètres de la simulation :  $q = 1.$ ,  $Re = 667$  et mode propre initial  $m = -3$ .

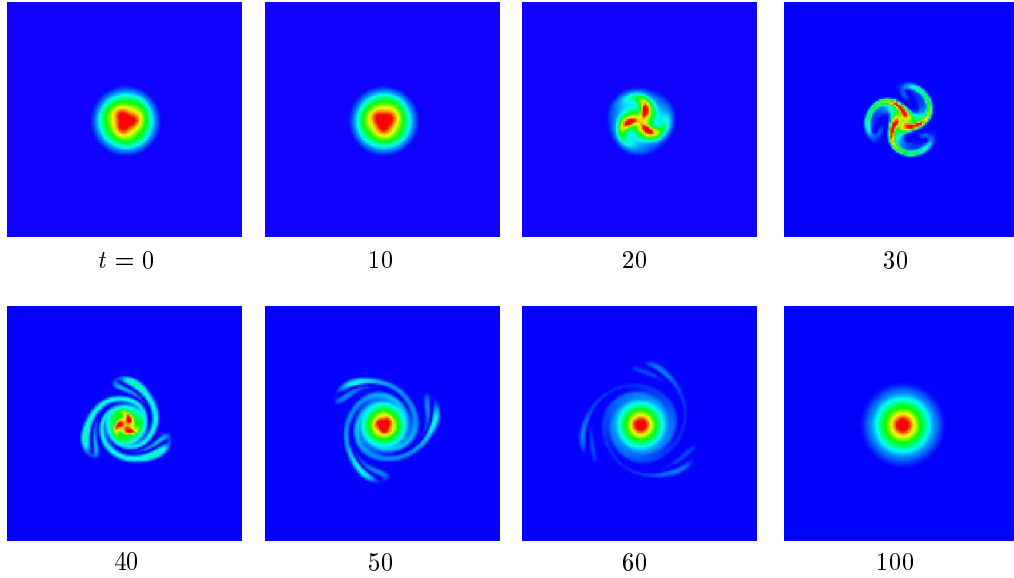


FIG. 2 – Valeur de la vorticité totale  $\Omega$  dans une section transverse en fonction du temps pour les paramètres  $q = 1$ ,  $Re = 667$ . Mode propre initial  $m = -3$ .

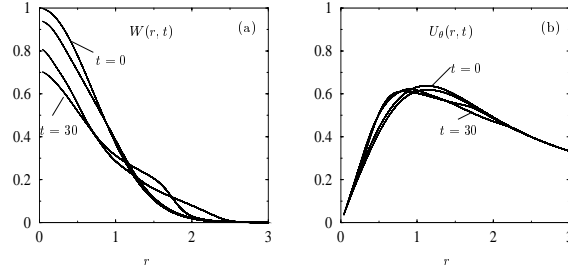


FIG. 3 – La vitesse (a) axiale moyenne  $W^B(r, t) + W_0(r, t)$  et (b) azimutale moyenne  $U_\theta^B(r, t) + u_0^\theta(r, t)$  en fonction du temps pour les paramètres  $q = 1$ . et  $Re = 667$ . Mode propre initial  $m = -3$ .

$n \neq 0$  décroissent et ceci d'autant plus vite que  $n$  est grand (figure 1d). Enfin l'amplitude  $A_0$  du mode  $n = 0$  (figure 1a) croît au début en  $A_m^2(t)$  puis ensuite sature pour décroître, mais beaucoup plus lentement que tous les autres modes.

On peut comprendre cette dynamique en considérant deux effets : l'instabilité de jet tourbillonnaire proprement dite qui conduit à l'apparition de structures d'amplitude finie et un effet de diffusion qui tend à éliminer ces structures. Ce dernier effet peut être observé sur la simulation proprement dite : la vorticité axiale totale (figure 2) est enroulée de manière assez similaire à un scalaire passif par un effet de type advection diffusion causé par la rotation différentielle de l'écoulement azimutal moyen. On remarquera que ce dernier demeure presque identique à sa valeur pour l'écoulement azimutal de base, l'énergie cinétique azimutale du mode  $m = 0$  restant faible au cours du temps (figure 1b). Cette dynamique d'advection diffusion donne lieu à une atténuation en  $\exp(-n^2 t^3 / Re)$  pour tous les modes azimutaux  $n$  à l'exception du mode  $n = 0$  (figure 1d).

Pour le régime  $1 \leq q \leq 1.5$ , qui est proche du seuil  $q = 1.5$ , l'instabilité de jet tourbillonnaire est particulièrement modifiée par l'advection diffusion pour deux raisons : (i) le temps caractéristique de l'instabilité, i.e. l'inverse du taux de croissance des modes instables, est du même ordre ou supérieur à l'échelle de temps du processus d'advection diffusion en  $Re^{1/3}$  ; (ii) l'amplitude des perturbations est *a priori* faible que pour ces nombres de swirl proches du seuil. Or on sait que, pour un écoulement purement bidimensionnel de Lamb-Oseen, il faut une perturbation d'amplitude suffisamment forte pour contrecarrer la rotation différentielle [9].

L'instabilité linéaire du jet tourbillonnaire n'est donc pas capable pour  $1 \leq q \leq 1.5$  d'atteindre des amplitudes qui permettent d'annuler l'effet de l'advection diffusion sur la vorticité axiale. Par ailleurs, on peut démontrer que, dans le cadre des écoulements hélicoïdaux, la composante  $W + \frac{k_z r}{2\pi} U_\theta$  est aussi, dans la limite "inviscide", transportée comme un scalaire passif par le champ  $(U_r, U_\theta - \frac{k_z r}{2\pi} W)$ . Au vu de la longueur d'onde  $k_z$  initiale introduite, on vérifie que, dans le coeur du vortex, la quantité  $\frac{k_z r}{2\pi}$  reste faible ; cette composante est donc proche de  $W$ . Dans ce cas, la vitesse axiale  $W$  suit également une dynamique de champ scalaire déterminée par le champ  $(U_r, U_{theta})$ . L'amplitude du mode initial  $m$  impose une composante de  $U_r$  qui éjecte les valeurs les plus grandes de  $W$  situées dans le coeur à l'extérieur, ces valeurs vont ainsi être mélangées avec des valeurs plus faibles ce qui conduit *in fine* à un effet d'homogénéisation de  $W$ .

Tous les modes  $n \neq 0$  vont donc décroître en temps avec l'échelle  $Re^{1/3}$  à l'exception du mode  $n = 0$  qui ne subit pas cet effet. Au temps initiaux la partie moyenne de l'écoulement

est produite par la génération nonlinéaire du mode  $n = 0$  à partir du mode instable  $m$  : à l'ordre dominant, on observe classiquement un effet en  $A_m^2(t)$  jusqu'au début de la décroissance des modes  $n \neq 0$  puis le mode  $n = 0$  s'atténue par diffusion visqueuse standard avec une échelle de temps en  $Re$ . Comme conséquence directe, les profils moyens  $U_\theta^B(r, t) + u_0^\theta(r, t)$  et  $W^B(r, t) + W_0(r, t)$  évoluent en fonction du temps (figure 3) : on assiste à une décroissance du profil de vitesse axial moyen alors que le profil azimuthal varie faiblement. On en déduit que la valeur du swirl moyen augmente vers la zone stable  $q > 1.5$  : le vortex se relaminarise. Cet effet avait déjà observé dans un cas turbulent [1, 2].

**Régime proche de  $q \sim 0.8$ .**

Lorsque  $q \leq 1$ , le taux de croissance des modes instables  $m$  augmente et l'amplitude non-linéaire sature à des valeurs plus grandes que pour  $q \geq 1$ . L'effet de rotation différentielle n'est alors plus capable de détruire par filamentation la structure ainsi formée. C'est un effet analogue que l'on observe pour un vortex bidimensionnel perturbé par une fluctuation d'amplitude suffisamment grande, où le vortex relaxe vers une solution de type tripôle [9]. Si on visualise la vorticité totale dans une coupe transversale, on observe entre  $t = 0$  et  $t = 30$  la formation d'une série de vortex corotatifs hélicoïdaux entourant le cœur du vortex initial (figure 4). Presque toute la vorticité initiale axiale (en particulier toute la circulation) est éjectée du cœur et se redistribue entre ces vortex. Par ailleurs chacun d'eux est accompagné d'un vortex de signe opposé et d'intensité beaucoup plus faible. Par la

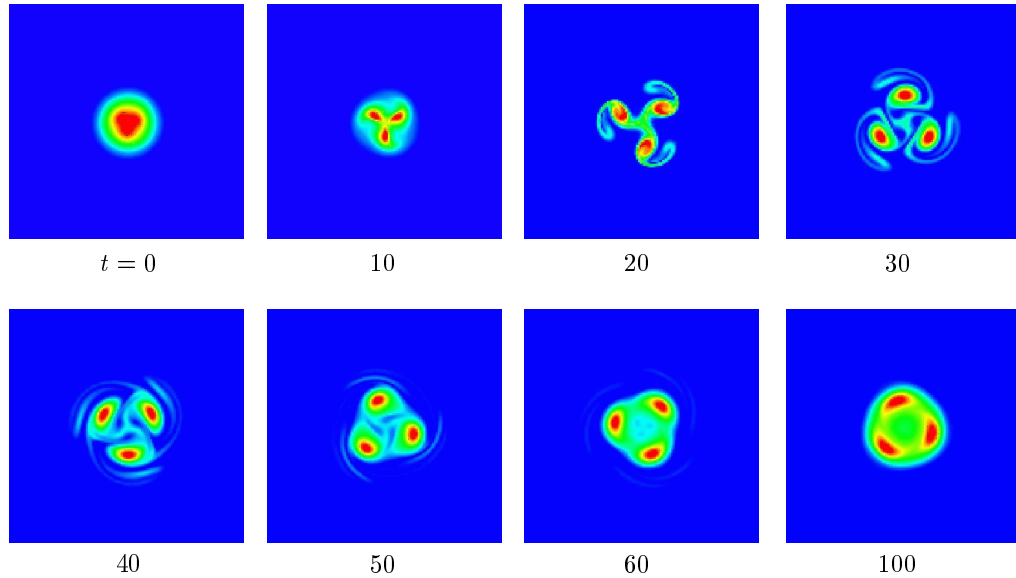


FIG. 4 – Valeur de  $\Omega$  dans une section transverse en fonction du temps pour les paramètres  $q = 0.8$ ,  $Re = 667$ . Mode propre initial  $m = -3$ .

suite (  $t \geq 30$  ) l'écoulement semble atteindre une état quasi-stationnaire rotatif soumis à la diffusion visqueuse.

**Régime proche de  $q \sim 0.4$ .** Si on abaisse encore la valeur du nombre de swirl (par exemple  $q \sim 0.4$ ), il s'établit une série de paires de vortex contrarotatifs qui s'éjectent du cœur du vortex initial (figure 5). Il s'agit vraiment de paires puisque la valeur la rapport des circulations est plus proche de 1 que dans le cas du régime précédent. En fait, bien que l'amplitude de la perturbation nonlinéaire reste proche de celle de  $q \sim 0.8$ , la vorti-

ité axiale de l'état de base est moins forte. Les paires contrarotatives sont donc moins disymétriques. Contrairement au cas  $q \sim 0.8$ , les paires s'éloignent du cœur. Ceci donne lieu à une augmentation du rayon de dispersion du vortex beaucoup plus importante que dans les régimes précédents.

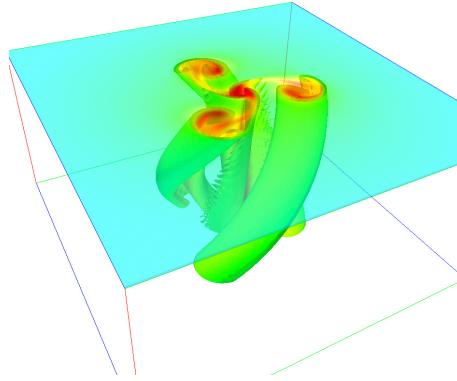


FIG. 5 – Isosurfaces de la vorticité totale montrant l'éjection de paires de vortex hélicoïdaux à faible swirl  $q = 0.4$ ,  $Re = 667$ , pour un mode azimuthal  $m = -3$ . La coupe supérieure semi-transparente est colorée par la norme de la vitesse.

## Références

- [1] LEIBOVICH, S. 1983 Vortex stability and breakdown: survey and extension. *AIAA J.*, **17**, 471–477.
- [2] S. Ragab, M. Sreedhar *Numerical simulation of vortices with axial velocity deficits*, *Phys. Fluids* **7**(3), 549 (1995)
- [3] L. Jacquin, C. Pantano *On the persistence of trailing vortices*, *J. Fluid Mech.* **471**, 159 (2002).
- [4] ABID, M. & BRACHET, M. E. 1998 Direct numerical simulations of the Batchelor trailing vortex by a spectral method. *Phys. Fluids* **10**, 469–475.
- [5] G. K. Batchelor *Axial flow in the trailing line vortices*, *J. Fluid Mech.* **20**, 645 (1964).
- [6] ASH, R. L. & KHORRAMI, M. R. 1995 *Vortex stability*. In *Fluid Vortices*, ed. Green, S.I. Chap VIII, 317–372. Kluwer.
- [7] DELBENDE I., CHOMAZ J.-M. & HUERRE P. 1998 Absolute/convective instabilities in the Batchelor vortex: a numerical study of the linear impulse response. *J. Fluid Mech.* **355**, 229–254.
- [8] LINGEVITCH, J. F. & BERNOFF, A. J. 1994 Rapid relaxation of an axisymmetric vortex *Phys. Fluids* **11**, 3720–3723.
- [9] ROSSI L. F., LINGEVITCH, J. F. & BERNOFF, A. J. 1997 Quasyi-steady monopole and tripole attractors for relaxing vortices *Phys. Fluids* **9**, 8, 2329–2338.



## Rides tourbillons à la surface d'un lit granulaire fortement incliné, cisailé par un écoulement continu

D. Doppler<sup>1</sup>, T. Loiseleux<sup>1,2</sup>, P. Gondret<sup>1</sup> et M. Rabaud<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Fluides, Automatique et Systèmes Thermiques, UMR 7608*

*Bât. 502, Campus Universitaire, 91405 Orsay cedex*

<sup>2</sup>*Unité de Mécanique, Ecole Nationale Supérieure de Techniques Avancées*

*32 Bd Victor - 75739 Paris Cedex 15*

`doppler@fast.u-psud.fr`

### Résumé

Afin de mieux comprendre les mécanismes d'érosion hydrodynamique et de transport granulaire, nous avons mis en place une expérience bidimensionnelle constituée d'un canal étroit, inclinable et à moitié rempli d'un lit granulaire cisailé par un écoulement d'eau continu et laminaire. Nous présentons ici les résultats expérimentaux obtenus lorsque l'angle d'inclinaison de la cellule est supérieur à l'angle d'avalanche. Dans ces conditions, pour un écoulement remontant la pente, nous montrons l'existence d'un seuil au-delà duquel le cisaillement homogène à l'interface donne naissance à des structures périodiquement espacées et propagatives. Aux temps courts, ces rides tourbillons présentent une croissance temporelle exponentielle avec un taux de croissance qui dépend peu de l'intensité du courant mais fortement de l'angle d'inclinaison de la cellule et du diamètre des billes. Aux temps longs, après plusieurs doublements de longueur d'onde, les rides saturent. Ces structures sont alors caractérisées par une longueur d'onde, une amplitude et une vitesse de phase constantes sauf en début de cellule, où elles suivent une croissance spatiale exponentielle. La longueur d'onde et l'amplitude des ondes saturées sont corrélées indépendamment des valeurs des paramètres de l'expérience (diamètre des particules, débit de fluide, angle d'inclinaison), et la vitesse de phase dépend principalement de la taille des grains.

## 1 Introduction

La compréhension et la modélisation des mécanismes physiques qui régissent l'érosion et le transport de la matière en grains intéressent aussi bien les géomorphologues que les industries pétrolière ou agro-alimentaire. Cependant, les modèles existants ne permettent toujours pas de prédire efficacement les effets macroscopiques des interactions fluide-grains. Parmi les manifestations spectaculaires de ces interactions on peut citer le déplacement d'importantes masses de sédiments par les avalanches sous marines, l'avancée de dunes sous marines sous l'effet des courants marins, ou encore les dessins de rides qui se forment sur les pentes de ces dunes. Afin d'extraire l'influence de différents paramètres physiques sur la stabilité d'une pente granulaire sous écoulement, nous avons mis en place une expérience en géométrie contrôlée. Le dispositif est constitué d'un canal étroit (cellule de Hele Shaw), inclinable et à moitié rempli d'un lit de billes de verre monodisperses cisailé par un écoulement d'eau continu et laminaire. Si l'existence d'un seuil de cisaillement au-delà duquel le fluide entraîne les grains et des rides de profil asymétrique apparaissent est bien établie [1, 2], les modèles d'instabilité linéaire basés sur une hypothèse de resuspension visqueuse des grains restent à améliorer [3]; de plus ces études sont restreintes aux faibles

pent. Nous présentons ici les résultats expérimentaux obtenus lorsque l'angle d'inclinaison de la cellule est supérieur à l'angle de stabilité maximal pour lequel une couche de matériau de quelques grains d'épaisseur coule en avalanche [4]. Dans ces conditions, pour un écoulement remontant la pente, nous montrons l'existence d'un seuil au-delà duquel le cisaillement homogène à l'interface donne naissance à des structures périodiquement espacées et propagatives, similaires aux ondes de type Kelvin-Helmholtz observées lors de la sédimentation d'une suspension en tube incliné [5].

## 2 Description générale

### 2.1 Dispositif expérimental

Le dispositif expérimental est constitué d'un canal très étroit (cellule de Hele-Shaw de largeur  $b = 2\text{ mm}$ ), à moitié rempli de billes de verre quasi-monodisperses de diamètre moyen  $d(\pm 10\%)$  compris dans la gamme  $[90\mu\text{m}, 220\mu\text{m}]$ . L'eau, injectée à l'aide d'une pompe centrifuge, s'écoule de gauche à droite sur une hauteur  $h_w$ , imposant au lit granulaire un cisaillement constant tout au long de la cellule. L'écoulement continu et sans surface libre dont on connaît analytiquement le profil dans le cas de deux fluides [6] est considéré comme laminaire dans la gamme de paramètres explorée au cours de nos expériences.

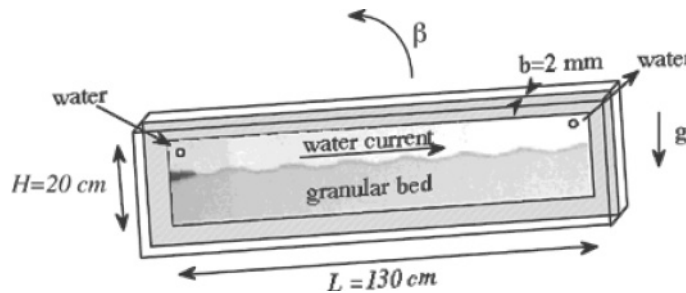


FIG. 1 – Schéma du canal

On peut incliner la cellule autour de son axe transverse, de  $-60^\circ$  à  $+60^\circ$ . Par convention, l'angle  $\beta$  formé entre l'axe longitudinal de la cellule et l'horizontale est négatif lorsque l'écoulement descend la pente et positif lorsqu'il la remonte. Le lit plat est préparé par avalanches successives dans les deux directions. Chaque expérience est alors filmée avec deux caméras CCD fixées à la cellule et synchronisées entre elles, de façon à visualiser la moitié de la longueur de la cellule. Les deux paramètres de contrôle indépendants sont l'angle d'inclinaison  $\beta$  et le débit d'eau  $Q$ . Dans la suite, on préfère utiliser le nombre adimensionnel de Shields  $\theta$ , calculé pour un lit horizontal, pour caractériser le cisaillement imposé par l'écoulement. Dans notre expérience,

$$\theta = 3.26 \frac{\eta Q h_w}{\Delta \rho g d b^2}$$

où  $\eta$  représente la viscosité dynamique de l'eau et  $\Delta \rho$  la différence de masse volumique entre les grains et le fluide.

## 2.2 Plan des paramètres

Comme on le voit sur la figure 2, pour un angle d'inclinaison faible, le lit reste stable à faible débit. Si on augmente le débit d'eau, des grains commencent à rouler et des rides triangulaires apparaissent partout dans la cellule. Lorsque le lit est fortement incliné, en présence ou non d'un faible écoulement remontant la pente, on observe des avalanches. Pour des valeurs du débit plus élevées, le cisaillement intense entre les couches de grains en avalanche et le contre-écoulement de fluide donne naissance à des rides régulièrement espacées à l'interface.

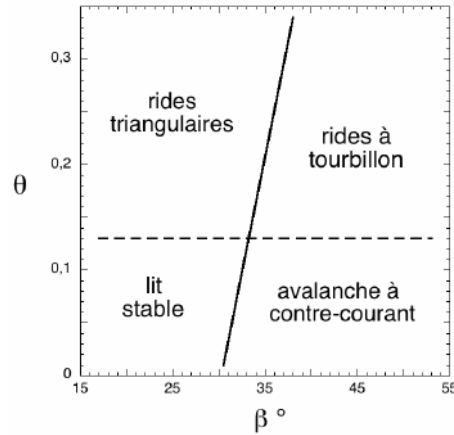


FIG. 2 – Différents états du lit granulaire pour un écoulement remontant la pente (— seuil d'avalanche, - - seuil d'érosion)

La photo 3 gauche, prise dans le référentiel lié à la cellule, montre que ces structures sont différentes des rides triangulaires qu'on observe dans le cas de l'érosion simple, sans avalanche. Elles sont appelées rides à tourbillons en raison du tourbillon de grains qui sépare deux rides consécutives.

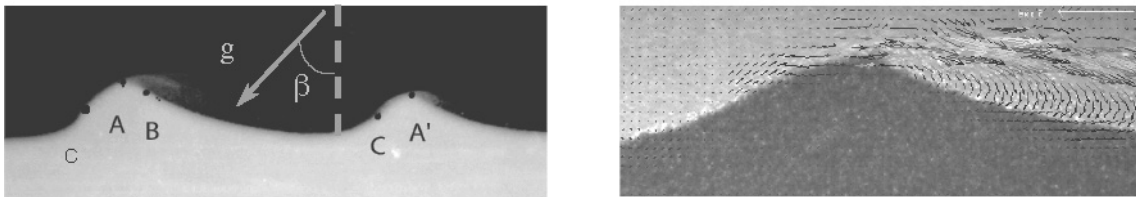


FIG. 3 – (gauche) Image de deux rides à tourbillons à l'état saturé. La direction de la gravité  $g$  est indiquée par la flèche. (droite) Le tourbillon de grains qui sépare deux rides consécutives est mis en évidence par Vélocimétrie par Images de Particules

## 2.3 Mécanisme de propagation des rides à tourbillons

Le mécanisme de propagation des structures alterne érosion et dépôt : le fluide arrache des grains le long de la crête de la première ride (de C'' à A et de C à A'). Les particules entraînées en suspension dans le tourbillon sédimentent dans le creux (entre A et C). Quelques unes en impactant le dos de la ride suivante, déclenchent une avalanche dans le sens de la pente (ici de gauche à droite, de C vers B).

Dans la section suivante, nous présentons des résultats expérimentaux pour des valeurs des paramètres éloignées des valeurs seuils matérialisées par les frontières de la figure 2. En effet, la transition entre les deux types de structures est mal définie et on observe dans certains cas des régimes hybrides au sein de la cellule. Enfin, on peut noter l'absence de telles structures lorsque l'eau et les grains coulent dans la même direction.

### 3 Dynamique des rides à tourbillons

#### 3.1 Comportement général

Chaque expérience est filmée et chaque image est traitée afin d'extraire la hauteur de l'interface  $h(x, t)$ , où  $x$  est l'abscisse dans la cellule et  $t$  le temps. Cette hauteur est ensuite codée en niveaux de gris (crêtes claires, creux foncés) et reportée sur le diagramme spatiotemporel de la figure 4. Les bandes correspondent à la trajectoire des rides dans le plan  $(x, t)$ : celles-ci se propagent avec une vitesse constante.

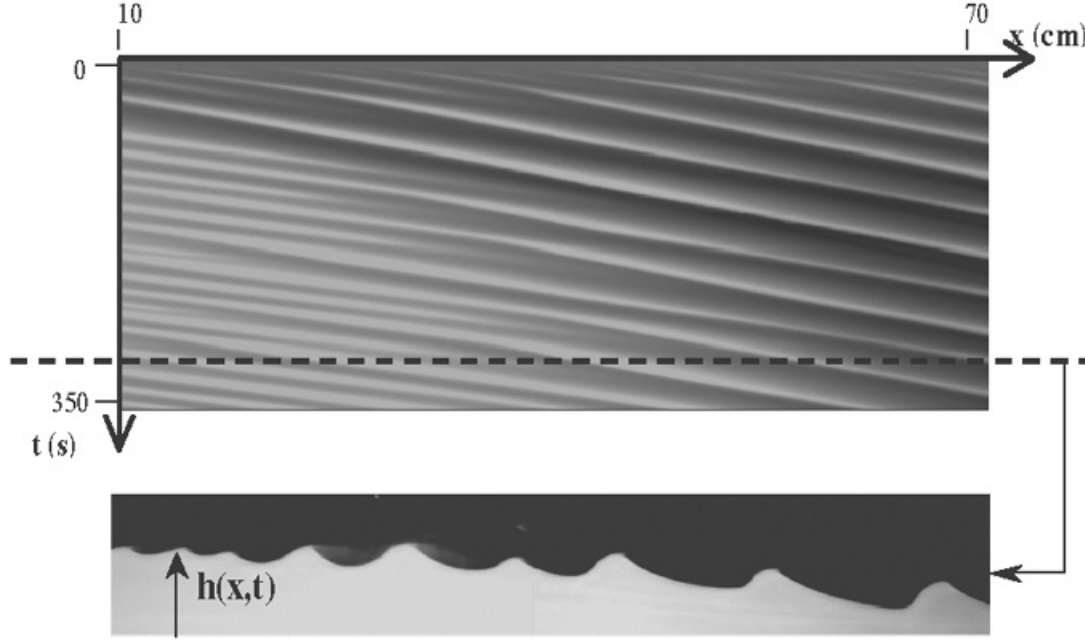


FIG. 4 – Diagramme spatiotemporel:  $h(x, t)$  est codé sur 256 niveaux de gris ( $d = 112 \mu\text{m}$ ,  $\beta = 38^\circ$ ,  $\theta = 0.3$ ). La photo du bas montre l'aspect caractéristique de l'interface aux temps longs ( $t \sim 300\text{s}$ ). Le débit de particules global est négatif, des grains se sont accumulés au bas de la pente et l'interface moyen n'est plus parallèle à l'axe de la cellule.

Aux temps courts, les rides apparaissent simultanément tout au long de la cellule avec une longueur d'onde initiale  $\lambda \sim 12\text{mm}$ , et croissent rapidement en amplitude selon une loi exponentielle (voir figure 5). Après plusieurs doubléments de période, les structures saturent à cause de non-linéarités et sont alors caractérisées par une unique longueur d'onde  $\lambda_{sat}$ , amplitude  $A_{sat}$  et vitesse de phase  $c$ . Ce comportement diffère du cas des rides triangulaires observées dans le même dispositif et dont la croissance est algébrique aux temps courts et logarithmique aux temps longs, sans phénomène de saturation. Le cas

des rides à tourbillons est ainsi consistant avec un modèle d'instabilité linéaire pour deux fluides en contre-écoulement.

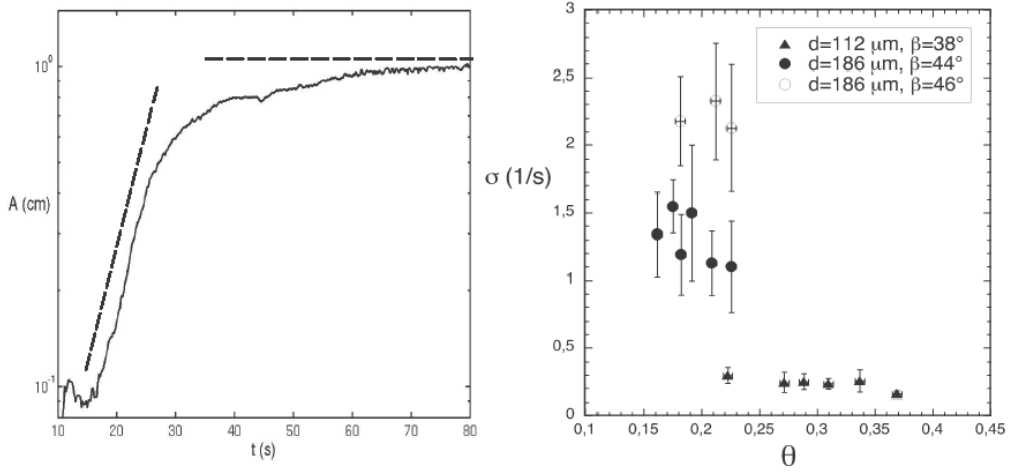


FIG. 5 – Amplitude d'une structure suivie au cours du temps, en coordonnées semi-logarithmiques. La pente de la courbe aux temps courts donne le taux de croissance temporel des structures  $\sigma$ , qui dépend peu de  $\theta$  mais beaucoup de  $d$  et  $\beta$

Aux temps longs, les structures saturent partout dans la cellule sauf près du point d'injection d'eau, où de petites rides propagatives naissent continuellement. Ce phénomène est bien illustré au bas de la figure 4: en s'éloignant du point d'injection, les structures présentent une croissance spatiale exponentielle en amplitude puis saturent.

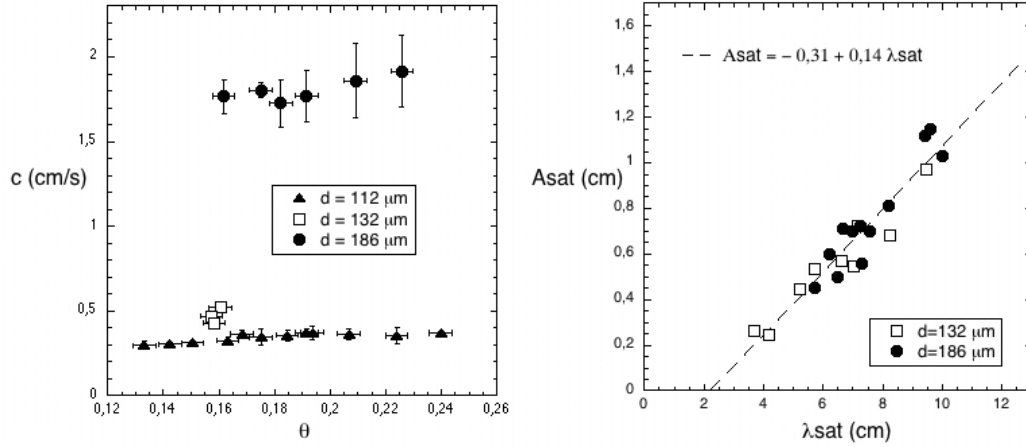
### 3.2 Croissance aux temps courts

A partir des données spatio-temporelles, nous sommes capable de suivre chaque ride de façon lagrangienne. L'évolution temporelle de l'amplitude d'une ride est présentée sur la droite de la figure 5 avec une échelle semi-logarithmique. On distingue bien les deux régimes. La pente de la partie linéaire de la courbe correspond au taux de croissance temporel  $\sigma$  aux temps courts. Nous avons rassemblé les valeurs moyennes de  $\sigma$  mesurées pour plusieurs expériences sur la courbe à gauche de la figure 5. D'après ces données expérimentales, le taux de croissance dépend peu du nombre de Shields mais est fortement influencé par l'angle d'inclinaison et le diamètre des particules  $d$ .

### 3.3 État saturé

A saturation, pour chaque valeur de  $\beta$ ,  $\theta$  et  $d$ , les structures sont caractérisées par une unique longueur d'onde  $\lambda_{sat}$ , amplitude  $A_{sat}$  et vitesse de phase  $c$ . Nous avons mesuré les valeurs moyennes de ces grandeurs loin de l'injection de fluide et suffisamment longtemps après le début de l'expérience de façon à observer le régime saturé. Ces valeurs sont reportées sur la figure 6.

La vitesse de phase  $c$  est faiblement influencée par le débit d'eau et l'angle d'inclinaison, mais en revanche dépend fortement du diamètre des particules. L'amplitude moyenne des ondes saturées semble corrélée à la longueur d'onde pour différentes valeurs de  $\beta$ ,  $\theta$  et  $d$ .

FIG. 6 – *Grandeurs à saturation pour différents paramètres  $\beta$ ,  $\theta$  et  $d$* 

## 4 Conclusion

Nous avons étudié la stabilité d'une pente granulaire soumise à un cisaillement hydrodynamique continu. Au-delà de l'angle d'avalanche, nous avons montré l'existence de rides à tourbillons pour un écoulement remontant la pente suffisamment intense. Ces structures se propagent toujours dans le sens du courant par un mécanisme d'érosion et dépôt. Aux temps courts, les rides apparaissent de façon homogène dans toute la cellule et croissent exponentiellement vite. Le taux de croissance temporel est peu influencé par le débit mais dépend davantage de l'angle d'inclinaison et du diamètre. Les ondes saturent ensuite, avec une vitesse de phase, une amplitude et une longueur d'onde constantes tout au long de la cellule excepté à l'entrée où l'on observe un effet de fetch, comme lors de la formation des vagues en mer. En variant le diamètre des particules, le débit d'eau et l'angle d'inclinaison, nous avons observé une corrélation entre l'amplitude et la longueur d'onde indépendamment de ces différents paramètres. La vitesse de phase dépend quant à elle essentiellement du diamètre des grains.

## Références

- [1] J. R. L. Allen, *Sand waves: a model of origin and internal structures*, Sediment. Geol., Vol. 26, pp. 281-328, 1980.
- [2] Damgaard J.S., Whitehouse R.J.S., and Soulsby R.L., *Bed-load sediment transport on steep longitudinal slopes*, J. Hydraulic Eng., ASCE 123, No.12, pp. 1130-1138, 1997.
- [3] F. Charru and H. Mouilleron-Arnould, *Instability of a bed of particles sheared by a viscous flow*, J. Fluid Mech., Vol. 452, pp. 303-323, 2002.
- [4] S. Courrech du Pont, P. Gondret, B. Perrin and M. Rabaud, *Granular avalanches in Fluids*, Phys. Rev. Lett., Vol. 90, 044301, 2003a.
- [5] E. Herbolzheimer, *Stability of the flow during sedimentation in inclined channels*, Phys. Fluids, Vol. 26, pp. 2043-2054, 1983.
- [6] P. Gondret, N. Rakotomalala, M. Rabaud, D. Salin and P. Watzky, *Viscous Parallel Flows in Finite Aspect Ratio Hele-Shaw Cell: Analytical and Numerical Results*, Phys. of Fluids, Vol. 9, pp. 1841-1843, 1997.

## Modélisation des processus de maintien et de développement du copépode *Eurytemora affinis* dans l'estuaire de la Seine

G. Dur, S. Souissi, F. G. Schmitt et D. Devreker

UMR ELICO, Station Marine de Wimereux

BP 80, 28 av. Foch, 62930 Wimereux

sami.souissi@univ-lille1.fr

### Résumé

Dans l'estuaire de la Seine, le copépode (zooplancton crustacé) *Eurytemora affinis* peut atteindre de fortes densités dépassant d'un ordre de grandeur les densités observées dans les autres estuaires européens. Cette espèce possède plusieurs mécanismes d'adaptation physiologique et comportementale lui permettant de maintenir sa population. Elle est considérée comme espèce clef pour développer des indicateurs biologiques dans le programme régional Seine-Aval (<http://seine-aval.crihan.fr/>). Les efforts expérimentaux (*in vivo* et *in vitro*) développés récemment pour étudier le cycle de vie de cette espèce nous permettent actuellement d'envisager la phase de modélisation afin de comprendre et tenter de quantifier la dynamique de cette espèce soumise à des forçages physiques se déroulant à différentes échelles spatio-temporelles.

Dans un premier temps, l'analyse de données a montré l'importance des processus biophysiques se déroulant à deux échelles temporelles très différentes. Tout d'abord le maintien de la population s'explique à l'échelle du cycle de la marée, car cette espèce développe un comportement natatoire variable en fonction de la direction et de l'intensité des courants induits par la marée. A l'échelle annuelle, c'est la température qui influence la reproduction de cette espèce et explique l'apparition du maximum de densité en début d'été de chaque année. Les processus non-linéaires identifiés ont été formulés et introduits dans un modèle individu-centré basé sur les systèmes multi-agents. Par la suite, une étude de sensibilité du modèle aux paramètres démographiques clefs (reproduction, survie) a permis de confirmer les stratégies de maintien de cette espèce.

### Introduction

Les écosystèmes marins présentent une grande complexité aussi bien spatiale que temporelle, sur une grande gamme d'échelles. L'action intermittente de la marée se conjugue avec l'activité biologique : le maintien du plancton, dont les mouvements sont assez limités, dépend ainsi du milieu dans lequel il se trouve. Une telle influence du milieu conduit à des mécanismes d'adaptation et le zooplancton (plancton animal) a développé des stratégies comportementales et physiologiques afin d'utiliser au mieux l'intermittence de son milieu. Nous nous attarderons ici sur le comportement d'une espèce de copépode (petit crustacé zooplanctonique) de l'estuaire de la Seine : *Eurytemora affinis* qui est confrontée à l'hydrodynamisme dû au cycle de marée. L'estuaire de la Seine est le plus grand estuaire macrotidal se jetant dans la Manche et présente un intérêt écologique et économique majeur. Plusieurs travaux réalisés dans le cadre du programme Seine Aval ont montré qu'*E. affinis* pouvait représenter, en terme de densité, entre 50% et 100% du mésozooplancton [1]. Le présent travail est ainsi consacré à l'utilisation de l'approche numérique combinant l'analyse de données *in situ* et le développement d'un modèle de dynamique de population pour expliquer les mécanismes clefs du maintien de la population. Nous étudions dans un

premier temps ces mécanismes de maintien à deux échelles temporelles : inférieures à 1 jour et la saison. Les informations tirées de cette étude permettent par la suite de modéliser la dynamique de la population grâce à une technique de simulation utilisant une approche stochastique. L’approche individu-centré dont il est question ici permet de tenir compte de la variabilité individuelle existant au sein des populations [2]. Enfin, nous présentons quelques résultats du modèle sous diverses hypothèses de base permettant de mettre en évidence l’importance de la mortalité et de la fécondité comme facteurs contrôlant la réussite du maintien de la population.

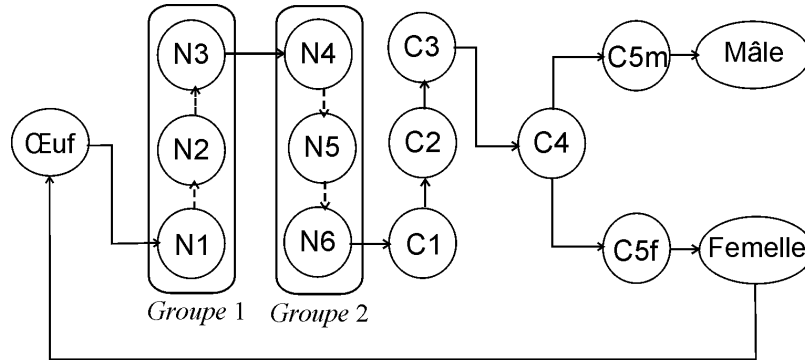


FIG. 1 – Schéma conceptuel du modèle du cycle de vie du copépode *Eurytemora affinis*. Celui-ci est composé de 13 stades de développement : 1 stade oeuf, 6 stades larvaires (nauplii), 5 stades juvéniles (copépodites) et un stade adulte mature.

## 1 Matériels et méthodes

Afin de déterminer la répartition à petite échelle des différents stades de développement d’*E. affinis*, un échantillonnage à haute fréquence dans l’estuaire de la Seine au niveau du pont de Normandie a été effectué à bord du navire océanographique “Côte d’Aquitaine”. Des prélèvements toutes les 10 minutes, à 3 profondeurs ont été réalisés à l’aide de bouteilles Niskin de 5 l. Par la suite les différents stades de développement d’*E. affinis* pour chaque échantillon ont été identifiés et énumérés.

Afin de réaliser la phase de modélisation, nous avons utilisé la plate-forme MOBIDYC (acronyme de MOdélisation Basée sur les Individus pour la DYnamique des Communautés) basée sur le concept multi-agent et dédiée au domaine de dynamique de populations [2]. Partant de l’agent de base très simple fourni par la plate-forme, l’utilisateur crée ses propres agents, agents de la communauté biologique, agents cellules formant l’espace ou agents non-situés responsables de tâches plus générales, en ajoutant de nouveaux attributs pour compléter leur état et des tâches pour fixer leur comportement. Les caractéristiques informatiques et l’architecture de Mobidyc ont été publiées récemment [2] et [3] ainsi qu’une nouvelle application sur les copépodes [4, 5].

La Figure 1 montre la trajectoire biologique d’un individu de la population du copépode. Les copépodes ont un dimorphisme sexuel avec une reproduction externe par accouplement. Un seul stade reproducteur permet de produire des oeufs. Après éclosion un individu doit passer successivement par 6 stades larvaires (dits nauplii) et 5 stades juvéniles (dits copépodites) avant d’atteindre le stade adulte. La structure d’un agent par défaut ne



contient qu'une seule tâche (vieillir) et trois attributs (âge, localisation et nombre). Dans notre exemple, des attributs et tâches supplémentaires sont nécessaires pour compléter la définition du modèle. La représentation de la survie (ou la mort) des individus est faite d'une façon stochastique. Nous avons utilisé des résultats des expériences en laboratoire réalisées à la Station Marine de Wimereux ainsi qu'une synthèse de la littérature pour estimer les paramètres démographiques du modèle à une température de 15 deg C (temps de développement moyen par stade et taux de ponte). Le temps de développement moyen de l'éclosion au stade adulte varie entre 24 et 28 jours, dans le dernier stade mature la longévité maximale est autour d'un mois. Les détails de développement du modèle de copépode sont présentés dans Souissi et al. [5].

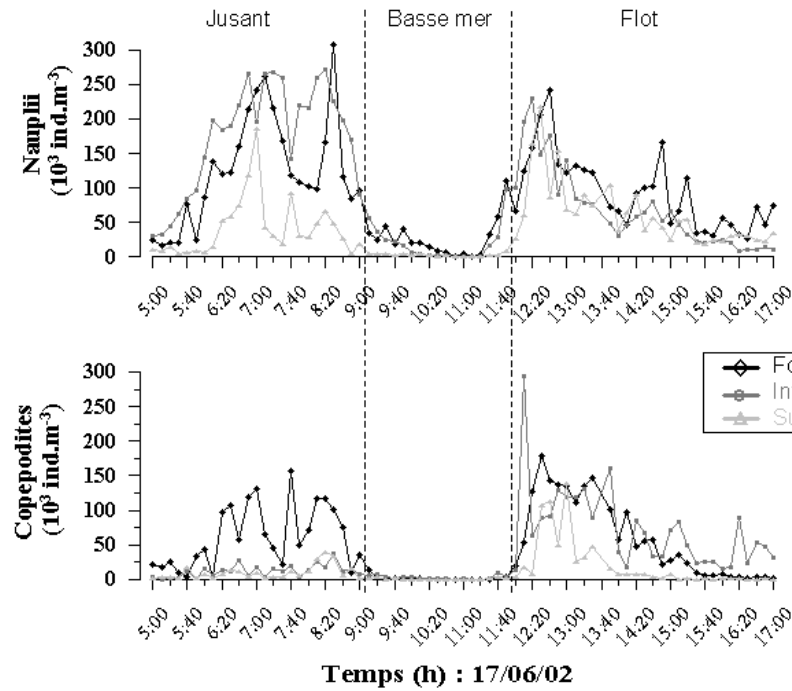


FIG. 2 – Distribution temporelle à trois profondeurs différentes des nauplii et copépodites d'*E. affinis* pendant un cycle de marée.

## 2 Résultats

### 2.1 Résultats expérimentaux: mécanismes de maintien de la population d'*E. affinis* à l'échelle du cycle de marée

Au cours du cycle de marée la densité des stades larvaires (nauplii) et des stades juvéniles et adulte (copepodites) d'*E. affinis* subit de fortes variations reliées au cycle de marée. Pendant le jusant, un gradient vertical de faibles valeurs en surface vers les fortes densités près du fond est observé (Fig. 2). Les forts pics de densité ont été obtenus au fond. Durant le jusant les deux pics correspondent à des salinités comprises entre 10 et 18 PSU. A la fin du jusant et au début de la basse mer les densités diminuent fortement avec la salinité et la hauteur de la colonne d'eau puis elles deviennent très faibles lors de la basse mer lorsque le courant et la salinité deviennent quasiment nuls. Au début du flot,

dès que le courant s'inverse et augmente d'intensité, les densités d'*E. affinis* au fond et en surface augmentent rapidement. Lors de cette deuxième phase de marée la différence entre les densités de surface et de fond est faible comparée à la période du jusant.

Afin de tester l'hypothèse de migrations verticales en fonction du cycle de marée nous avons considéré le pourcentage d'individus en surface par rapport au total (fond+surface). La Figure 3 montre que cet indice appliqué aux stades nauplii de faibles capacités nata-toires (particules passives) et au copépodites est différent au début du flot. Il est intéressant de signaler la mise en évidence directe du mouvement de migration active vers le fond des stades plus âgés (Fig. 3). Ceci confirme le schéma général proposé par Morgan et al. [6] pour expliquer le maintien de cette population au niveau des estuaires à régime mégatidal. Toutefois, l'utilisation des premiers stades larvaires, souvent négligés dans les autres études offre un moyen quantitatif pour confirmer ces mécanismes de maintien. Ces stades très passifs peuvent rencontrer de fortes fluctuations de salinité. Une étude récente sur la même espèce a montré la forte capacité d'adaptation physiologique des stades nauplii pour survivre et se développer dans une large gamme de salinité [7].

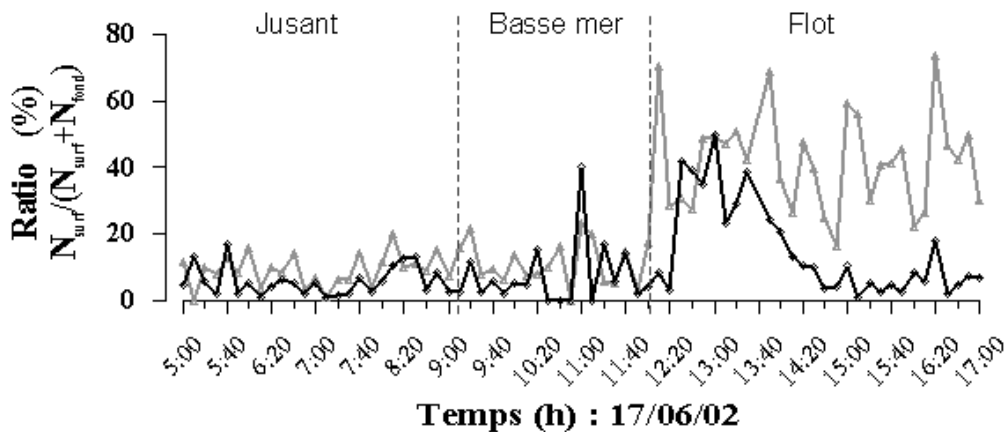


FIG. 3 – Variation temporelle du pourcentage d'individus en surface comparée à la somme d'abondance en surface et au fond. Ce ratio appliqué aux nauplii (en gris clair ; considérées comme des particules passives) et aux adultes et copépodites (en noir ; avec des capacités nata-toires) met en évidence un comportement actif des stades de développement avancés.

## 2.2 Résultats numériques: influences de divers facteurs sur la population

*Influence de la fécondité et de la mortalité sur le cycle de vie des copépodes.* A une échelle de temps supérieure à la journée, en plus de la marée, d'autres mécanismes affectent les processus démographiques de la population d' *E. affinis*. L'abondance de cette espèce augmente considérablement au printemps et au début de l'été dans tous les estuaires européens [1]. Cette augmentation est due à une forte activité de reproduction au printemps, puisque la fécondité de cette espèce est maximale autour de 15 deg C [8]. Avant de développer un modèle complet couplant tous ces processus physiques et biologiques nous avons voulu tester la sensibilité du modèle individu-centré à certains paramètres démographiques clefs : la fécondité des femelles et leur probabilité de survie ainsi que la probabilité de survie des premiers stades nauplii.

*Simulation des effets d'une baisse de fécondité et de la survie des femelles.* Les effets

d'une diminution du taux de ponte sur la dynamique d'*E. affinis* ont été simulés. La Figure 4 montre que cette réduction de ponte de 20% engendre une quasi-extinction de la population à partir de la deuxième génération. Une baisse des effectifs dans tous les stades similaire au test numérique précédent a été observée sous l'effet d'une baisse de la survie des femelles par 5% (Fig. 4).

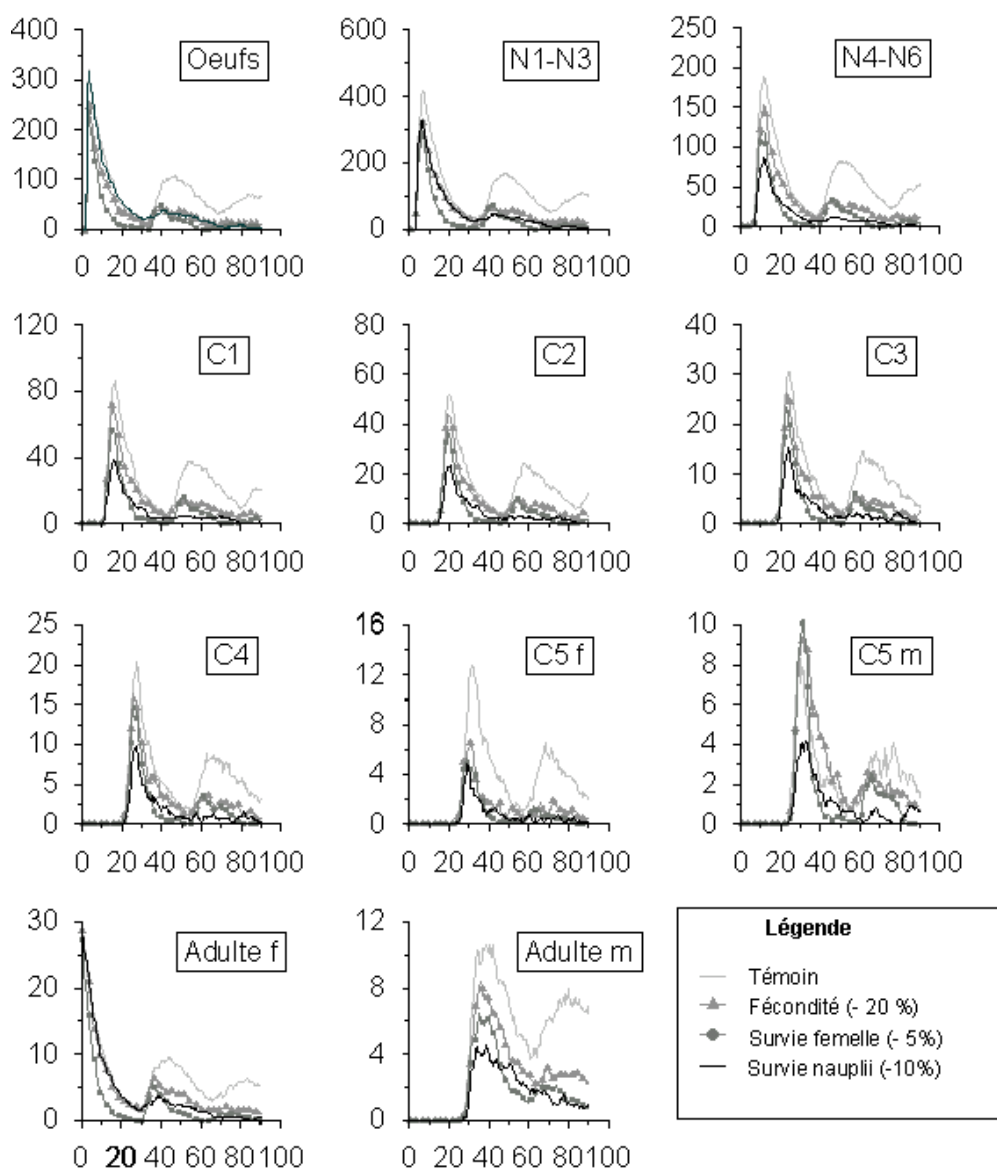


FIG. 4 – Simulation des effets de la fécondité, de la survie des adultes femelles et celle des jeunes nauplii (N1-N3) sur le développement de la population d'*Eurytemora affinis* sur une période de trois mois. Les autres conditions et paramètres du modèle sont identiques pour chaque expérience. Ces dernières sont comparées à un témoin (simulation de base à température constante de 15 deg C).

*Influence de la survie des jeunes nauplii.* Les premiers stades nauplii (N1-N3) sont soumis à la pression de prédation et aux pertes dues aux transports hors de la zone optimale de développement. Afin de prendre en compte au mieux la vulnérabilité de ce stade, la probabilité de survie des nauplii a été diminuée plus fortement que celle des femelles (10%).

La Figure 4 montre que la première génération d'oeufs présente des effectifs comparables à ceux du témoin. Une diminution de ces derniers n'est observée qu'à partir du stade N1-N3 confirmant encore une fois le bon fonctionnement du modèle. De ce fait, on ne considérera que les stades postérieurs au stade N1-N3 pour les comparaisons. Dans l'ensemble des stades, on ne remarque pas la présence d'une seconde génération. A cela s'ajoute une diminution considérable des effectifs (environ 50%) par rapport au témoin (Fig. 4).

### 3 Conclusion et perspectives

Le copépode *Eurytemora affinis* est l'espèce la plus abondante dans de nombreux estuaires d'Europe et d'Amérique du Nord. Cette espèce possède plusieurs mécanismes d'adaptations physiologique et comportementale à de fortes fluctuations de salinité, de température et d'hydrodynamisme. Ces mécanismes se déroulent à différentes échelles spatio-temporelles. Les réponses biologiques aux forçages physiques, étudiées *in situ* et au laboratoire sont fortement non-linéaires. L'approche de modélisation individu-centrée utilisée ici tient compte de la variabilité individuelle et permet de paramétriser les différents processus démographiques. Sur les deux paramètres étudiés, il semble que la probabilité de survie des nauplii joue un rôle plus important que celle des femelles dans la dynamique des populations.

### Références

- [1] P. Mouny, J.-C. Dauvin, *Environmental control of mesozooplankton community structure in the Seine estuary (English Channel)*, Oceanol. Acta, **25**, 13-22 (2002).
- [2] V. Ginot, C. Le Page, S. Souissi, *A multi-agents architecture to enhance end-user individual-based modelling*, Ecol. Model., **157**, 23-41 (2002).
- [3] D. Houssin, S. Bornhofen, S. Souissi, V. Ginot, *Entre programmation par composants et langages d'experts*, Tech. Sci. Infor., **21**, 525-548 (2002).
- [4] S. Souissi, L. Seuront, F. G. Schmitt, V. Ginot, *Describing space-time patterns in aquatic ecology using IBMs and scaling and multiscaling approaches*, Nonlin. Analysis: Real World Applications (soumis).
- [5] S. Souissi, V. Ginot, L. Seuront, S.-I. Uye, *Using multi-agent systems to develop individual based models for copepods*, in *Handbook of Scaling Methods in Aquatic Ecology*, L. Seuront et P. Strutton (eds.) CRC Press (2004), pp. 527-546.
- [6] C. A. Morgan, J. R. Cordell, C. A. Simenstad, *Sink or swim? Copepod population maintenance in the Columbia River estuarine turbidity-maxima region*, Mar. Biol., **129**, 309-317 (1997).
- [7] D. Devreker, S. Souissi, L. Seuront, *Development and mortality of the first naupliar stages of Eurytemora affinis under different conditions of salinity and temperature*, J. Exp. Mar. Biol. Ecol., sous presse (2004).
- [8] S. Gasparini, J. Castel, X. Irigoien, *Impact of suspended particulate matter on egg production of the estuarine copepod, Eurytemora affinis*, J. Mar. Sys., **22**, 195-205 (1999).

## Solitons dynamiques dans un oscillateur paramétrique optique contrapropagatif pompé en continu

C. Durniak<sup>1</sup>, M. Taki<sup>1</sup> et C. Montes<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Laboratoire de Physique des Lasers, Atomes et Molécules, Université des Sciences et Technologies de Lille, F-59655 Villeneuve d'Ascq Cedex, France.*

<sup>2</sup> *Laboratoire de Physique de la Matière Condensée, Université de Nice - Sophia Antipolis, Parc Valrose, F-06108 Nice Cedex 2, France.*

durniak@phlam.univ-lille1.fr

### Résumé

Notre étude concerne la mise en évidence de solitons dynamiques dans un Oscillateur Paramétrique Optique en quasi-accord de phase où les champs signal et complémentaire sont en contrapropagation par rapport à un champ de pompe continu. Dans le cas dégénéré, l'analyse de stabilité prouve que les solutions stationnaires inhomogènes, non linéaires sont temporellement instables quelque soit la longueur de la cavité ou la puissance de pompe injectée. On montre numériquement que la dispersion de vitesse de groupe donne naissance, à partir d'un champ continu à une structure dynamique stable modulée d'une durée de l'ordre de la picoseconde. Dans le cas non dégénéré sans dispersion, contrairement au cas dégénéré, les solutions stationnaires inhomogènes subissent une bifurcation de Hopf pour une longueur de cavité critique. Au delà de cette valeur critique, la différence des vitesses de propagation des champs signal et complémentaire permet la génération d'une structure solitonique stable.

## 1 Introduction

La génération d'impulsions ultra-courtes dans des cavités pompées en continu est principalement associée au blocage de modes dans des cavités en présence de milieux actifs telles que les fibres dopées. Notre but est de proposer un autre mécanisme de génération d'impulsions dans une cavité optique passive par l'interaction de trois ondes contrapropagatives. L'Oscillateur Paramétrique Optique (OPO) en quasi-accord de phase est une source de rayonnement cohérent continûment accordable sur une plage de longueurs d'onde allant de l'ultra-violet à l'infra-rouge. La géométrie des guides d'onde augmente considérablement la conversion d'énergie en confinant les champs sur de grandes longueurs d'interaction. Cependant, la réalisation du quasi-accord de phase entre les champs contrapropagatifs dans un milieu de forte susceptibilité non linéaire d'ordre deux nécessite l'emploi d'un réseau de pas sub-micrométrique. Jusqu'à présent, des domaines de période de l'ordre du micron ont été obtenus; ce qui reste insuffisant pour assurer un accord de phase dans des conditions optimales de fonctionnement. Cependant, des expériences récentes sur la génération de second-harmonique ont pallié à ce problème en utilisant des pas d'ordre supérieur [1]. Un tel milieu quadratique peut générer des ondes solitaires dont la structure temporelle est déterminée par une compensation entre les taux d'échanges énergétiques et le désaccord des vitesses des trois ondes. La configuration en contrapropagation génère spontanément des impulsions solitaires d'une durée de l'ordre de la picoseconde à partir du bruit quand le milieu quadratique est placé dans une cavité résonnante.

Nous présentons tout d'abord différentes configurations d'OPO en quasi-accord de phase,

proche de la dégénérescence dont la cavité est doublement résonnante pour les champs signal et complémentaire en contrapropagation par rapport à la pompe. Ensuite, pour le cas dégénéré, nous montrons que l'amplification inconditionnelle des solutions non linéaires stationnaires inhomogènes est saturée par la dispersion, conduisant à une structure temporelle modulée. Enfin, nous présentons l'influence du walk-off temporel (différence des vitesses de groupe des champs signal et complémentaire) dans la compétition entre les structures solitoniques et les solutions stationnaires inhomogènes. Cette étude révèle, en particulier, l'existence d'une zone de stabilité de ces dernières solutions. Au-delà de ce domaine, sous l'effet d'un walk-off temporel, elles bifurquent, via une instabilité de Hopf vers des structures stables de type soliton.

## 2 L'Oscillateur Paramétrique Optique contrapropagatif

Dans une configuration proche de la dégénérescence, l'évolution spatio-temporelle des enveloppes lentement variables dans une cavité en anneau est donnée par le système [2] :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \xi} + \gamma_p \tau_o + i\tilde{\beta}_p \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\right) A_p &= -2A_s A_c \\ \left(\frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{v_s}{v_p} \frac{\partial}{\partial \xi} + \gamma_s \tau_o + i\tilde{\beta}_s \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\right) A_s &= (1+d) A_p A_c^* \\ \left(\frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{v_c}{v_p} \frac{\partial}{\partial \xi} + \gamma_c \tau_o + i\tilde{\beta}_c \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\right) A_c &= (1-d) A_p A_s^* \end{aligned} \quad (1)$$

où  $A_p(\omega_p, k_p)$ ,  $A_s(\omega_s, k_s)$  et  $A_c(\omega_c, k_c)$  représentent respectivement les amplitudes de pompe continue, des champs signal et complémentaire contrapropagatifs, renormalisées par rapport à l'amplitude de pompe incidente  $A_p^o$ .  $\tau$  et  $\xi$  sont les variables temporelle et spatiale exprimées en grandeurs caractéristiques  $\tau_o = 2/(\sigma_p A_p^o)$  et  $\Lambda = v_p \tau_o$ . Les conditions de résonance pour une configuration à une dimension sont

$$\omega_p = \omega_s + \omega_c ; \quad k_p = -k_s - k_c + 2\pi/\Lambda_{QPM}$$

avec  $\Lambda_{QPM}$  le pas du réseau pour le quasi-accord de phase. L'atténuation optique est donnée par  $\gamma_j$ . On suppose que les vitesses de groupe de la pompe et du signal sont identiques ( $v_p = v_s$ ) mais restent différentes de la vitesse du complémentaire  $v_c$ . Les coefficients de couplage non linéaire sont  $1 \pm d$  avec  $d = \frac{\sigma_s - \sigma_c}{\sigma_p}$ ,  $\sigma_j = 2\pi d_{eff} v_j / (\lambda_j n_j)$ ,  $n_j$  est l'indice de réfraction aux fréquence  $\omega_j$  et longueur d'onde  $\lambda_j$  ( $j = p, s, c$ ),  $d_{eff}$  est la susceptibilité non linéaire effective d'ordre 2. La dispersion chromatique est également prise en compte dans les équations (1) par le paramètre  $\tilde{\beta}_j = |v_j| k_j'' / \tau_o$  où  $k_j'' = (\partial^2 k / \partial \omega^2)_j$ ,  $k$  étant le module du vecteur d'onde  $k = n(\omega)\omega/c$ . Dans la suite, on utilise les variables  $u_j(\xi, \tau)$  définies par  $u_p = \sqrt{1-d^2} A_p$ ,  $u_s = \sqrt{2(1-d)} A_s$ ,  $u_c = \sqrt{2(1+d)} A_c$ .

La description complète de la dynamique de l'OPO est obtenue en ajoutant aux équations (1), les conditions aux limites pour la configuration doublement résonnante sur le signal et le complémentaire avec même coefficient de réflexion en amplitude  $\rho = \sqrt{R}$ :

$$u_s(L, \tau) = \rho u_s(0, \tau), \quad u_c(L, \tau) = \rho u_c(0, \tau), \quad u_p(0, \tau) = \sqrt{1-d^2}. \quad (2)$$

### 2.1 Solutions stationnaires inhomogènes

En l'absence de dispersion ( $\beta_j = 0$ ) et d'atténuation ( $\gamma_j = 0$ ), les solutions stationnaires inhomogènes  $u_j^{st}(\xi)$ ,  $j = \{p, s, c\}$  sont calculées à partir du système (1) en posant

$\partial/\partial\tau = 0$ . L'hypothèse d'absence de perte  $\gamma_j$  n'est pas restrictive car la dissipation dans une cavité d'OPO provient principalement de la réflexion. Dans ce cas, le système admet les relations de conservation suivantes (ou relations de Manley-Rowe) :

$$|u_p^{st}|^2 - |u_s^{st}|^2 = |u_p^{st}|^2 - \alpha|u_c^{st}|^2 = \pm D^2 \quad (3)$$

Ceci conduit à deux types de solutions stationnaires. Nous nous limitons ici au cas où  $D^2 = |u_s^{st}|^2 - |u_p^{st}|^2 = \alpha|u_c^{st}|^2 - |u_p^{st}|^2$  en supposant la cavité courte ( $D\xi \ll 1$ ) afin d'éviter la déplétion totale de la pompe et de bénéficier de la partie linéairement croissante du gain dans la cavité. Sinon, la paire signal - complémentaire oscille et retransmet une partie de l'intensité à la pompe. Ainsi, à l'ordre le plus bas, un calcul direct permet d'obtenir les expressions suivantes des solutions stationnaires :

$$u_p^{st}(\xi) \simeq \frac{u_p^{st}(0) - D^2 \frac{\xi}{\sqrt{\alpha}}}{1 + u_p^{st}(0) \frac{\xi}{\sqrt{\alpha}}} \quad \text{et} \quad u_s^{st}(\xi) = \sqrt{\alpha} u_c^{st}(\xi) \simeq \frac{\sqrt{D^2 + u_p^{st2}(0)}}{1 + u_p^{st}(0) \frac{\xi}{\sqrt{\alpha}}} \quad (4)$$

## 2.2 Analyse de stabilité linéaire

Nous procédons à l'analyse de stabilité linéaire des solutions stationnaires inhomogènes (4) par rapport à des perturbations spatio-temporelles en l'absence de dispersion et d'atténuation. Pour cela, on pose  $u_j(\xi, \tau) = u_j^{st}(\xi) + \delta u_j(\xi) e^{-i\omega\tau}$ ,  $j = p, s, c$ ; le problème linéarisé associé au système (1) s'écrit

$$\frac{d}{d\xi} \begin{pmatrix} \delta u_p \\ \delta u_s \\ \delta u_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\omega & -u_c^{st}(\xi) & -u_s^{st}(\xi) \\ -u_c^{st}(\xi) & -i\omega & -u_p^{st}(\xi) \\ -u_s^{st}(\xi)/\alpha & -u_p^{st}(\xi)/\alpha & -i\omega/\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta u_p \\ \delta u_s \\ \delta u_c \end{pmatrix} \quad (5)$$

Résoudre les équations perturbatives (5) avec les solutions stationnaires inhomogènes (4), en tenant compte des conditions aux limites de la cavité se ramène à un problème aux valeurs propres avec une relation de dispersion vérifiée par la fréquence complexe  $\omega$ . Nous déterminons la stabilité des modes de cavité de fréquence  $\Re(\omega) \simeq 2\pi N/L$  [ $N$  entier et  $L$  longueur sans dimension]. Les modes instables sont ceux pour lesquels  $\Im(\omega) > 0$ . Cette approche est appliquée dans la suite à différentes configurations.

## 3 Cas dégénéré

Dans cette partie, les champs signal et complémentaire ont même fréquence et même polarisation ( $d = 0$ ). Le changement de variable  $U(\xi) = \delta u_s(\xi)/u_s^{st}(\xi)$  découple les perturbations de chaque champ et conduit à l'expression du problème aux valeurs propres sous la forme d'une équation de Bessel

$$\frac{d^2 U}{d\xi^2} + [\omega^2 - 2u_s^{st}(\xi)^2] U(\xi) = 0$$

avec les conditions aux limites  $U(L) = U(0)$  et  $dU/d\xi(0) = -i\omega U(0)$  (il n'y a pas de perturbation initiale sur la pompe  $\delta u_p(0) = 0$ ) et dans la limite asymptotique  $\omega\xi \gg 1$ . La condition de solvabilité pour le couple de constantes d'intégration permet d'aboutir à la relation de dispersion :

$$a_o + b_o \sin(\omega L) + c_o \cos(\omega L) = 0 \quad (6)$$

$$\begin{aligned}
\text{avec } a_o &= \omega^3 y_L \\
b_o &= i\omega^3 y_L + a\omega^2 \left(1 - \frac{y_L}{y_o}\right) + \frac{ia^2\omega}{y_o} - \frac{ia(a-1)}{2}\omega y_L \left(\frac{1}{y_L^2} + \frac{1}{y_o^2}\right) + \frac{a^2(a-1)}{2y_L y_o} - \frac{a^2(a+1)}{2y_o^2} \\
&\quad + \frac{a(a-1)(a+3)y_L}{6y_o^3} - \frac{a(a-1)(a-3)}{6y_L^2} \\
c_o &= -\omega^3 y_L + ia\omega^2 \left(1 - \frac{y_L}{y_o}\right) - \frac{a^2\omega}{y_o} + \frac{a(a+1)\omega y_L}{2y_o^2} + \frac{a(a-1)\omega}{2y_L} + \frac{ia^2(a-1)}{2y_o} \left(\frac{1}{y_L} - \frac{1}{y_o}\right) \\
&\quad + \frac{ia(a-1)(a-3)y_L}{6} \left(\frac{1}{y_o^3} - \frac{1}{y_L^3}\right) \\
a &= 1 + D^2, \quad y_L = 1 + L, \quad y_o = 1.
\end{aligned}$$

La figure 1a représente pour différentes longueurs de cavité l'évolution du taux de croissance temporelle  $\Im(\omega)$  en fonction du coefficient de réflexion en intensité  $R$  où  $\omega$  est solution de (6), proche du mode fondamental ( $\Re(\omega) \simeq 2\pi/L$ ). On constate que les solutions stationnaires inhomogènes sont toujours instables. Les simulations numériques montrent qu'aux temps longs, cette instabilité génère des structures solitoniques [4]. Au cours de leur amplification, l'amplitude de ces impulsions augmente alors que leur durée diminue. La dispersion, prise en compte dans l'intégration numérique de (1) sature cette évolution (Fig. 1b).

### 3.1 Effet de saturation : la dispersion de vitesse de groupe

La dispersion sature l'amplification temporelle du signal (Fig. 1b) et donne naissance à une structure temporellement modulée (Figure 1c). Afin de caractériser analytiquement ces structures (vitesse et période), nous utilisons l'approche formulée par Kolmogorov *et al.* [3] (ou méthode KPP) dont l'idée principale est de traiter l'onde solitaire comme un problème de propagation de front dans un milieu instable qui est décrit par la théorie de stabilité marginale. Cette démarche permet de déterminer la période de  $|A_s(\tau)|$ :

$$T = \frac{\pi\sqrt{2\tilde{\beta}_s}}{3^{1/4}(1 - \ln(\sqrt{R}))^{1/4} \left[2 - V + \frac{(V-1)^2}{4V}\right]} \quad \text{avec} \quad V = 1 + \frac{2^{5/2}\tilde{\beta}_s^{1/2}(1 - \ln(\sqrt{R}))^{3/4}}{3^{3/4}} \quad (7)$$

Pour la figure 1c, la formule (7) donne une période d'environ 4 ps, ce qui reste en bon accord avec son estimation numérique  $T \simeq 5$  ps. La dissymétrie du profil est due à la différence entre la vitesse de l'enveloppe ( $v_s$  renormalisée à 1) et la vitesse de la structure modulée  $V > v_s$ .

## 4 Cas non dégénéré

### 4.1 Cas sans walk-off temporel

En l'absence de walk-off temporel ( $\alpha = \frac{v_c}{v_p} = 1$ ), les champs signal et complémentaire ont la même vitesse de groupe. En procédant comme dans le cas dégénéré; nous aboutissons à la même expression de la relation de dispersion (6) avec cette fois  $a = 1 + \frac{D^2}{1-d^2}$ ,  $y_L = L + \frac{1}{\sqrt{1-d^2}}$ ,  $y_o = \frac{1}{\sqrt{1-d^2}}$ . Ceci nous permet de conclure que les solutions stationnaires inhomogènes sont toujours instables.



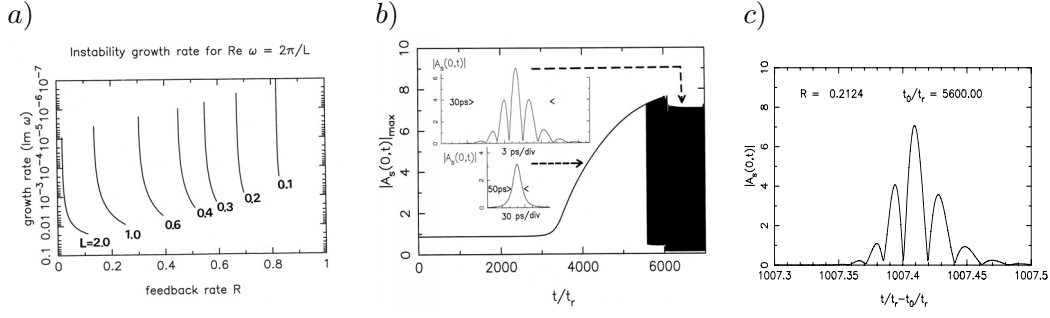


FIG. 1 – DOPO contrapropagatif : a) Taux de croissance temporelle  $\Im(\omega)$  du premier mode de cavité en fonction du coefficient de réflexion en intensité du signal pour différentes longueurs de propagation. b) Saturation de l'amplitude maximale du signal pour  $L = 1$ ,  $\tilde{\beta}_s = 5.10^{-6}$  et  $\sqrt{R} = 0.46$  et c) Profil du signal modulé temporellement.

## 4.2 Cas avec walk-off temporel

En tenant compte du walk-off  $\alpha = \frac{v_c}{v_p} \neq 1$ , la dynamique de la pompe et de la paire signal - complémentaire n'est plus découplée. Par conséquent, la méthode utilisée dans le paragraphe précédent qui consistait à séparer les variables n'est plus applicable. L'étude analytique du problème général est plus compliquée; c'est pourquoi, nous nous limitons au cas où  $D = 0$ . Comme le walk-off temporel est faible, on pose  $\alpha \simeq 1 + \epsilon$  et on développe les solutions de (5) au second ordre en  $\epsilon$ . Cet ordre de développement est nécessaire pour obtenir un bon accord quantitatif entre les valeurs prédites analytiquement et les valeurs des paramètres critiques déterminées à la bifurcation de Hopf à partir des résultats numériques de l'intégration du système (1); le premier ordre de développement étant insuffisant pour caractériser cette bifurcation. Grâce aux conditions aux limites, on obtient la relation de dispersion :

$$\begin{aligned}
 & \omega^3 y_o^2 y_L + \left[ -\omega^3 y_o^2 y_L - i\omega^2 y_o L + \omega L \right] \cos(\omega L) + \left[ i\omega^3 y_o^2 y_L + i\omega y_o - \omega^2 y_o L - 1 \right] \sin(\omega L) \\
 & - \frac{i\epsilon}{8y_L(y_o \rho_o - y_L e^{-i\omega L})} \left\{ A_o e^{-2i\omega L} + B_o e^{-i\omega L} + C_o e^{i\omega L} + D_o \right\} \\
 & - \frac{i\epsilon^2}{24y_L^2(y_o \rho_o - y_L e^{-i\omega L})} \left\{ A_1 e^{-2i\omega L} + B_1 e^{-i\omega L} + C_1 e^{i\omega L} + D_1 \right\} = 0
 \end{aligned} \quad (8)$$

avec  $y_o = 1/\sqrt{1-d^2}$ ,  $y_L = y_o + L$  et  $\rho_o = y_o/y_L$  le coefficient de réflexion en amplitude. Les différents coefficients  $A_o$ ,  $A_1$ ,  $B_o$ ,  $B_1$ ,  $C_o$ , et  $C_1$ , qui sont fonction de  $\omega = \Re(\omega) + i\Im(\omega)$ ,  $y_L$ , et  $y_o$  ont maintenant des expressions plus compliquées, détaillées dans la référence [2]. Néanmoins, en annulant  $\epsilon$  on retrouve la relation de dispersion du cas sans walk-off avec  $D = 0$  [ $a = 1$  dans l'Eq. (6)]. Contrairement au cas dégénéré, il existe une zone de stabilité des solutions stationnaires inhomogènes. Ces solutions subissent une bifurcation de Hopf, même proche de la configuration dégénérée, pour une valeur critique de la longueur de cavité. La figure 2a donne un exemple de cette déstabilisation pour  $L_{crit} \simeq 0.39$ ,  $d = 0.05$  et  $\epsilon = 1/128$ . A partir de l'équation (8), nous avons tracé le taux de croissance temporelle  $\Im(\omega)$  du mode fondamental en fonction de la longueur de cavité  $L$ . Il en résulte que pour  $L \leq L_{crit}$ , les solutions stationnaires inhomogènes sont stables alors que pour  $L > L_{crit}$ , les perturbations sont amplifiées.

Afin de vérifier ces résultats, nous avons intégré numériquement les équations (1) sans

dispersion à partir des solutions stationnaires inhomogènes approchées (4) avec les conditions aux limites (2),  $d = 0.05$ , une différence de vitesse de groupe  $|v_s - v_i|/v_p = 1/128$  et une faible dissipation ( $\gamma_j/\tau_o = 10^{-2}$ ). Dans cette configuration, le coefficient de réflexion  $R = |\rho|^2$  est simplement relié à la longueur  $L$  par  $R = [1 + L\sqrt{(1 - d^2)/\alpha}]^{-2}$ . La dynamique de ce système peut donc être étudiée en variant le paramètre de contrôle  $L$ . Comme prévu par l'analyse de stabilité linéaire, le système subit une bifurcation de Hopf de l'état stationnaire vers un état oscillant pour une longueur critique  $L_{crit}$  comprise entre 0.35 et 0.4. Les profils stationnaires sont représentés sur la figure 2b après 16384 tours pour  $L \leq 0.35$ . La solution stationnaire bifurque vers un état oscillant, comme illustré sur la figure 2c pour  $L = 0.5$ .

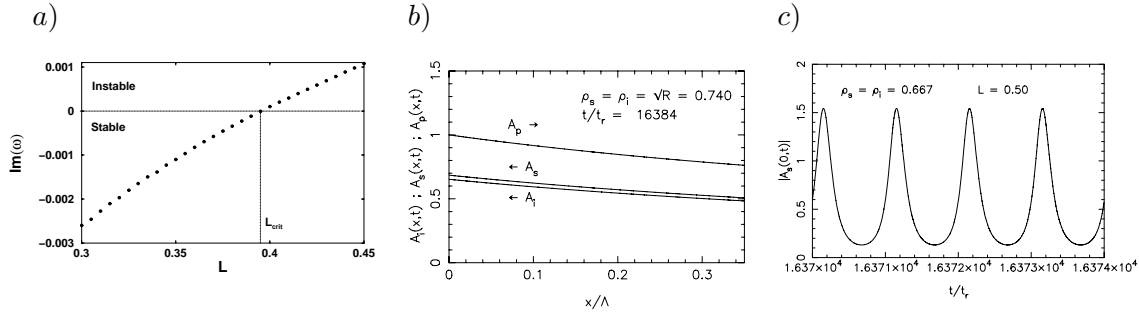


FIG. 2 – OPO doublement résonnant : a) Taux de croissance temporelle  $\Im(\omega)$  en fonction de la longueur de cavité  $L$  pour  $d = 0.05$ ,  $\epsilon = 1/128$ . Bifurcation de Hopf pour  $L_{crit} \simeq 0.39$ . b) Profils stationnaires transverses après 16384 tours de cavité pour  $L \leq L_{crit}$ . c) Régime temporellement oscillant pour  $L = 0.5 > L_{crit}$ .

## 5 Conclusion

Nous avons ainsi montré que dans un OPO contrapropagatif dégénéré, les solutions stationnaires inhomogènes sont toujours instables. Leur amplification est saturée par la dispersion qui génère des structures solitoniques modulées. Par contre, dans le cas de l'OPO doublement résonnant, même proche de la dégénérescence, un désaccord entre les vitesses de groupe des ondes signal et complémentaire (walk-off temporel) stabilise les solutions stationnaires dans un certain domaine de paramètres.

## Références

- [1] X. Gu, M. Makarov, Y.J. Ding, J.B. Khurgin et W.P. Risk, Opt. Lett. **24**, 127 (1999).
- [2] C. Durniak, C. Montes et M. Taki, à paraître dans J. Opt. B (2004).
- [3] V. Kolmogorov, L.G. Petrovskii et N.S. Piskunov, Bull. Univ. Moscow, Ser. Int. Sec. A **1** (1937).
- [4] C. Montes, C. Durniak, M. Taki et A. Picozzi, Opt. Comm. **216**, 419 (2003).

## Transport électrique non linéaire dans les milieux granulaires 1D

E. Falcon, B. Castaing et M. Creyssels

*Laboratoire de Physique, École Normale Supérieure de Lyon,*

*UMR 5672, 46, allée d'Italie, 69 007 Lyon, France*

Eric.Falcon@ens-lyon.fr - <http://perso.ens-lyon.fr/eric.falcon/>

### Résumé

Nous étudions le transport électrique dans une chaîne de billes métalliques oxydées, sous force statique appliquée, et soumise à une source électrique DC [1]. Une transition d'un état isolant vers un état conducteur est observée lorsque le courant appliqué augmente. Les caractéristiques symétriques tension - courant ( $U - I$ ) sont non linéaires et hystérétiques, saturant à faible tension par contact (de l'ordre de 0.4 V). Nous avons montré que cette transition de conduction résulte d'un couplage électro-thermique dans le voisinage des microcontacts entre chaque bille : l'écoulement du courant à travers ces petites zones engendre leur échauffement local qui conduit à une augmentation de leurs aires de contact, et donc de leur conduction. Cette augmentation de température (jusqu'à 1000 - 1200 °C) peut aller jusqu'à leur fusion locale (même pour une tension aussi faible que 0.4 V). Basée sur ce mécanisme de température auto-régulée, une expression analytique pour la trajectoire non linéaire de retour  $U - I$  a été obtenue en très bon accord avec les résultats expérimentaux. Elle permet aussi la détermination de la température des microcontacts sans paramètre ajustable, puisque cette dernière ne dépend ni des matériaux en contact, ni de la géométrie du contact.

L'effet Branly est une instabilité de conduction électrique qui apparaît au niveau des contacts entre les constituants d'une poudre métallique oxydée sous contrainte [2]. La résistance de l'échantillon, initialement élevée, chute de façon irréversible de plusieurs ordres de grandeur lorsqu'une onde électromagnétique est émise dans son voisinage. Découvert en 1890, cet effet à distance en regroupe d'autres, notamment lorsqu'une source électrique est directement appliquée à la poudre : une transition de conduction d'un état isolant à un état conducteur est observée lorsque la source dépasse un certain seuil, des fluctuations et des relaxations lentes de la résistance apparaissent au cours du temps sous certaines conditions [3, 4]. Bien qu'utilisés dès 1900 pour les premières transmissions radio sans fil, ces phénomènes de transport électrique dans un milieu granulaire restent sans explication parfaitement satisfaisante [4].

Depuis lors, plusieurs interprétations à l'échelle du contact ont été évoquées sans réelle démonstration : claquage diélectrique de la couche d'oxyde sur les grains [5], effet tunnel modifié à travers le métal - oxyde  $\sim$  semi-conducteur - métal [6], force cohésive entre grains de nature électrostatique ou moléculaire [7], soudure locale des microcontacts par effet Joule [8, 9] aussi appelée "fritting" [6]; chacun étant combiné avec un processus collectif de percolation [5, 7, 8]. Nous nous proposons ici de comprendre l'origine de cette transition de conduction électrique en nous basant sur une expérience modèle avec une chaîne de billes [1]. Nous chercherons à démêler les effets locaux (contacts entre grains) des effets collectifs (*e.g.*, désordre typique d'un granulaire) pouvant être responsable de cet effet Branly.

Comprendre la transition de conduction électrique dans les milieux granulaires métalliques est un problème complexe dépendant d'un nombre important de paramètres globaux relatifs à l'assemblée de grains (*e.g.*, distribution de forme, de taille, de pression),

et locaux relatifs au contact entre 2 grains (*e.g.*, degré d'oxydation, état de surface, rugosité). Parmi les phénomènes proposés ci-dessus pour expliquer la cohération, certains apparaissent comme des contributions secondaires : puisque la cohération a aussi été observée par Branly pour un contact unique entre 2 grains [10], la percolation ne peut pas être évoquée ici. De même, lorsque 2 billes en contact sont placées en série avec une pile, une cohération est observée pour une tension imposée suffisamment élevée [11], de façon similaire à l'action à distance d'une étincelle électromagnétique. Ainsi, nous réduisons ici délibérément le nombre de paramètres, sans perdre en généralité, en étudiant le transport électrique d'une chaîne de  $N$  billes métalliques directement soumise à une source électrique continue.

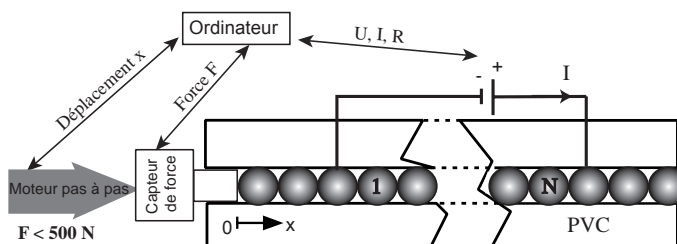


FIG. 1 – Schéma du dispositif expérimental pour l'étude du transport électrique non linéaire dans la chaîne de billes.

Le dispositif expérimental est schématisé en Fig. 1 : 50 billes identiques en acier inoxydable, de 8 mm de diamètre et  $0.1\text{ }\mu\text{m}$  de rugosité, sont placées à l'intérieur d'un bâti en PVC. Un moteur pas à pas permet de comprimer la chaîne jusqu'à une force statique  $F < 500\text{ N}$ , et de mesurer à l'aide d'un compteur la déformation totale de la chaîne,  $x$ , pour atteindre cette force. Lors d'une expérience typique, nous choisissons d'imposer à la chaîne une source de courant ( $1\text{ }\mu\text{A} \leq I \leq 1\text{ A}$ ) et de simultanément mesurer la tension  $U$ , et donc la résistance  $R = U/I$ . Des résultats similaires sont obtenus en imposant la tension et en mesurant  $I$  et  $R$ . Le nombre  $N$  de billes situées entre les "billes électrodes" peut varier de 1 à 41 en déplaçant les 2 billes électrodes au sein de la chaîne. Il est à noter que la plus basse résistance de la chaîne mesurée (quelques  $\Omega$ ) est bien plus grande que celle des fils soudés aux électrodes ou celle de l'acier inoxydable pur. Le comportement mécanique de la chaîne de billes est mesuré en très bon accord avec la loi non linéaire de Hertz (issue de l'élasticité linéaire), c'est-à-dire :  $F \propto x^{3/2}$ . Cela permet une estimation de l'échelle de déformation entre 2 billes de l'ordre de 2 à  $20\text{ }\mu\text{m}$ , et du rayon de contact apparent,  $A$ , de 40 à  $200\text{ }\mu\text{m}$ , pour des forces de compression de 10 à 500 N. Le comportement électrique est beaucoup plus surprenant ! Aucun soin particulier n'ayant été apporté aux billes, leur contact n'est pas métallique et la présence d'un film isolant (oxyde et/ou contaminant) de quelques nanomètres d'épaisseur est probable. Lorsque le courant appliqué à la chaîne augmente, nous observons une transition d'un état isolant vers un état conducteur, comme le montre la figure 2. A force fixée et à faible courant, la caractéristique tension - courant ( $U - I$ ) est réversible et ohmique (flèche 1), la résistance ayant une valeur constante élevée  $R_0$ . Cette résistance à bas courant ( $R_0 \sim 10^4 - 10^7\Omega$ ) dépend d'une façon complexe de la force appliquée et des propriétés (épaisseur, résistivité) du film contaminant à l'endroit des contacts. Lorsque  $I$  augmente suffisamment, la résistance décroît fortement pour que la tension aux bornes des billes reste à une valeur constante  $U_0$  (flèche 2). Dès lors que cette tension de saturation  $U_0$  est atteinte, la caractéristique devient irréversible lorsque le courant est diminué (flèche 3) : la trajectoire de retour est réversible et la résistance atteinte

à bas courant décroissant,  $R_{0b}$  (de l'ordre de  $1 - 10 \Omega$ ), dépend de l'intensité maximale précédemment imposée  $I_{max}$  (flèches 3), à la manière d'un effet mémoire. La trajectoire de retour non linéaire réversible est aussi symétrique, lorsque le sens du courant appliqué à la chaîne est renversé (flèches 4 et 5). En répétant cette boucle symétrique jusqu'à différents  $I_{max}$  imposés (flèche en trait plein et en pointillé), et pour diverses forces  $F$ , on montre que les trajectoires de retour ne dépendent que de  $I_{max}$ , et suivent la même trajectoire de retour dans un diagramme  $U$  fonction de  $R_{0b}I$  (cf. encart de la Fig. 2).

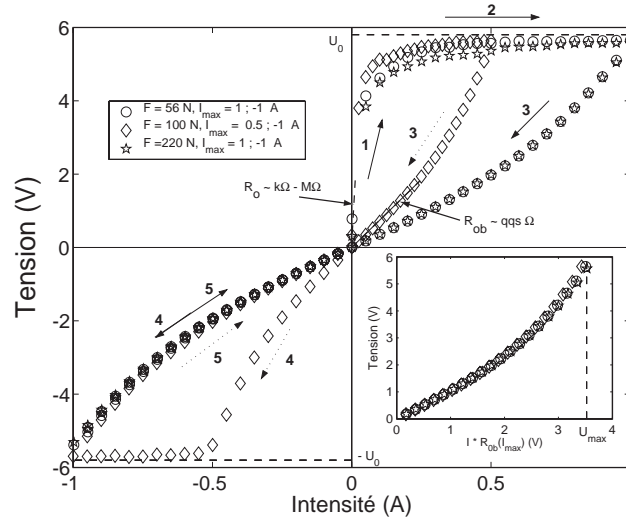


FIG. 2 – Caractéristiques  $U - I$  symétriques d'une chaîne de  $N = 13$  billes pour des cycles d'intensité appliquée compris entre  $-I_{max}$  et  $+I_{max}$ , pour différentes forces  $F$ . L'encart montre les trajectoires de retour réversibles normalisées par  $R_{0b}$ .  $U_{max} \equiv R_{0b}I_{max} \simeq 3.5$  V (voir texte).

La chute de résistance observée, de plusieurs ordres de grandeur (de  $R_0$  à  $R_{0b}$ ), a des propriétés similaires à l'effet Branly observé avec de la poudre [2] ou avec un contact unique [10, 11]. Il est à noter qu'après chaque cycle en intensité, la force de compression est ramenée à zéro et nous faisons rouler les billes le long de l'axe de la chaîne pour renouveler les contacts entre les billes pour le cycle suivant. Avec cette méthodologie, la chute de résistance (effet Branly ou effet cohéreur), et la tension de saturation sont toujours observées et sont bien reproductibles. Cette tension de saturation  $U_0$  est indépendante de la force appliquée, mais dépend du nombre de billes  $N$  entre les électrodes. Lorsque  $N$  varie entre 1 et 41, la tension de saturation par contact  $U_{0/c} \equiv U_0/(N + 1)$  est constante de l'ordre de 0.4 V par contact. Cependant, cette tension de saturation dépend faiblement du matériau constituant les billes ( $U_{0/c} \simeq 0.4$  V pour les billes en acier inoxydable ; 0.2 V pour des billes en bronze ; 0.3 V pour des billes en laiton), mais reste du même ordre.

Supposons un contact mécanique entre 2 sphères métalliques couvertes par une fine couche isolante. L'interface ainsi constituée est généralement composée d'un ensemble dilué de microcontacts du fait de la rugosité des surfaces à une échelle spécifique. Le rayon moyen,  $a$ , de ces microcontacts est de l'ordre de grandeur de la rugosité typique des billes  $\sim 0.1 \mu\text{m}$ , qui est bien plus faible que le rayon de contact apparent de Hertz,  $A \sim 100 \mu\text{m}$ . La Fig. 3 montre schématiquement l'établissement du contact électrique par transformation de ce film faiblement conducteur. A faible courant appliqué, la résistance élevée du contact ( $k\Omega - M\Omega$ ) provient d'un chemin de conduction trouvé par les électrons

injectés dans le film à travers une toute petite zone ( $\ll 0.1 \mu\text{m}$ ) de chaque microcontacts (cf. zones grisées en Fig. 3). Le courant d'électrons modifie alors l'état du film et produit un "canal conducteur" : du fait du resserrement des lignes de courant au passage des microcontacts, un échauffement par effet Joule s'établit dans leurs voisinages. Le rayon des microcontacts augmente alors fortement de plusieurs ordres de grandeur (*e.g.*, de  $a_i \ll 0.1 \mu\text{m}$  à  $a_f \sim \text{qqs } 10 \mu\text{m}$ ), et par conséquent la résistance des contacts diminue alors fortement. Ceci conduit à une caractéristique non linéaire (flèche 1 jusqu'à 2 en Fig. 2). A plus grand courant, ce processus électro-thermique peut aller jusqu'à la soudure locale des microcontacts (flèche 2 en Fig. 2), le film isolant est alors "percé", et des petites zones de contacts purement métalliques (de quelques  $\Omega$ ) se forment (cf. zones noires en Fig. 3). La caractéristique de retour  $U - I$  est alors réversible (flèche 3 en Fig. 2) en diminuant puis en augmentant  $I$ , car la taille finale  $a_f$  des microcontacts ne varie plus, puisqu'ils ont été soudés. La courbe de retour  $U - I$  dépend alors uniquement de la température du pont métallique via ses paramètres (conductivités électrique et thermique) et non plus via sa taille comme précédemment.

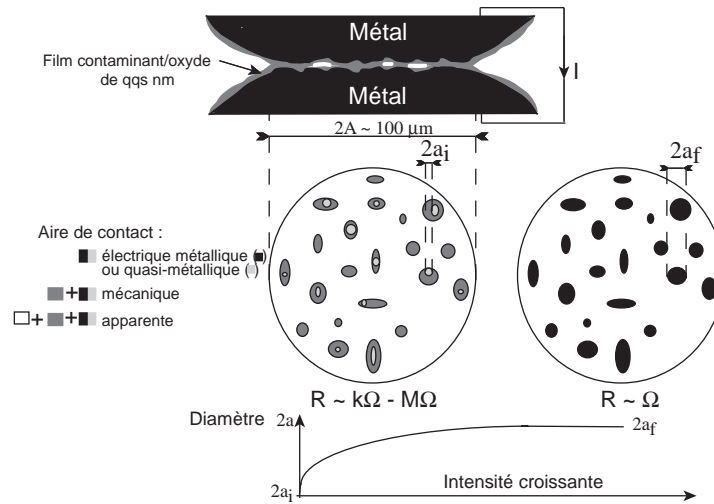


FIG. 3 – Vue schématique de la construction du contact électrique à travers des ponts par transformation du film d'oxyde/contaminant faiblement conducteur. A faible intensité  $I$ , le contact électrique est essentiellement régi par un mécanisme de conduction complexe à travers ce film via des canaux conducteurs (de sections augmentant avec  $I$ ); tandis qu'à  $I$  suffisamment grand, un couplage electro-thermique engendre une soudure locale des microcontacts conduisant à la création de ponts métalliques bon conducteurs (de section constante).

Nous allons maintenant justifier quantitativement cette interprétation. Supposons un microcontact entre 2 conducteurs métalliques (thermiquement isolé à une température  $T_0$ , et sans film contaminant à leurs surfaces pour simplifier), généralement appelé "spot". Si un courant électrique suffisant traverse ce spot pour produire un échauffement Joule, supposé totalement dissipé par conduction thermique dans les conducteurs, une distribution de température d'équilibre s'établit alors très rapidement ( $\sim \mu\text{s}$ ) au voisinage de ce contact. La température maximale atteinte  $T_m$  se trouve au contact, et est liée à la tension appliquée  $U$  selon  $T_m^2 - T_0^2 = U^2/(4L)$ , où  $L = \pi^2 k^2/(3e^2) = 2.4510^{-8} \text{ V}^2/\text{K}^2$  est la constante de Lorentz faisant intervenir la constante de Boltzmann,  $k$ , et la charge de

l'électron,  $e$ . Cette relation issue de l'équilibre thermique et de la loi d'Ohm montre que la température maximale atteinte au contact ne dépend pas des matériaux en contact, ni de la géométrie du contact ! Ceci a pour origine le fait que la résistivité électrique  $\rho_{el}(T)$  et la conductivité thermique  $\lambda(T)$  d'un conducteur sont toutes deux liées aux électrons de conduction, imposant ainsi que leur dépendance respective avec la température,  $T$ , soit  $\lambda\rho_{el} \sim T$ . Ainsi, une tension de 0.4 V appliquée aux bornes d'un contact conduit à une température  $T_m$  proche de 1000°C, pour  $T_0 = 20^\circ\text{C}$  (cf. l'équation ci-dessus reliant  $U$  à  $T_m$ ). Cela signifie que  $U \simeq 0.3 - 0.4$  V conduit à une température de contact qui excède le point de ramollissement et/ou de fusion de la plupart des conducteurs. Des ponts métalliques sont ainsi créés par microsoudure. Outre l'accord quantitatif avec la tension critique expérimentale  $U_{0/c}$  (cf. Fig. 2), cette équation montre aussi pourquoi  $U_{0/c}$  est le paramètre pertinent dans les expériences et non pas l'amplitude du courant imposé. De plus, lorsque  $U$  approche  $U_{0/c}$  sur la Fig. 2, l'échauffement local est suffisant d'après l'équation ci-dessus pour ramollir les microcontacts. Ainsi, leurs aires de contact augmentent, conduisant à une diminution des résistances locales, stabilisant alors la tension, les températures et les aires des microcontacts, puisque l'intensité est fixée. Le phénomène est donc auto-régulé en tension et en température.

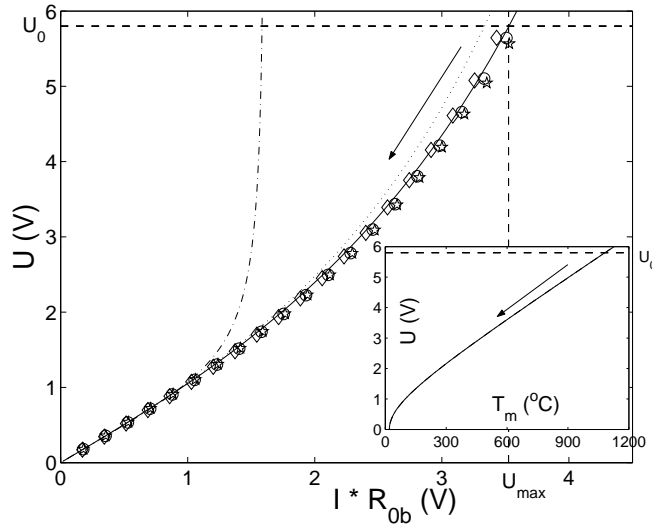


FIG. 4 – Trajectoires expérimentales de retour normalisées de la Fig. 2 (symboles) comparées aux courbes théoriques obtenues dans le cas d'un alliage en acier inoxydable [ $\alpha^{-1} = 2T_0$  (—) et  $1.46T_0$  (···)] ou pour un métal pur (—.). L'encart montre la température maximale théorique,  $T_m$ , atteinte dans un contact lorsque la chaîne de 13 billes en acier inox est soumise à une tension  $U$ .

Basée sur ce couplage électro-thermique, une expression analytique pour la trajectoire non linéaire de retour  $U - I$  a été obtenue. Là encore, cette expression ne dépend pas de la géométrie du contact, ni du type de métal utilisé pour le contact (pour 2 métaux en contact) ! Cependant, dans le cas d'alliages en contact, elle dépend du coefficient de température de la résistivité  $\alpha$  propre à l'alliage, paramètre lié aux défauts présents dans l'alliage. Les trajectoires expérimentales de retour  $U - I$  normalisées (*i.e.*,  $U$  en fonction  $IR_{0b}$  de l'encart de la Fig. 2) sont alors comparées sur la Fig. 4 avec les solutions théoriques dans le cas des métaux purs, et d'un alliage d'acier inoxydable AISI 304. Un très bon accord est trouvé notamment pour le cas de l'alliage. Qualitativement, la solution pour

le cas de l'alliage possède une meilleure courbure que la solution métal pur. L'accord est quantitativement excellent (cf. Fig. 4) en prenant  $\alpha^{-1} = 2T_0$  au lieu de  $1.46T_0$  (la valeur pour de l'acier inox AISI 304) ; celle pour l'acier inox AISI 420 constituant les billes utilisées étant inconnue, mais doit être proche. Durant cette trajectoire de retour expérimentale, la température d'équilibre,  $T_m$ , au microcontact est déduite de l'équation du paragraphe ci-dessus, sans aucun paramètre ajustable (voir encart de la Fig. 4). Ainsi, lorsque la tension critique est atteinte ( $U_0 = 5.8$  V),  $T_m$  est proche de 1000 - 1200°C, qui est suffisant pour ramollir ou faire fondre les microcontacts entre les  $N = 13$  billes de la chaîne.

En conclusion, nous avons étudié le transport électrique dans une chaîne de billes métalliques oxydées sous force statique appliquée. Une transition d'un état isolant vers un état conducteur est observée lorsque le courant appliqué augmente. La caractéristique  $U - I$  est non linéaire hystérétique et sature à faible tension par contact (0.4 V). Les phénomènes électriques dans les matériaux granulaires reliés à cette transition de conduction tels que l'effet Branly ont été précédemment interprétés de différentes façons mais sans réelle démonstration. Ici, nous avons montré que cette transition, déclenchée par la tension de saturation, résulte d'un couplage électro-thermique dans le voisinage des microcontacts entre chaque billes : l'écoulement des lignes de courant à travers ces petites zones engendre leur échauffement local qui conduit à une augmentation de leurs aires de contact, et donc de leur conduction. Cette augmentation de température (jusqu'à 1000 - 1200°C) peut aller jusqu'à leur fusion locale (même pour une tension aussi faible que 0.4 V). L'expression analytique est obtenue pour la trajectoire non linéaire de retour  $U - I$  en très bon accord avec les résultats expérimentaux. Elle permet aussi la détermination de la température des microcontacts sans paramètre ajustable.

## Remerciements

Nous remercions D. Bouraya pour la réalisation mécanique du dispositif expérimental, et G. Kamarinos pour l'envoi de ses articles [5].

## Références

- [1] E. Falcon, B. Castaing & M. Creyssels, à paraître dans Eur. Phys. J B (2004) (cf. Cond-Mat/0311453).
- [2] E. Branly, C. R. Acad. Sc. Paris **111**, 785 (1890).
- [3] E. Falcon, B. Castaing & C. Laroche, Europhys. Lett. **65**, 186 (2004).
- [4] E. Falcon & B. Castaing à paraître dans le Bull. de la S.F.P. **143** ou **144** (2004).
- [5] G. Kamarinos, P. Viktorovitch & M. Bulye-Bodin, C. R. Acad. Sc. Paris **280**, 479 (1975).
- [6] R. Holm, *Electrical Contacts*, Springer-Verlag, 4th Ed. (2000).
- [7] R. Gabillard & L. Raczy, C. R. Acad. Sc. Paris **252**, 2845 (1961), G. Salmer & R. Gabillard, C. R. Acad. Sc. Paris **262**, 1043 (1966).
- [8] D. Vandembroucq, A. C. Boccarda & S. Roux, J. Phys. III **7**, 303 (1997).
- [9] S. Dorbolo, M. Ausloos & N. Vandewalle, Phys. Rev. E **67**, 040302(R) (2003).
- [10] E. Branly, C. R. Acad. Sc. Paris **134**, 1197 (1902); **134**, 347 (1902); **128**, 1089 (1899)
- [11] K. Guthe & A. Trowbridge, Phys. Rev. **11**, 22 (1900); K. Guthe, Phys. Rev. E **12**, 245 (1901)



## Similaritons Raman

Christophe Finot<sup>1</sup>, Guy Millot<sup>1</sup> et John Dudley<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Laboratoire de Physique de l'Université de Bourgogne, UMR 5027,  
9 Avenue A. Savary, BP 47 870, 21078 Dijon Cédex*

<sup>2</sup> *Laboratoire d'Optique P.M. Duffieux,  
Université de Franche-Comté, 25 030 Besançon  
christophe.finot@u-bourgogne.fr*

### Résumé

Depuis leur prédiction et leur mise en évidence expérimentale [1], les similaritons optiques dans les fibres ont généré un intérêt considérable. Des études théoriques [2] ont révélé qu'avec l'action simultanée de la dispersion normale, de la non linéarité et d'un gain, toute impulsion acquiert progressivement un profil d'intensité parabolique et un chirp linéaire. L'impulsion se propage alors de manière autosimilaire, subissant une croissance exponentielle simultanée de son amplitude et de sa largeur temporelle. L'un des atouts notables de ces impulsions particulières est de résister aux effets du wave-breaking optique [3], principale limite aux puissances maximales utilisables [4]. Cette nouvelle classe de solutions asymptotiques présente de plus la propriété remarquable d'être indépendante de la forme initiale de l'impulsion. Nous détaillons ici les aspects théoriques et expérimentaux de la génération de similaritons optiques dans une fibre à dispersion normale aux longueurs d'onde des télécommunications optiques par l'utilisation de l'amplification Raman. Les résultats expérimentaux montrent la génération d'une impulsion au profil parabolique et au chirp linéaire, en accord avec les prévisions théoriques [5]. Nous avons pu vérifier l'indépendance de cette impulsion vis-à-vis du profil de l'impulsion initiale, ainsi que sa capacité à se propager de façon stable dans une fibre à dispersion normale.

## 1 Le Similariton, impulsion aux propriétés remarquables

### 1.1 Une impulsion résistant au Wave-Breaking optique

L'évolution d'une impulsion d'amplitude  $\psi(t, z)$  dans une fibre optique sans perte ni gain peut se modéliser par l'équation de Schrödinger non-linéaire [6], prenant en compte  $\beta_2$  la dispersion d'ordre 2 et l'effet Kerr optique à travers le coefficient non-linéaire  $\gamma$ :

$$i \frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \gamma |\psi|^2 \psi, \quad (1)$$

Dans le régime de dispersion normale ( $\beta_2$  positif), les propriétés d'une impulsion de forte intensité sont rapidement détériorées par le phénomène de wave-breaking optique [4]. Néanmoins, dans le cas d'une impulsion  $\psi_p$  présentant un profil d'intensité parabolique et un chirp linéaire positif, effets dispersifs et non linéaires se combinent sans affecter la nature de l'impulsion initiale [3]:

$$\psi_p(t) = A_0 \sqrt{1 - \frac{t^2}{T_0^2}} e^{i(\varphi_0 - C_0 t^2)} \quad \text{si } |t| < T_0; \quad \psi_p(t) = 0 \quad \text{si } |t| > T_0, \quad (2)$$

avec  $A_0$ ,  $T_0$ ,  $\varphi_0$  et  $C_0$  représentant respectivement l'amplitude, la demi-largeur totale, une phase initiale arbitraire et le demi-chirp de l'impulsion.

La méthode de la Transformée de Fourier à pas divisé [6], qui considère successivement l'action, sur un pas  $dz$ , des effets linéaires puis non-linéaires, permet d'appréhender qualitativement comment une telle impulsion se propage sans perdre sa forme parabolique. Supposons, que, dans un premier temps, seuls les effets dispersifs agissent. Apparaît alors dans le domaine spectral un chirp supplémentaire:  $\tilde{\psi}_1(\omega) = \tilde{\psi}_0(\omega) e^{i \frac{\beta_2}{2} \omega^2 dz}$ , avec  $\tilde{\psi}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) e^{i \omega t} dt$ . Dans le domaine temporel, nous démontrons que, même si elle provoque un étalement, la dispersion n'altère pas la nature de l'impulsion  $\psi_p$ . En effet, après une distance  $dz$  et en supposant  $C_0$  important, l'amplitude de l'impulsion devient:  $\psi_{1p}(t) = A_1 \sqrt{1 - t^2/T_1^2} e^{i(\varphi_0 - C_1 t^2)}$ , avec  $A_1 = A_0/\sqrt{1 + 2\beta_2 C_0 dz}$ ,  $T_1 = (1 + 2\beta_2 C_0 dz)T_0$ ,  $C_1 = C_0/(1 + 2\beta_2 C_0 dz)$ . Si, dans un second temps, seule la non-linéarité joue, ses effets se traduisent dans le domaine temporel par l'apparition d'un déphasage supplémentaire:  $\psi_2(t) = \psi_1(t)e^{-i\gamma dz |\psi_1|^2}$ . Appliqué à  $\psi_{1p}$ , nous obtenons, avec  $\varphi_2 = \varphi_0 + \gamma |A_1|^2 dz$ ,  $C_2 = C_1 + \gamma |A_1|^2/T_1^2$ :

$$\psi_{2p}(t) = A_1 \sqrt{1 - \frac{t^2}{T_1^2}} e^{i(\varphi_2 - C_2 t^2)}, \quad (3)$$

Cette analyse montre donc qualitativement que la forme d'une impulsion parabolique de forte intensité dotée d'un chirp linéaire et positif reste conservée lors de la propagation et résiste donc aux effets du wave-breaking optique.

## 1.2 Autosimilarité et comportement asymptotique

Dans le paragraphe précédent, nous avons vu l'une des caractéristiques essentielles d'une impulsion parabolique. Reste cependant le problème de générer de telles impulsions. L'étude de la propagation d'une impulsion dans une fibre à dispersion normale avec gain fournit une réponse [2]. En effet, dans la mesure où les effets de dispersion et de saturation du gain peuvent être négligés, alors toute impulsion acquiert progressivement un profil d'intensité parabolique et un chirp linéaire positif. La modélisation de cette propagation revient à ajouter à l'équation 1 un terme de gain constant  $g$ :

$$i \frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \gamma |\psi|^2 \psi + i \frac{g}{2} \psi, \quad (4)$$

La solution asymptotique de cette équation est :

$$\psi_p(t, z) = A_p(z) \sqrt{1 - \frac{t^2}{T_p^2(z)}} e^{i(\varphi_p(z) - C_p t^2)} \text{ si } |t| < T_p(z) \quad ; \quad \psi_p(t) = 0 \text{ sinon}, \quad (5)$$

$$\text{avec } A_p(z) = A_0 e^{\frac{g}{3}z}, \quad A_0 = \frac{1}{2} \left( \frac{g U_{ini}}{\sqrt{\gamma \beta_2/2}} \right)^{1/3}, \quad U_{ini} = \text{énergie initiale},$$

$$T_p(z) = \frac{6\sqrt{\gamma \beta_2/2}}{g} e^{\frac{g}{3}z}, \quad \varphi_p(z) = \varphi_0 + \frac{3\gamma A_0^2}{2g} e^{\frac{2g}{3}z} \text{ et } C_p = \frac{g}{6\beta_2} \quad (6)$$

De ces expressions, deux points peuvent être soulignés :

- Amplitude et largeur temporelles de  $\psi_p$  évoluent suivant  $z$  dans un rapport constant, illustrant une évolution parfaitement autosimilaire.
- Seule l'énergie de l'impulsion initiale  $U_{ini}$  joue un rôle dans l'expression des caractéristiques de  $\psi_p$ . Les autres paramètres (amplitude, largeur ou forme) de l'impulsion initiale n'interviennent pas.

## 2 Le Similariton Raman

Pour produire le gain, il n'existe pas de contrainte sur le choix du processus amplificateur. Ainsi, si l'amplification basée sur des fibres dopées terres-rares a été la solution la plus explorée [1], il est néanmoins envisageable de recourir à la diffusion Raman.

### 2.1 Modélisation

Pour modéliser l'amplification Raman, nous recourrons à l'équation de Schrödinger non-linéaire sous sa forme généralisée [6], avec  $R(t)$  la réponse de la silice :

$$i \frac{\partial \psi}{\partial z} = -i \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + i \frac{\beta_3}{6} \frac{\partial^3 \psi}{\partial t^3} - \gamma \left[ 1 + \frac{i}{\omega_s} \frac{\partial}{\partial t} \right] \psi \int_0^\infty R(t') |\psi(z, t - t')|^2 dt', \quad (7)$$

Nous considérons un amplificateur basé sur 5,3 kilomètres de fibre dont les paramètres de dispersion à 1550 nm sont  $\beta_2 = 2.91 \cdot 10^{-3} \text{ps}^2 \text{m}^{-1}$  et  $\beta_3 = 1.09 \cdot 10^{-4} \text{ps}^3 \text{m}^{-1}$  et la non-linéarité  $\gamma = 2.23 \cdot 10^{-3} \text{W}^{-1} \text{m}^{-1}$ . Les pertes  $\alpha$  sont également incluses.  $\psi(z, t)$  est la superposition des champs signal  $\psi_s$  et pompe  $\psi_u$ , oscillant respectivement aux fréquences  $\omega_s$  et  $\omega_u$ , l'écart entre ces fréquences étant tel que le maximum du gain Raman soit à la longueur d'onde du signal  $\lambda_s = 1550 \text{ nm}$ . Les impulsions initiales  $\psi_s(0, t)$  ont une largeur temporelle pouvant varier entre 6 et 12 ps, pour une énergie fixe de 2.16 pJ. Nous utilisons une pompe continue  $\psi_u(0, t)$  d'une puissance de 1 W. Sur la figure 1.a nous représentons l'évolution du profil d'intensité d'une impulsion initiale de 10 ps aux caractéristiques déterminées expérimentalement. Nous vérifions que cette impulsion acquiert progressivement une forme parabolique et que sa largeur temporelle et son amplitude augmentent lors de la propagation si bien qu'après quelques kilomètres l'impulsion se comporte comme un similariton.

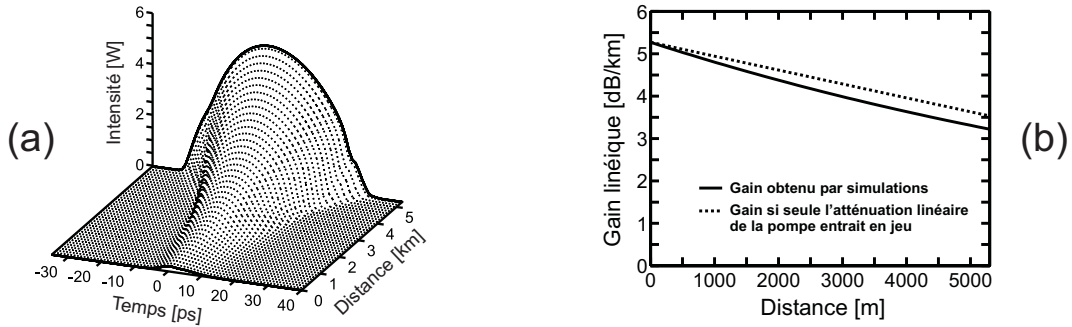


FIG. 1 – (a) Evolution du profil d'intensité de l'impulsion (b) Evolution du gain subi par l'impulsion (-). Evolution du gain si seule l'atténuation linéaire de la pompe jouait (·).

### 2.2 Comportement asymptotique

Nous comparons figure 1.b l'évolution du gain subi par l'impulsion avec le gain qui existerait si seule l'atténuation due aux pertes linéaires de la pompe jouait. L'écart restant modéré, on conclut que le gain subi une décroissance exponentielle due principalement aux pertes subies par la pompe dans la fibre. Le phénomène de déplétion de la pompe est donc limité, et cela en raison du phénomène de walk-off provoqué par la différence entre vitesses

de propagation du signal et de la pompe : le signal se propageant plus vite que la pompe voit celle-ci non encore déplétée. L'hypothèse d'un gain à décroissance longitudinale exponentielle s'écartant du modèle établi pour un gain constant, les prédictions des équations 5 et 6 ne sont plus rigoureusement exactes. En particulier, même si l'impulsion en sortie de fibre demeure parabolique et linéairement chirpée, elle n'est plus totalement indépendante des conditions initiales [7]. Nous obtenons néanmoins, avec les paramètres utilisés dans les expériences décrites ci-dessous, une quasi-indépendance de l'impulsion de sortie vis-à-vis des caractéristiques de l'impulsion d'entrée. Figure 2, nous avons représenté l'évolution de la largeur à mi-hauteur de l'impulsion en fonction de la distance de propagation pour trois impulsions différentes A, B et C de largeur initiale à mi-hauteur respectivement 6.2, 7.8 et 10.9 ps, de même énergie et dont les profils temporels sont représentés figure 4.a. Nous vérifions alors une convergence des propriétés du similariton généré vers une impulsion unique.

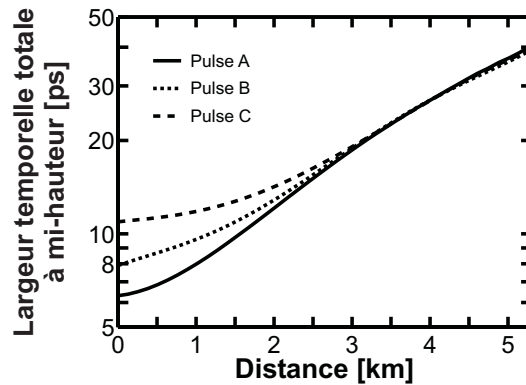


FIG. 2 – Evolution suivant  $z$  du paramètre de largeur temporelle à mi-hauteur pour trois impulsions différentes.

### 3 Résultats expérimentaux

#### 3.1 Génération de Similaritons Raman

Le dispositif expérimental de génération de similaritons est présenté figure 3.a. Il repose sur des éléments commerciaux, adaptés à une utilisation aux longueurs d'onde des télécommunications optiques. Les différents éléments ont des caractéristiques conformes à celles décrites précédemment. Un dispositif de caractérisation spectro-temporelle basée sur une autocorrélation résolue en fréquence de type FROG [8] permet de déterminer expérimentalement les profils d'intensité et de phase des impulsions d'entrée et de sortie : ils sont représentés figure 3.b. Le profil d'intensité et le chirp de l'impulsion après 5,3 km sont en accord respectivement avec un ajustement parabolique et linéaire si bien qu'on peut conclure à la génération d'un similariton optique. A titre comparatif, nous avons également inclus un ajustement par une gaussienne et par une sécante hyperbolique, démontrant ainsi que seule une forme parabolique prend correctement en compte la décroissance rapide des ailes de l'impulsion. Nous pouvons également noter l'excellent accord entre l'expérience et les simulations numériques.

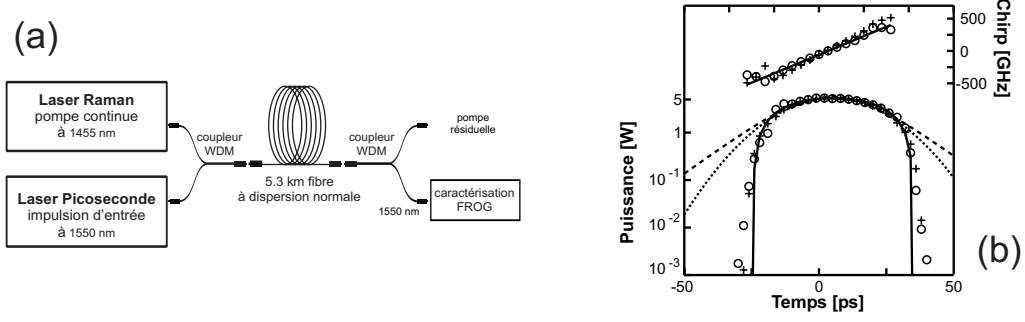


FIG. 3 – (a) Schéma expérimental de génération de similaritons. (b) Impulsion et chirp de l'impulsion obtenue caractérisée par FROG (o). Simulations numériques (+). Ajustements linéaires du profil de chirp et parabolique (–) de l'intensité. Comparaison avec des ajustements gaussiens (..) et  $\text{sech}^2$  (- -).

### 3.2 Influence de la forme de l'impulsion initiale

Pour vérifier expérimentalement l'indépendance des similaritons générés vis à vis des impulsions initiales, nous avons employé cinq impulsions initiales de même énergie mais de profils temporels différents : la largeur à mi-hauteur ainsi que l'assymétrie (caractérisée par la position du barycentre de l'impulsion par rapport à son maximum) varient. Trois de ces impulsions initiales sont représentées figure 4.a ainsi que les similaritons générés figure 4.b. La figure 4.c. résume l'ensemble des cinq mesures expérimentales qui démontrent une faible variation des paramètres du similariton généré, confirmant remarquablement les conclusions énoncées dans la partie 2.2 de ce cet article.

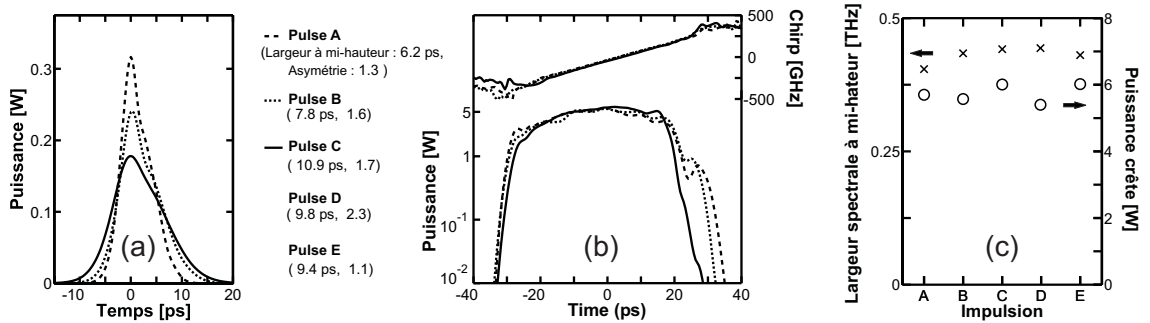


FIG. 4 – (a) Impulsions initiales (b) Impulsions en sortie de fibre (c) Largeur spectrale à mi-hauteur et intensité crête obtenues pour cinq impulsions de largeur temporelle et d'assymétrie différentes.

### 3.3 Propagation dans une fibre sans gain

Pour tester la capacité des similaritons à se propager dans une fibre à dispersion normale, nous générons de la même manière que précédemment un similariton optique représenté figure 5. Cette impulsion est alors injectée dans 800 m de fibre à dispersion normale  $\beta_2 = 2.33 \cdot 10^{-3} \text{ps}^2 \cdot \text{m}^{-1}$ , mais cette fois sans pompe Raman. L'impulsion de sortie est en très bon accord avec les prédictions des simulations et démontre toujours après 800 mètres une nature parabolique avec un chirp linéaire. L'élargissement temporel

nous empêche compte tenu de la plage de fonctionnement de notre système FROG d'effectuer une mesure expérimentale pour une plus longue distance de propagation. Nous avons donc extrapolé par simulations numériques les résultats après 4 kilomètres de propagation. Nous représentons figure 5.b le paramètre  $\Delta C$ , différence entre le profil de chirp et son fit linéaire. La faible valeur de  $\Delta C$  indique que le chirp reste linéaire après 4 kilomètres. Nous constatons également que l'intensité demeure très proche d'une parabole, confirmant les propriétés énoncées dans la partie 1.1 : l'impulsion parabolique conserve sa nature. A titre de comparaison, nous avons également étudié la propagation d'une impulsion gaussienne linéairement chirpée. Dans ce cas, après propagation, le profil d'impulsion demeure gaussien, mais la déviation du chirp par rapport à un ajustement linéaire est plus importante. Ceci est consistant avec le fait que, dans les conditions décrites ici, le principal effet agissant est l'effet Kerr, induisant une automodulation de la phase.

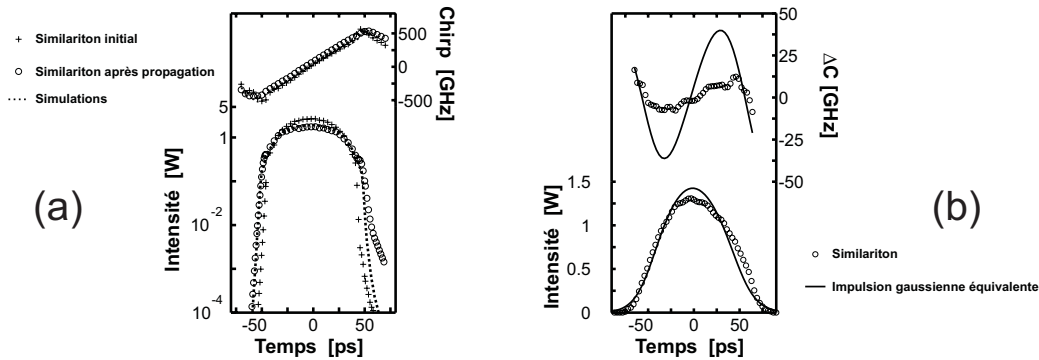


FIG. 5 – (a) Similariton généré (+), impulsion après 800 m de propagation (o), simulations numériques (..) (b) Simulations du profil d'intensité et de  $\Delta C$  après 4 km de propagation pour le similariton généré précédemment (o) et pour une gaussienne linéairement chirpée équivalente (-).

## Références

- [1] M. E. Fermann and al., *Self-similar propagation and amplification of parabolic pulses in optical fibers*, Phys. Rev. Lett. 84, 6010-6013 (2000).
- [2] V. I. Kruglov and al., *Self-similar propagation of parabolic pulses in normal dispersion fiber amplifiers*, J. Opt. Soc. Am. B 19, 461-469 (2002).
- [3] D. Anderson and al., *Wave-breaking-free pulses in nonlinear optical fibers*, J. Opt. Soc. Am. B 10, 1185-1190 (1993).
- [4] C. Anderson et al., *Wave-breaking in nonlinear-optical fibers*, J. Opt. Soc. Am. B 9, 1358-1361 (1992).
- [5] C. Finot, G. Millot, C. Billet, and J. M. Dudley, *Experimental generation of parabolic pulses via Raman amplification in optical fiber*, Opt. Express 11, 1547-1552 (2003).
- [6] G. P. Agrawal, *Nonlinear Fiber Optics*, Third Edition, Academic Press, San Fransisco, 2001.
- [7] V. I. Kruglov and al., *Self-similar propagation of high-power parabolic pulses in optical fiber amplifiers*, Opt. Lett. 25, 1753-1755 (2000).
- [8] R. Trebino, *Frequency-Resolved Optical Gating. The Measurement of Ultrashort Laser Pulses*, Kluwer Academic Publishers (2000).

## Application de Cryptage par Chaos aux Communications Optiques Multi-GigaBit

Nicolas Gastaud, Laurent Larger, François Malassenet,  
Jean-Marc Merolla, Marc Hanna et Yanne Chembo Kouomou

*GTL-CNRS Telecom*  
*UMR FEMTO-ST 6174*  
*2-3 rue Marconi*  
*57070 Metz FRANCE*  
`ngastaud@georgiatech-metz.fr`

### Résumé

Nous présentons un système de télécommunication sécurisé à haut débit se basant sur l'utilisation de dynamiques non-linéaires à retard pour masquer un message à transmettre. Une étude des caractéristiques du système et de ses limites est présentée.

## 1 Introduction

Les méthodes de communications sécurisées peuvent se présenter sous deux formes: une approche logicielle et une approche système. Chaque méthode possède des avantages différents et complémentaires: confidentialité (aux dépens de la vitesse) pour la cryptographie logicielle et débits élevés (pour une confidentialité éventuellement plus faible) pour les méthodes système. En nous intéressant plus particulièrement à l'approche système, nous nous plaçons dans le cadre de méthodes faisant appel à la synchronisation de systèmes chaotiques, selon les travaux de Pecora et Carroll [1]. Dans ce cas de figure, un oscillateur-maître contrôle le comportement de l'oscillateur-esclave qui reproduit les fluctuations du maître. Nous utilisons cette propriété pour établir un système de communication émetteur-récepteur.

Plusieurs implémentations sont mises en œuvre pour faire l'étude de ces dynamiques chaotiques. Beaucoup ont fait appel à des circuits électriques dont les oscillations, dans la plage de fréquences audio, répondaient à des attracteurs de Chua ou de Lorenz. Ces dynamiques de faible dimension, avec un nombre d'exposants de Lyapounov positifs souvent inférieur à cinq, ne résistent pas à des techniques de traitement du signal [2].

D'autres systèmes ont été proposés, afin d'augmenter, entre autres, la complexité du chaos, mettant en œuvre des techniques basées sur une utilisation de dynamiques à retard, où la non-linéarité s'obtient de manière optique [3, 4, 5] ou optoélectronique [6]. Les travaux de notre groupe se sont portés principalement sur la réalisation expérimentale de systèmes optoélectroniques. Ceux-ci se divisent en plusieurs catégories, en fonction du paramètre physique sur lequel influe la non-linéarité. Nous pouvons ainsi distinguer, dans un ordre chronologique, le chaos en longueur d'onde [7], en cohérence [8], en phase [9] et en intensité optique [10].

L'étude présentée porte sur l'application de dynamiques non-linéaires à retard pour générer un chaos en intensité. L'objectif de ces travaux réside dans la réalisation d'un système opto-électronique émetteur-récepteur complet pour des communications cryptées à des débits multi-Gigabit.

Dans cette communication, nous allons décrire, dans un premier temps, le système expérimental et la modélisation qui en est faite. Dans un second temps, nous expliciterons les caractéristiques recherchées dans un système de communication cryptée en détaillant la manière dont notre système se comporte face à ces exigences, avant, dans un troisième temps, de conclure.

## 2 Le système expérimental

### 2.1 Description du Système

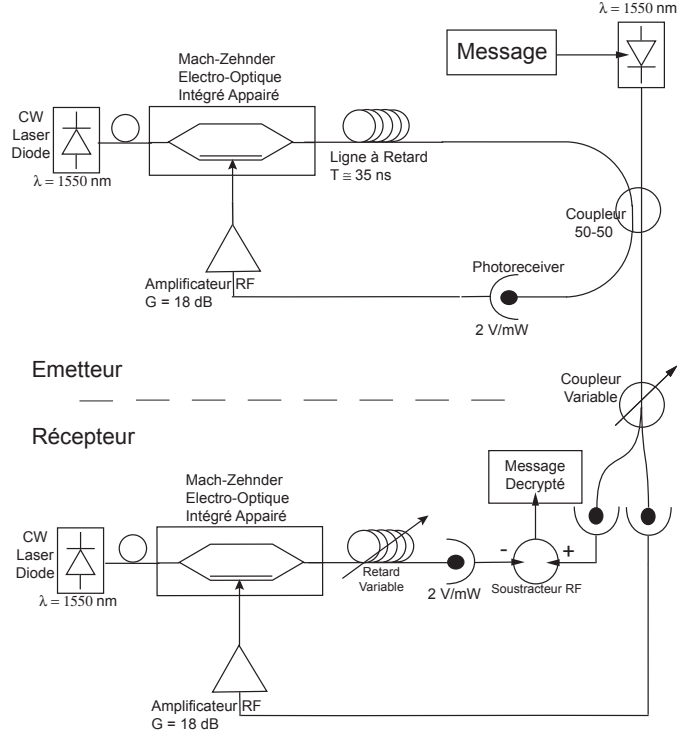
Le système se décompose en deux sous-systèmes selon le schéma de la figure 1 : le premier constitue l'émetteur et le second le récepteur.

Le système utilisé permet d'obtenir des dynamiques non-linéaires à retard. De ce fait, un des aspects fondamentaux du système réside dans l'implémentation de cette non-linéarité. Nous utilisons un modulateur electro-optique de Mach Zehnder (MZI) piloté par une tension  $V$  supérieure à sa tension de demi-onde  $V_{\pi RF}$ . Ainsi, ce composant fonctionne dans un régime fortement non-linéaire, c'est-à-dire avec une courbe de transmission présentant de multiples extrema. Lorsque le MZI est alimenté optiquement par une source continue monochromatique, ici un laser DFB Alcatel à 1550nm, sa fonction de transfert devient  $F(V) = \cos^2(\pi V/2V_{\pi RF} + \phi)$ , avec  $\phi$  fonction de la tension de bias  $V_b$  par la relation  $\phi = \pi V_b/2V_{\pi DC}$ . La sortie du MZI rentre dans une ligne à retard  $T$  d'environ 5 mètres, avant de passer dans un coupleur optique 2x2. Le signal optique est séparé en deux. Une partie est envoyée dans la ligne de transmission vers le récepteur, et l'autre est rebouclée, après détection, pour piloter le MZI. Un photorécepteur Miteq, de gain 2V/mW effectue cette détection. Le signal détecté passe alors dans un amplificateur RF de gain en puissance 18dB qui pilote le MZI. Par l'entrée laissée libre du coupleur optique 2x2, le signal du message est inséré. Une diode laser à modulation directe, fonctionnant dans la partie linéaire de sa caractéristique puissance-courant, est modulée par le message à transmettre. Cette diode laser émet à une longueur d'onde voisine de celle de la diode laser continue de l'émetteur.

Le récepteur se compose sensiblement des mêmes éléments, mais selon une architecture en boucle ouverte par opposition à la boucle fermée de l'émetteur. Un soin particulier a été apporté à l'appariage des composants semblables entre l'émetteur et le récepteur, en commandant, dès que possible des paires de composants. Ceci permet d'obtenir une bonne réplique des variations de l'émetteur au récepteur comme nous le verrons à travers les équations (1) et (3) et expérimentalement (figure 2).

Après transmission, le signal est séparé, par un coupleur optique variable, en deux voies : la première pour servir de "signal de référence," la seconde pour contrôler les oscillations chaotiques de la chaîne non-linéaire afin de dupliquer le chaos de l'émetteur. Une soustraction par rapport au signal de référence permet de décoder le message. Cette fonction de soustraction est obtenue en deux temps. Tout d'abord le signal est inversé en plaçant le point de fonctionnement du MZI du récepteur sur la pente opposée de sa fonction de transfert. Ensuite, un sommateur effectue l'extraction du message.



FIG. 1 – *Diagramme du système expérimental.*

## 2.2 Mise en équations

Les oscillations de émetteur sont régies par l'équation suivante:

$$x(t) + \tau \frac{dx}{dt}(t) + \frac{1}{\theta} \int_0^t x(\xi) d\xi = A \cos^2 [x(t - T) + \phi] + h(t) \quad (1)$$

avec

$$h(t) = \frac{\pi}{2V_\pi} A_m \left[ m(t) + \tau \frac{dm}{dt}(t) + \frac{1}{\theta} \int_0^t m(\xi) d\xi \right] \quad (2)$$

où  $\tau = \tau_1 \tau_2 / (\tau_1 + \tau_2)$ ,  $\theta = \tau_1 + \tau_2$  et  $\phi = \pi V_b / 2V_{\pi DC}$ . La variable  $x(t)$  représente la tension normalisée à l'entrée du MZI selon la relation  $x(t) = \pi V(t) / 2V_{\pi RF}$ . Les coefficients  $A$  et  $A_m$  représentent la combinaison des différents gains que subissent les signaux  $x(t)$  et  $m(t)$ .  $\tau_1, \tau_2$  sont les constantes de temps associées aux fréquences de coupure à  $-3\text{dB}$  haute et basse du système.

Le récepteur est régi par une équation semblable. L'indice 'r' dénote les paramètres du récepteur.

$$y(t) + \tau_r \frac{dy}{dt}(t) + \frac{1}{\theta_r} \int_0^t y(\xi) d\xi = A_r \cos^2 [x(t - T_r) + \phi_r] \quad (3)$$

Lorsque les paramètres de l'émetteur et du récepteur sont parfaitement accordés, nous observons que l'équation (3) prend la même forme que l'équation (1). Nous obtenons ainsi un phénomène de synchronisation. Cela se manifeste par une parfaite réplique au récepteur, des oscillations de l'émetteur. Nous allons explorer et détailler ceci dans la section suivante.

### 3 Résultats

#### 3.1 Exigence d'un système de communication idéal

Le système de communication idéal allie à la fois haut-débit, sécurité et fiabilité. Ces trois exigences se traduisent souvent par des contraintes incompatibles.

Le débit est limité par la bande passante du chaos qui est généré à l'émetteur. Cette bande passante est une composition des bandes passantes de chaque composant qui intervient dans l'oscillateur chaotique de l'émetteur.

La sécurité et la fiabilité sont deux caractéristiques qui sont fortement liées. Une augmentation de la sécurité de la transmission peut se faire aux dépens de la fiabilité du décodage. L'inverse est tout aussi vraie. La sécurité, difficile à quantifier, est liée à la dimension du chaos généré, à sa ressemblance à un bruit blanc gaussien et au taux de masquage de l'information,  $m(t)$ , dans le chaos,  $c(t)$ . Nous définissons le taux de masquage comme le rapport RMS du message sur le signal transmis:

$$t_m = \frac{\langle m^2(t) \rangle}{\langle (c + m)^2(t) \rangle} \quad (4)$$

Plus le taux de masquage est faible, plus l'information à transmettre est cachée, noyée dans les oscillations chaotiques de l'émetteur. L'émetteur se comporte comme un générateur de bruit qui brouille le signal. La sécurité de la transmission se trouve renforcée par un taux de masquage faible au détriment de la fiabilité de la transmission qui se trouve réduite. A l'inverse, un taux de masquage élevé augmente la fiabilité de la communication tout en diminuant la sécurité. Dans la mesure où toute variation du taux de masquage modifie en même temps, de manière inverse, la sécurité et la fiabilité de la transmission, la seule manière d'augmenter les deux en même temps, est d'améliorer la qualité de la synchronisation. Le récepteur répliquant de meilleure manière les oscillations de l'émetteur, il est possible de diminuer le taux de masquage tout en conservant la même fiabilité de transmission. Pour quantifier les performances du système, nous considérerons une qualité de synchronisation constante.

#### 3.2 Performances du système implémenté

Quatre caractéristiques du système implémenté ont été mesurées pour répondre aux exigences énoncées ci-dessus : le chaos, la qualité de la réplique, la qualité du masquage et le Bit Error Rate (BER).

Expérimentalement, nous obtenons 6,5GHz de bande passante. Ceci nous donne une limite haute sur les fréquences que nous pouvons masquer, et donc sur le débit du message à transmettre. La précision de la réplique permet un système de communication efficace, elle peut se mesurer par une erreur relative de réplique.

$$e_{dB} = 20 \log_{10} \left( \frac{\langle (X - Y)^2 \rangle}{\langle X^2 \rangle} \right) \quad (5)$$

Dans la figure 2, les traces temporelles de l'émetteur et du récepteur se superposent et font clairement apparaître l'asservissement du récepteur aux oscillations de l'émetteur. Nous observons une erreur de réplique d'environ -15dB, selon la définition (5). L'évolution de cette erreur en fonction d'un désaccord des paramètres a été étudiée séparément [11]. Avec cette qualité de synchronisation, considérée comme fixe, nous étudions la qualité du masquage et le BER.

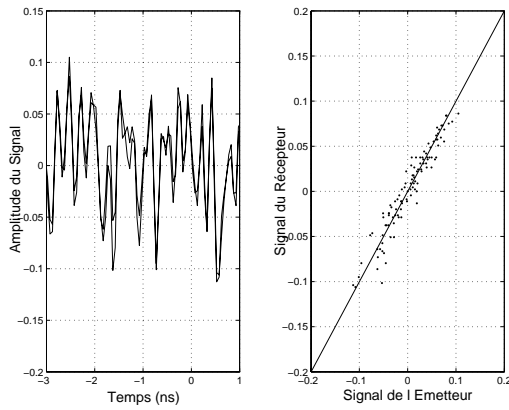


FIG. 2 – Synchronisation : Traces temporelles et figure de Lissajou

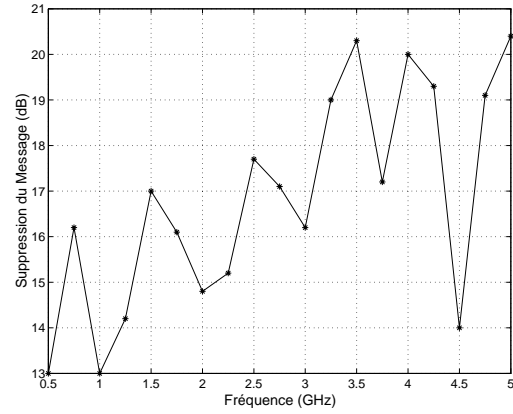


FIG. 3 – Suppression du message au récepteur en fonction de sa fréquence

Comme le message à transmettre est inséré dans la boucle de contre-réaction chaotique de l'émetteur, il modifie légèrement la dynamique chaotique. Le récepteur, dans sa fonction de décodeur, doit pouvoir reproduire les oscillations de l'émetteur en occultant au maximum la présence du message. Ainsi, la qualité de décodage peut se définir comme la capacité du récepteur à supprimer le message de sa réplique du chaos. Ceci nous donne une limite haute sur la puissance du message que nous pouvons espérer décoder au récepteur comme détaillé dans la figure 3.

Le taux d'erreur de la transmission a été évalué avec un *Digital Signal Analyzer*. Cet appareil génère une séquence binaire aléatoire qui est utilisé comme message. Le message décodé est comparé au message envoyé, et le taux d'erreur est calculé. La figure 4 montre l'évolution du BER en fonction du taux de masquage pour deux fréquences, 700MHz et 3GHz. La ligne pointillée verticale indique la limite à partir de laquelle le message peut être décrypté sans récepteur, directement à partir du signal transmis, avec un BER de  $2 \cdot 10^{-2}$ . La dégradation du BER en fonction du taux de masquage est très nette sur ces courbes. A 3GHz, nous pouvons obtenir un BER de  $3 \cdot 10^{-4}$  tout en conservant un signal correctement masqué par le chaos de l'émetteur.

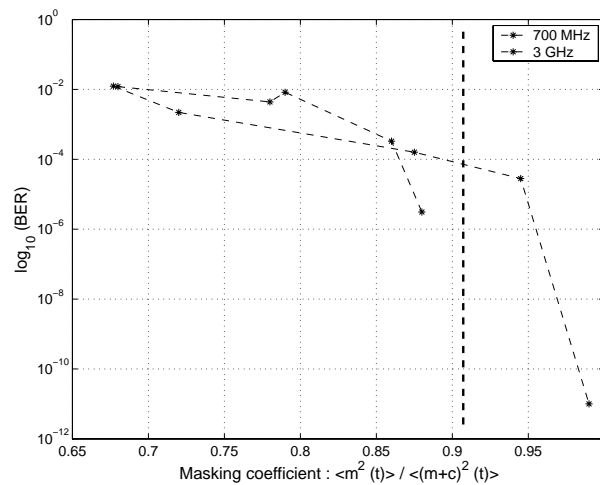


FIG. 4 – 700 MHz et 3 GHz BER en fonction du taux de masquage.

## 4 Conclusion

Nous présentons ici un système de communication sécurisé haut débit, qui repose sur l'utilisation de dynamiques non-linéaire à retard pour effectuer le cryptage d'un message. Une étude du système proposé, en fonction des critères applicables en télécom a permis de déterminer les caractéristiques et les limites actuelles d'un tel système.

## Références

- [1] L.M. Pecora et T.L. Carroll, *Synchronization in chaotic systems* Phys. Rev. Lett. 64, no.8, p.821 (1990).
- [2] G. Perez et H. Cerdeira, *Extracting messages masked by chaos*, Phys. Rev. Lett. 74, no. 11, p. 1970 (1995).
- [3] S. Sivaprakasam and K. A. Shore, *Message Encding and Decoding Using Chaotic External-Cavity Diode Lasers*, IEEE J. Quantum Electron. 36, no. 1, p. 35 (2000).
- [4] V. Annovazzi-Lodi, S. Donati et A. Scirè, *Synchronization of Chaotic Lasers by Optical Feedback for Cryptographic Applications*, IEEE J. Quantum Electron. 33, no. 9, p. 1449 (1997).
- [5] I. Fischer, Y. Liu et P. Davis, *Synchronization of chaotic semiconductor laser dynamics on subnanosecond time scales and its potential for chaos communication*, Phys. Rev. A. 62, no. 1, p. 110 (2000).
- [6] P. Celka, *Chaotic Synchronization and Modulation of Nonlinear Time Delayed Feedback Optical Systems*, IEEE Trans. Circuits Syst. 42, no. 8, p. 455 (1995).
- [7] L. Larger, J.-P. Goedgebuer et F. Delorme, *Optical encryption system using hyperchaos generated by an optoelectronic wavelength oscillator*, Phys. Rev. E. 57, no. 6, p. 6618 (1998).
- [8] Min Won Lee, L. Larger et J.-P. Goedgebuer, *Transmission System Using Chaotic Delays Between Lightwaves*, IEEE J. Quantum Electron. 39, no. 7, p. 931 (2003).
- [9] E. Genin, L. Larger et al. *Chaotic Oscillations of the Optical Phase for Miltigigahertz-Bandwidth Secure Comunciations*, IEEE J. Quantum Electron 40, (2004).
- [10] J.-P. Goedgebuer, P. Levy, L. Larger, C.-C. Chen et W.T. Rhodes *Optical Communication With Synchronized Hyperchaos Generated Electrooptically*, IEEE J. Quantum Electron. 48, no. 9, p. 1178(2002).
- [11] Y. Chembo Kouomou, P. Colet, N. Gastaud et L. Larger, *Effect of Parameter Mismatch on the Synchronization fo Chaotic Semiconductor Lasers with Electrooptical Feedback*, à paraître.

## Modélisation des rythmes circadiens chez la drosophile et chez les mammifères

Albert Goldbeter et Jean-Christophe Leloup

*Unité de Chronobiologie théorique,  
Faculté des Sciences, Université Libre de Bruxelles,  
Campus Plaine, CP 231, B-1050 Bruxelles, Belgique*  
agoldbeter@ulb.ac.be

### Résumé

## 1 Introduction

En raison des non-linéarités associées aux multiples mécanismes de régulation cellulaire ou supracellulaire, les systèmes biologiques sont particulièrement susceptibles de présenter des instabilités qui servent de moteur aux processus d'auto-organisation de non équilibre. Ces processus conduisent à la formation de structures dissipatives [1],[2]. À côté des structures spatiales ou spatio-temporelles, les oscillations entretenues correspondent à l'évolution vers une structure dissipative temporelle. La coexistence entre états stationnaires multiples, ou bistabilité, est une autre conséquence importante des processus de régulation dans les systèmes biologiques [3],[4]. Les rythmes sont le reflet le plus marquant de la complexité de l'organisation temporelle des organismes vivants. On sait maintenant que les rythmes se rencontrent à tous les niveaux de l'organisation biologique, avec des périodes allant de la fraction de seconde à l'année [5],[6]. Ces rythmes ont leurs racines dans les multiples mécanismes de régulation qui contrôlent la dynamique des systèmes vivants. Ainsi, au niveau cellulaire, les rythmes neuronaux et le rythme cardiaque résultent de la modulation de l'ouverture de canaux ioniques en fonction du potentiel membranaire. Des oscillations métaboliques sont associées à la régulation de l'activité enzymatique, tandis que les signaux intercellulaires de nature pulsatile et les oscillations de calcium intracellulaire reposent sur la régulation de récepteurs ou de processus de transport ; enfin, la régulation génétique est impliquée dans la genèse des rythmes circadiens [6]. Il est donc crucial de comprendre les mécanismes moléculaires et cellulaires responsables de ces oscillations pour saisir pleinement la dynamique du vivant. La modélisation fondée sur les données expérimentales nous donne un outil essentiel pour étudier ces mécanismes qui, en raison de leur complexité, ne peuvent être saisis pleinement à l'aide de la seule intuition [7]. Des modèles théoriques pour les rythmes biologiques ont d'abord été proposés en écologie, dès les années 1920, pour rendre compte des oscillations dans les populations de prédateurs et de proies [8]. Cette question est toujours d'actualité en écologie théorique. La neurobiologie est un autre domaine où des modèles sont utilisés depuis longtemps : le formalisme développé par Hodgkin et Huxley au début des années 1950 pour expliquer l'excitabilité des cellules nerveuses [9] reste au cur de la plupart des modèles pour les rythmes cardiaque et neuronaux [10]-[12]. Par la suite, des modèles théoriques ont été proposés pour les oscillations résultant de la régulation d'enzymes, de récepteurs, ou de gènes [6]. Ainsi la

modélisation a permis de clarifier le mécanisme des oscillations de calcium intracellulaire, l'origine des signaux pulsatiles dans les communications intercellulaires, et le mécanisme moléculaire des rythmes circadiens [7]. De plus, la modélisation des rythmes éclaire le chemin par lequel des oscillations périodiques simples se transforment en oscillations complexes, éventuellement chaotiques, et montre comment l'inclusion de phénomènes de diffusion permet de rendre compte de l'émergence de structures spatio-temporelles au niveau cellulaire ou supracellulaire [6]. Le but de cet article est de montrer, à l'aide de l'exemple des rythmes circadiens, comment les modèles et les simulations numériques contribuent à mettre en lumière l'origine, les propriétés, et la fonction des rythmes cellulaires [13]. En même temps ce bref aperçu illustrera l'utilisation de plus en plus répandue de l'approche computationnelle dans l'étude des comportements dynamiques en biologie.

## 2 Modélisation du mécanisme moléculaire des rythmes circadiens

Les rythmes circadiens représentent, depuis longtemps, le prototype même des rythmes biologiques. Ces rythmes d'une période proche de 24 h (du latin *circa*, autour, et *dies*, jour) sont parmi les plus répandus chez les organismes vivants [14]. Ils se produisent chez tous les eucaryotes, et chez certaines espèces de procaryotes comme les cyanobactéries. La fonction des rythmes circadiens est de permettre aux organismes de s'adapter à la nature périodique de leur environnement, et d'anticiper l'alternance du jour et de la nuit. Au cours de la

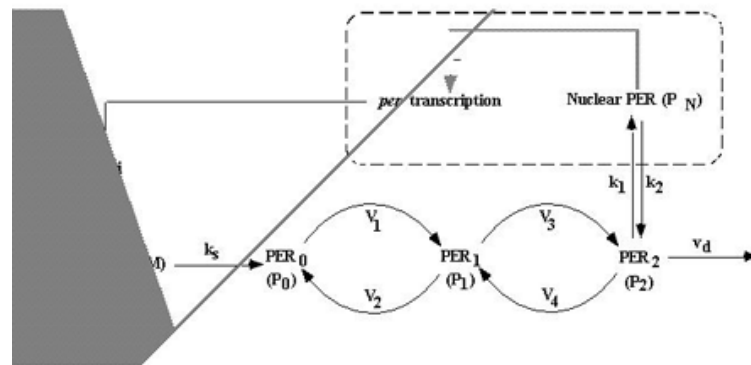


FIG. 1 – Schéma du modèle pour les rythmes circadiens chez la drosophile, fondé sur l'auto-régulation négative exercée par la protéine PER sur l'expression du gène *per*. Ce modèle est décrit par un système de cinq équations différentielles ordinaires, non linéaires [6],[21].

dernière décennie, des progrès remarquables en biologie moléculaire ont permis de clarifier dans une large mesure le mécanisme moléculaire des rythmes circadiens [15]-[17]. Dans tous les organismes étudiés à ce jour, ce mécanisme repose sur l'auto-régulation négative de l'expression génétique [18]. Avant même que ces observations soient établies, une étude théorique due à Goodwin [19] avait montré que ce type de régulation peut conduire à des oscillations. Le modèle de Goodwin est encore utilisé pour rendre compte de certaines propriétés des rythmes circadiens [20]. Par la suite, fondés sur des observations expérimentales plus détaillées, des modèles de plus en plus réalistes ont été proposés pour les rythmes

circadiens. L'exemple des rythmes circadiens illustre bien comment les modèles se complexifient à mesure que les données de l'expérience s'accumulent [8]. Les premiers modèles moléculaires ont été proposés pour les rythmes circadiens chez la drosophile, qui reste l'organisme étudié dans le plus grand détail. Un premier modèle, publié en 1995, est fondé sur l'auto-régulation négative exercée par la protéine PER sur l'expression de son gène *per* (Fig. 1). Ce modèle à cinq variables rend compte des oscillations entretenues de la protéine PER et de son ARN messenger en obscurité constante [21]. Comme dans l'expérience, le pic d'ARN messenger précède de quelques heures le pic total de protéine PER (Fig. 2a). Les os-

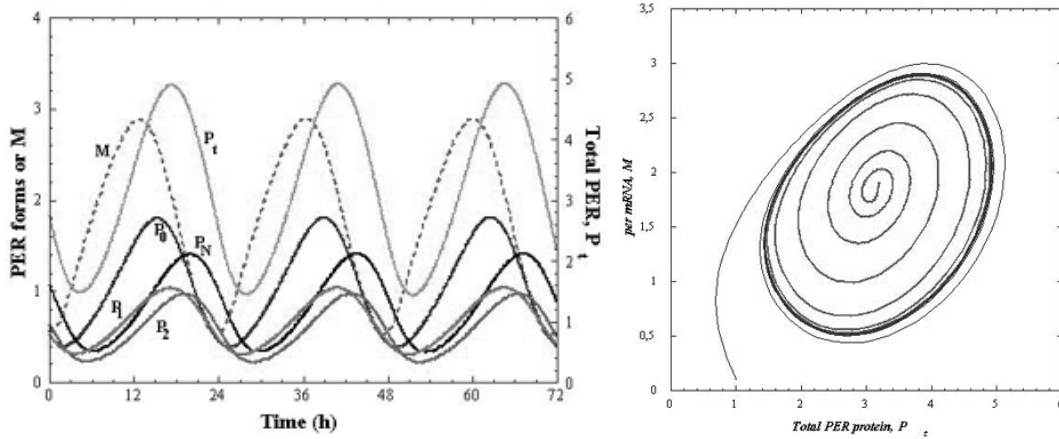


FIG. 2 – (a) Oscillations entretenues prédites par le modèle à 5 variables pour les rythmes circadiens chez la drosophile schématisé dans la Fig. 1 [21]. (b) Evolution vers un cycle limite correspondant aux oscillations entretenues montrées en (a). Dans l'espace des phases le système évolue toujours vers la même courbe fermée, au départ de conditions initiales situées à l'intérieur ou à l'extérieur du cycle limite.

cillations surviennent dans un domaine précis de valeurs des paramètres et correspondent à l'évolution vers un cycle limite : dans l'espace des phases formé par les concentrations des différents intermédiaires du mécanisme réactionnel (concentrations des différentes formes, cytosoliques et nucléaire, de la protéine PER, et de son ARN messenger), le système évolue vers la même courbe fermée, quelles que soient les conditions initiales, c'est-à-dire les valeurs initiales de ces concentrations (Fig. 2b). Toutefois, ce premier modèle n'explique pas l'entraînement des oscillations par le cycle lumière-obscurité. Les expériences montrent que la lumière entraîne les rythmes circadiens chez la drosophile en induisant la dégradation d'une seconde protéine, TIM, qui forme un complexe avec PER [15]-[17]. Le complexe PER-TIM migre vers le noyau cellulaire où il inhibe l'expression des gènes *per* et *tim*. Un second modèle, fondé sur l'auto-régulation négative exercée par le complexe PER-TIM (Fig. 3), incorpore l'effet de la lumière sur la dégradation de TIM. Ce modèle rend compte non seulement des oscillations circadiennes en obscurité constante, mais aussi de l'entraînement des oscillations par un cycle lumière-obscurité, et du déphasage des oscillations (avance ou délai) suscité par une brève perturbation lumineuse [22]. Le modèle à dix variables admet aussi de nouveaux types de comportement dynamique : en plus des oscillations périodiques du type cycle limite, le système peut présenter un comportement chaotique correspondant à des oscillations irrégulières [23]. Dans l'espace des phases, le système évolue alors vers un attracteur étrange (Fig. 4).

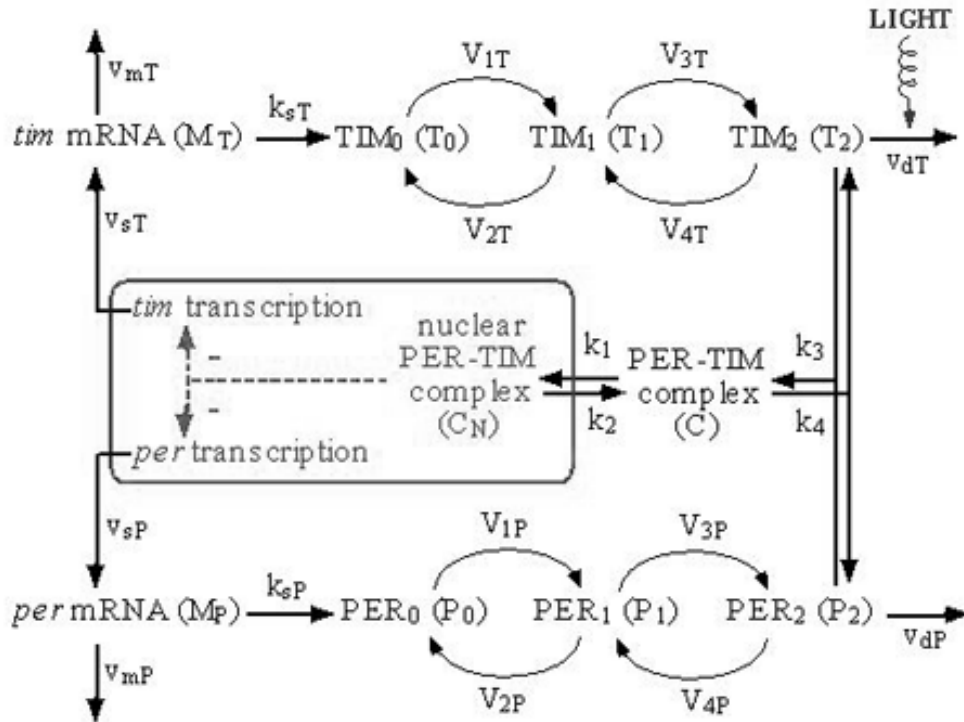


FIG. 3 – Schéma du modèle pour les rythmes circadiens chez la drosophile, fondé sur l'auto-régulation négative exercée par le complexe PER-TIM sur l'expression des gènes *per* et *tim*. Ce modèle est décrit par un système de dix équations différentielles ordinaires, non linéaires [22]. Le modèle inclut l'effet de la lumière qui est d'induire la dégradation de la protéine TIM.

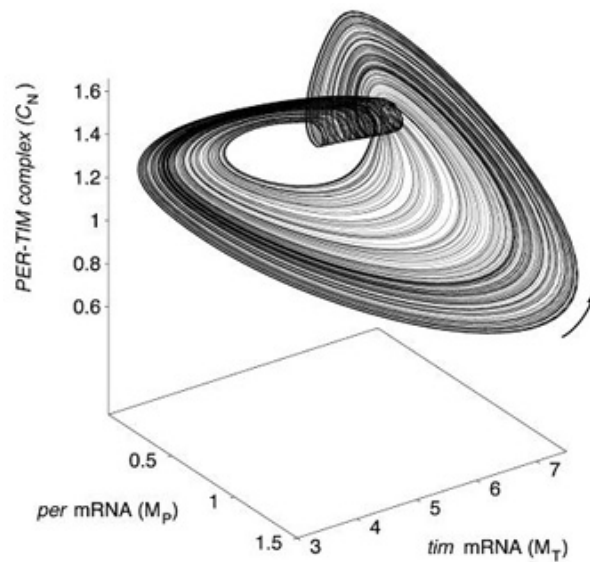


FIG. 4 – Evolution vers un attracteur étrange, correspondant à un comportement chaotique autonome, dans le modèle à 10 variables pour les rythmes circadiens schématisé dans la Fig. 3 [23].



La modélisation indique que l'émergence des oscillations complexes résulte ici d'une interaction entre plusieurs mécanismes générateurs d'instabilité, couplés au sein du même système. Chacun de ces mécanismes est par lui-même capable de produire des oscillations. La complexité de la dynamique temporelle naît, de manière autonome, de l'interaction entre plusieurs de ces mécanismes. Le chaos peut aussi se produire, de manière non autonome, suite au forçage d'un oscillateur par une variation périodique de l'un de ses paramètres. Toutefois, même en présence d'un couplage entre mécanismes générateurs d'instabilité, les oscillations périodiques simples demeurent le comportement dynamique le plus fréquemment rencontré [24].

### 3 Suppression des rythmes circadiens par une impulsion de lumière

Chez certains organismes comme le hamster, les rythmes circadiens, qui se maintiennent en obscurité constante, peuvent disparaître après une seule impulsion de lumière. Une seconde impulsion permet de rétablir le rythme. Il est difficile d'expliquer de telles observations, et les prédictions théoriques s'avèrent ici précieuses. Deux types d'explication sont suggérées par les modèles. Selon Winfree [5], chaque cellule oscillante, sous l'effet de la perturbation lumineuse, retourne à son point singulier, c'est-à-dire à son état stationnaire. Comme cet état est instable, chaque oscillateur cellulaire finit par quitter l'état stationnaire pour regagner le cycle limite correspondant au comportement périodique. Toutefois, ce retour au cycle limite s'effectue avec une phase aléatoire. Les oscillateurs cellulaires sont alors désynchronisés, ce qui se traduit au niveau global de l'organisme par la disparition d'un rythme cohérent. Une explication alternative est fournie par l'étude du modèle à dix variables pour les rythmes circadiens chez la drosophile [22]. Dans un certain domaine de valeurs des paramètres, ce modèle admet une coexistence entre un état stationnaire stable et un cycle limite stable [25]. Ces deux états stables sont séparés par un cycle limite instable. Au départ du cycle limite stable correspondant aux oscillations circadiennes, suite à une perturbation lumineuse, le système peut quitter le bassin d'attraction du cycle limite et rejoindre le bassin d'attraction de l'état stationnaire stable. Le rythme est alors supprimé de manière permanente. Une seconde perturbation lumineuse peut provoquer la transition inverse et restaurer le rythme circadien. Les simulations numériques montrent qu'une telle suppression se produit seulement sur une portion du cycle limite [25]. L'amplitude et la durée de la perturbation induite par l'impulsion lumineuse doivent être adéquates pour induire la suppression; ces caractéristiques varient selon la phase du cycle à laquelle la perturbation survient.

### 4 Vers un modèle moléculaire détaillé pour les rythmes circadiens chez les mammifères

Des développements expérimentaux récents ont montré que la régulation négative des gènes *per* et *tim* chez la drosophile s'effectue de manière indirecte, et implique un jeu croisé de régulations positives et négatives [26]. Tenant compte de ces interactions régulatrices, des modèles ont été proposés pour le mécanisme des rythmes circadiens chez la drosophile [27],[28]. Un mécanisme similaire se retrouve chez les mammifères [29], où la protéine PER forme un complexe avec la protéine CRY, tandis que les protéines CLOCK et BMAL1 activent l'expression des gènes *Per* et *Cry*. Le complexe PER-CRY exerce une

régulation négative indirecte en se liant au complexe CLOCK-BMAL1 pour former un complexe inactif. De plus, la protéine BMAL1 inhibe l'expression de son propre gène par l'entremise de la protéine REV-ERBa dont l'expression est également suscitée par le complexe CLOCK-BMAL1. Un modèle fondé sur ces interactions régulatrices entremêlées vient d'être proposé pour les rythmes circadiens chez les mammifères [30]. Il incorpore le rôle de la lumière qui, chez les mammifères, est d'induire l'expression du gène *Per* [29]. Le modèle comprend 16 variables, nombre qui passe à 19 quand on inclut explicitement le rôle de la protéine REV-ERBa [30].

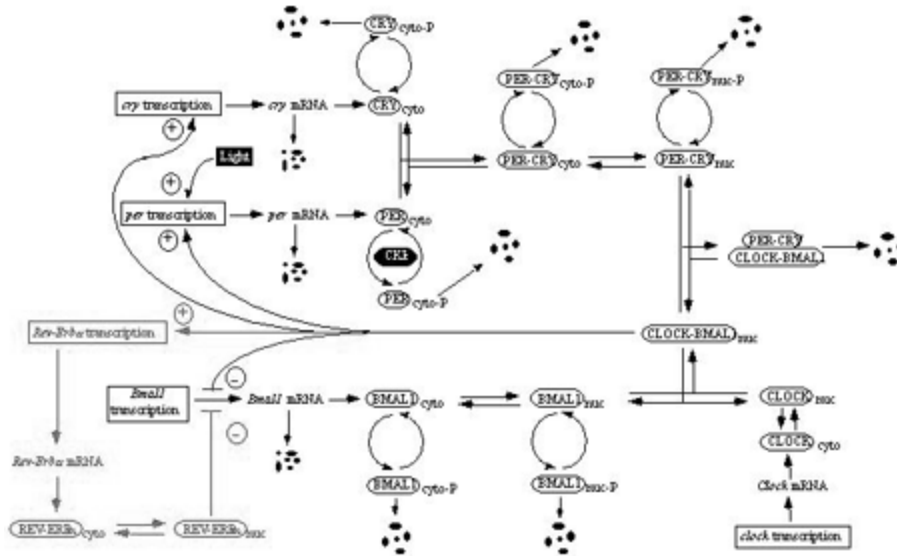


FIG. 5 – Schéma du modèle pour les rythmes circadiens chez les mammifères, incorporant les régulations positives ou négatives exercées par les protéines PER, CRY, CLOCK, BMAL1 et REV-ERBa sur l'expression des gènes *Per*, *Cry* et *Bmal1* [30]. Ce modèle est décrit par un système de 16 équations différentielles (nombre qui passe à 19 quand on incorpore explicitement le rôle du gène *Rev-erba*).

Ce modèle (Fig. 5), plus complexe que les précédents, redonne des résultats similaires pour la genèse des rythmes, mais permet également des prédictions nouvelles. Il met par exemple en lumière la possibilité de multiples sources d'oscillations dans le réseau de régulation génétique contrôlant les rythmes circadiens : en l'absence de protéine PER, des oscillations pourraient ainsi survenir suite à la seule autorégulation négative exercée par la protéine BMAL1 via la protéine REV-ERBa [30]. La boucle d'auto-régulation négative impliquant le complexe PER-CRY représente l'oscillateur de base, puisque le rythme circadien subsiste en l'absence de REV-ERBa. Le modèle montre que l'existence d'un comportement oscillant est particulièrement sensible aux paramètres qui contrôlent la synthèse et la dégradation de la protéine BMAL1 et de son ARN messager [30].

## 5 Lien avec les troubles du sommeil

Le modèle pour les rythmes circadiens chez les mammifères nous donne la possibilité de tester les bases moléculaires et dynamiques de certains troubles physiologiques ren-

contrés chez l'homme. Ainsi, une étude récente publiée dans la revue Science en 2001 a montré l'existence d'un syndrome familial d'avance de phase du sommeil [31]. Ce syndrome est caractérisé par une durée normale du sommeil, mais la phase de celui-ci est avancée de quelques heures. Ce syndrome est lié à une mutation d'un gène *Per*, responsable de la moindre phosphorylation d'une protéine PER et de la réduction de la période autonome de ses oscillations [31]. Ces travaux établissent qu'un dysfonctionnement de l'horloge circadienne, résultant d'une mutation, peut se traduire par une perturbation du cycle veille-sommeil. Comme la vitesse de phosphorylation de la protéine PER est un paramètre qui apparaît dans le modèle de la Fig. 5, celui-ci permet de tester les conditions dans lesquelles une altération de ce paramètre conduit à une variation de la période des oscillations autonomes et à une avance ou un délai de phase lors de l'entraînement par un cycle lumière-obscurité. L'absence d'entraînement du rythme par un cycle lumière-obscurité correspond à un autre syndrome connu sous le nom de " non-24 h sleep-wake cycle syndrome " [32].

## 6 Approche stochastique des rythmes circadiens

Les modèles décrits plus haut pour les rythmes circadiens sont de nature déterministe. Les équations d'évolution prennent la forme d'équations différentielles ordinaires. Toutefois, la question de la validité d'une approche déterministe se pose, dans la mesure où les quantités de protéines et d'ARN messagers impliqués dans le mécanisme des oscillations pourraient être faibles dans le milieu cellulaire. Dans ces conditions une approche stochastique semble mieux adaptée [33], [34]. Cette approche probabiliste devient nécessaire lorsque les quantités de molécules en présence dans le milieu réactionnel sont de l'ordre de quelques dizaines ou centaines seulement. L'étude d'une version stochastique du modèle à cinq variables fondé sur l'auto-régulation négative exercée par la protéine PER montre [35] que des oscillations circadiennes robustes peuvent se produire déjà lorsque le nombre maximum de protéine PER nucléaire et d'ARN messager au cours des oscillations est de l'ordre de quelques centaines ou quelques dizaines, respectivement. Quand le nombre maximum de molécules d'ARN messager tombe en-dessous d'une trentaine le bruit moléculaire commence à dissoudre le comportement périodique. L'approche stochastique a également été appliquée dans l'étude du modèle à dix variables fondé sur la régulation par le complexe PER-TIM [36],[37]. Les résultats des simulations stochastiques corroborent les données fournies par le modèle déterministe à la fois pour les oscillations périodiques et pour le comportement chaotique, dès que le nombre de molécules de protéine et d'ARN messager est de l'ordre de quelques dizaines ou centaines, respectivement.

**Remerciements :** Ce travail a bénéficié du soutien du Fonds de la Recherche Scientifique Médicale (F.R.S.M., convention n° 3.4607.99). J.-C. L. est Chargé de recherches du F.N.R.S.

## Références

- [1] Glansdorff, P. et Prigogine, I. *Structure, stabilité et fluctuations* (Masson, Paris, 1971).
- [2] Nicolis, G. et Prigogine, I. *Self-Organization in Nonequilibrium Systems From Dissipative Structures to Order through Fluctuations* (Wiley, New York, 1977).
- [3] Thomas, R. et d'Ari, R. *Biological Feedback* (CRC Press, Boca Raton, FL, 1990).
- [4] Ferrell, J. E. Jr. *Self-perpetuating states in signal transduction: positive feedback, double-negative feedback and bistability* Curr. Opin. Cell Biol. 14, 140-148 (2002).
- [5] Winfree, A.T. *The Geometry of Biological Time* (2nd Edition, Springer, New York, 2001).
- [6] Goldbeter, A. *Biochemical Oscillations and Cellular Rhythms* The molecular bases of periodic and chaotic behaviour (Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK, 1996)
- [7] Goldbeter, A. *Computational approaches to cellular rhythms* Nature 420, 238-245 (2002).
- [8] Volterra, V. *Fluctuations in the abundance of a species considered mathematically* Nature 118, 558-560 (1926).
- [9] Hodgkin, A.L. et Huxley, A.F. *A quantitative description of membrane currents and its application to conduction and excitation in nerve* J. Physiol. (Lond.) 117, 500-544 (1952).
- [10] Koch, C. et Segev, I. (eds) *Methods in Neuronal Modeling From Synapses to Networks* (2nd Edition, MIT Press, Cambridge, MA, 1998).
- [11] Keener, J. P. et Sneyd, J. *Mathematical Physiology* (Springer, New York, 1998).
- [12] Noble, D. *Modeling the heart -from genes to cells to the whole organ* Science 295, 1678-1682 (2002).
- [13] Goldbeter, A. *Biologie computationnelle des rythmes circadiens* Bull. Cl. Sci. Acad. R. Bel. 6ème série, XIV, 67-82 (2004).
- [14] Moore-Ede, M. C., Sulzman, F. M. et Fuller, C. A. *The Clocks that Time Us* Physiology of the Circadian Timing System (Harvard Univ. Press, Cambridge, MA, 1982).
- [15] Dunlap, J. C. *Molecular bases for circadian clocks* Cell 96, 271-290 (1999).
- [16] Young, M. W. et Kay, S. A. *Time zones: a comparative genetics of circadian clocks* Nat. Rev. Genet. 2, 702-715 (2001).
- [17] Reppert, S. M. et Weaver, D. R. *Coordination of circadian timing in mammals* Nature 418, 935-941 (2002).
- [18] Hardin, P.E., Hall, J.C. et Rosbash, M. *Feedback of the Drosophila period gene product on circadian cycling of its messenger RNA levels* Nature 343, 536-540 (1990).
- [19] Goodwin, B.C. *Oscillatory behavior in enzymatic control processes* Adv. Enzyme Regul. 3, 425-438 (1965).
- [20] Ruoff, P., Vinsjevik, M., Monnerjahn, C. et Rensing, L. *The Goodwin model: simulating the effect of light pulses on the circadian sporulation rhythm of Neurospora crassa* J. Theor. Biol. 209, 29-42 (2001).
- [21] Goldbeter, A. *A model for circadian oscillations in the Drosophila period protein (PER)* Proc. R. Soc. Lond. B. Biol. Sci. 261, 319-324 (1995).
- [22] Leloup, J. C. et Goldbeter, A. *A model for circadian rhythms in Drosophila incorporating the formation of a complex between the PER and TIM proteins* J. Biol. Rhythms 13, 70-87 (1998).
- [23] Leloup, J.C. et A. Goldbeter. *Chaos and birhythmicity in a model for circadian oscillations of the PER and TIM proteins in Drosophila* J. Theor. Biol. 198, 445-459

- (1999).
- [24] Goldbeter, A., Gonze, D., Houart, G., Leloup, J.C., Halloy, J. et Dupont, G. *From simple to complex oscillatory behavior in metabolic and genetic control networks* Chaos 11, 247-260 (2001).
  - [25] Leloup, J. C. et Goldbeter, A. *A molecular explanation for the long-term suppression of circadian rhythms by a single light pulse* Am. J. Physiol. Regul. Integr. Comp. Physiol. 280, R1206-R1212 (2001).
  - [26] Glossop, N. R., Lyons, L. C. et Hardin, P. E. *Interlocked feedback loops within the Drosophila circadian oscillator* Science 286, 766-768 (1999).
  - [27] Ueda, H. R., Hagiwara, M. et Kitano, H. *Robust oscillations within the interlocked feedback model of Drosophila circadian rhythm* J. Theor. Biol. 210, 401-406 (2001).
  - [28] Smolen, P., Baxter, D. A. et Byrne, J. H. *Modeling circadian oscillations with interlocking positive and negative feedback loops* J. Neurosci. 21, 6644-6656 (2001).
  - [29] Shearman, L. P., Sriram, S., Weaver, D. R., Maywood, E. S., Chaves, I., Zheng, B., Kume, K., Lee, C. C., van der Horst, G. T., Hastings, M. H. et Reppert, S. M. *Interacting molecular loops in the mammalian circadian clock* Science 288, 1013-1019 (2000).
  - [30] Leloup, J.C. et Goldbeter, A. *Toward a detailed computational model for the mammalian circadian clock* Proc. Natl. Acad. Sci. USA 100, 7051-7056 (2003).
  - [31] Toh, K. L. et al. *An hPer2 phosphorylation site mutation in familial advanced sleep phase syndrome* Science 291, 1040-1043 (2001).
  - [32] Richardson, G. S. et Malin, H. V. *Circadian rhythm sleep disorders: pathophysiology and treatment* J. Clin. Neurophysiol. 13, 17-31 (1996).
  - [33] Barkai, N. et Leibler, S. *Circadian clocks limited by noise* Nature 403, 267-268 (2000).
  - [34] Vilar, J. M., Kueh, H. Y., Barkai, N. et Leibler, S. *Mechanisms of noise-resistance in genetic oscillators* Proc. Natl Acad. Sci. USA 99, 5988-5992 (2002).
  - [35] Gonze, D., Halloy, J. et Goldbeter, A. *Robustness of circadian rhythms with respect to molecular noise* Proc. Natl Acad. Sci. USA 99, 673-678 (2002).
  - [36] Gonze, D., Halloy, J., Leloup, J.C. et Goldbeter, A. *Stochastic models for circadian rhythms: effect of molecular noise on periodic and chaotic behaviour* C. R. Biol. 326, 189-203 (2003).
  - [37] Gonze, D., Halloy, J., et Goldbeter, A. *Deterministic versus stochastic models for circadian rhythms* J. Biol. Phys. 28, 637-653 (2002).



## Diagrammes de phase d'oscillateurs photoréfractifs cohérents non-linéaires

M. Grapinet\*, P. Mathey\*, H. R. Jauslin\*, S. G. Odoulov<sup>†</sup>, D. Rytz<sup>+</sup>

\**Laboratoire de Physique Université de Bourgogne, UMR CNRS 5027,  
9 Avenue Alain Savary, 21078 Dijon cedex*

<sup>†</sup>*Institut de Physique, National Academy of Sciences  
03650, Kiev-39, Ukraine*

<sup>+</sup>*Forschungsinstitute für mineralische und metallische Werkstoffe,  
Edelsteine/Edemetalle GmbH, Struhtstrasse 2, Wackenmühle,  
55743 Idar-Oberstein, Allemagne*

\*mgrap@u-bourgogne.fr, pmathey@u-bourgogne.fr, jauslin@u-bourgogne.fr

<sup>†</sup>odoulov@iop.kiev.ua

<sup>+</sup>rytz@fee-io.de

### Résumé

Dans la cavité optique que nous étudions, l'un des miroirs est un milieu à conjugaison de phase (MCP) pompé par deux ondes contrepropageantes. Il s'agit d'un cristal photoréfractif qui est soit le titanate de baryum ( $BaTiO_3$ ) soit le niobate de potassium ( $KNbO_3$ ). Nous analysons les propriétés de l'oscillation ayant pris naissance dans la cavité en fonction de différents paramètres tels que le rapport des pompes, le gain du cristal.

## 1 Introduction

L'étude porte sur une cavité optique formée par un miroir conventionnel et par un miroir à conjugaison de phase (MCP) pompé par deux ondes contrepropageantes [1]. Le miroir à conjugaison de phase est constitué d'un matériau photoréfractif connu pour son aptitude à s'adapter à toute modification de la figure d'interférence en un temps d'autant plus court que l'éclairement est fort. Tout d'abord, nous indiquons quelques propriétés des cristaux utilisés: le titanate de baryum et le niobate de potassium. Puis, nous présenterons les équations de propagation des ondes [2-4] intervenant dans le mélange à quatre ondes. Après un bref rappel sur le principe de fonctionnement de l'oscillateur semi-linéaire, nous exposerons les premiers résultats portant sur les diagrammes de phase.

## 2 Propriétés des matériaux

Pour notre étude, nous utilisons des matériaux où l'effet photoréfractif [5] peut exister, c'est-à-dire des matériaux électro-optiques et photoconducteurs. L'absorption d'un photon permet à un porteur de charge de passer d'un site cristallin à un autre. Ce déplacement peut s'effectuer par diffusion ou sous l'effet d'un champ électrique externe appliqué. Pour une illumination non uniforme, la redistribution des charges électriques engendre un champ électrique modulé spatialement dit champ de charges d'espace. C'est ce champ qui produit une variation de l'indice de réfraction par effet électro-optique. Si les coefficients électro-optiques qui couplent les ondes sont non nuls, elles se diffractent sur le réseau qu'elles ont

créé. Le transfert d'énergie entre ces ondes est alors possible. Le sens de transfert (amplification ou atténuation) dépend de l'orientation du cristal par rapport aux faisceaux incidents. Il ne dépend pas de l'intensité relative des faisceaux. C'est une des caractéristiques de l'effet photoréfractif qui permet de le distinguer des autres phénomènes non-linéaires.

Voyons à présent quelques propriétés de chacun des matériaux utilisés au cours de l'étude.

## 2.1 Le Titanate de Baryum

Il s'agit d'un cristal photoréfractif inorganique uniaxe de classe de symétrie 4mm à température ambiante. Il est ferroélectrique. Le cristal utilisé est dopé au cobalt. Ce type de dopage accroît la densité des pièges photoréfractifs et le rend ainsi très efficace dans le domaine 480 nm à 800 nm. Les coefficients non nuls du tenseur électro-optique à déformation nulle, à la longueur d'onde de 514 nm et à température ambiante sont  $r_{13}=11,9$  pm/V,  $r_{33}=47,5$  pm/V et  $r_{42}=750$  pm/V.

Il faut noter la très grande valeur du coefficient  $r_{42}$  qui fait tout l'intérêt du titanate de baryum permettant ainsi d'obtenir des variations d'indice donc des non-linéarités importantes. A la longueur d'onde de 514 nm, les indices valent  $n_a=n_b=n_o=2,49$  et  $n_c=n_e=2,42$ .

Nous avons calculé le coefficient électro-optique effectif  $r_{eff}$  qui couple les faisceaux 1 et 4

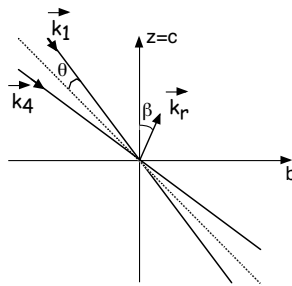


FIG. 1 – Définition des orientations des vecteurs d'onde par rapport aux axes cristallographiques.

de polarisations extraordinaires et dans la configuration représentée figure 1. Ce coefficient électro-optique effectif se met sous la forme :

$$r_{eff} = \frac{\cos\beta}{2} [n_o^4 r_{13} (\cos 2\theta - \cos 2\beta) + 4n_e^2 n_o^2 r_{42} \sin^2 \beta + n_e^4 r_{33} (\cos 2\theta + \cos 2\beta)] \quad (1)$$

## 2.2 Le Niobate de potassium

Il fait parti de la classe de symétrie mm2. Il est ferroélectrique à température ambiante. Son domaine de sensibilité s'étend du visible jusqu'à 1  $\mu m$ . Ce cristal, dopé au cobalt, est optiquement biaxe. A la longueur d'onde de 514 nm, les indices valent  $n_a=2,334$ ,  $n_b=2,395$  et  $n_c=2,211$ . Il existe cinq coefficients électro-optiques non nuls à la température ambiante. Nous avons calculé le coefficient électro-optique effectif  $r_{eff}$  dans les mêmes conditions que les précédentes relatives au titanate de baryum :

$$r_{eff} = \frac{\cos\beta}{2} [n_b^4 r_{23} (\cos 2\theta - \cos 2\beta) + 4n_b^2 n_c^2 r_{42} \sin^2 \beta + n_c^4 r_{33} (\cos 2\theta + \cos 2\beta)] \quad (2)$$



où pour la longueur d'onde de 514 nm  $r_{23}=7,1$  pm/V,  $r_{33}=64$  pm/V et  $r_{42}=380$  pm/V. La configuration précédente fait donc intervenir pour chacun des cristaux le coefficient électro-optique  $r_{42}$  le plus élevé. C'est donc dans une telle situation qu'ils seront utilisés.

### 3 Conjugaison de phase et mélange à quatre ondes

#### 3.1 Conjugaison de phase

L'optique non-linéaire a permis la réalisation de miroirs pour lesquels les lois de la réflexion diffèrent des lois de Descartes. L'onde conjuguée en phase d'un champ monochromatique est un champ, dont le front d'onde a la même forme que celui du champ incident mais se propageant dans la direction opposée. Ce miroir possède la propriété de produire un faisceau réfléchi dont le front d'onde reproduit fidèlement celui du faisceau incident [1]. Le processus physique mis en jeu est le mélange à quatre ondes. Un des intérêts d'un miroir à conjugaison de phase est d'être capable de corriger les distorsions du faisceau incident.

#### 3.2 Mélange à quatre ondes

Les quatre ondes se propageant dans le matériau photoréfractif sont des ondes planes de même pulsation et de même polarisation. Nous les repérons avec l'indice  $j$  allant de 1 à 4. Nous les écrivons en notations complexes:

$$E_j(\vec{r}, t) = A_j(\vec{r}) \exp[i(\vec{k}_j \cdot \vec{r} - \omega.t)] + cc.$$

Par convention,  $A_1$  et  $A_2$  sont les amplitudes des faisceaux pompes contre propageants.  $A_4$  est l'amplitude du faisceau sonde et  $A_3$  est celle de l'onde conjuguée en phase. La configuration est représentée sur la figure 2a. Ce système physique est relativement complexe

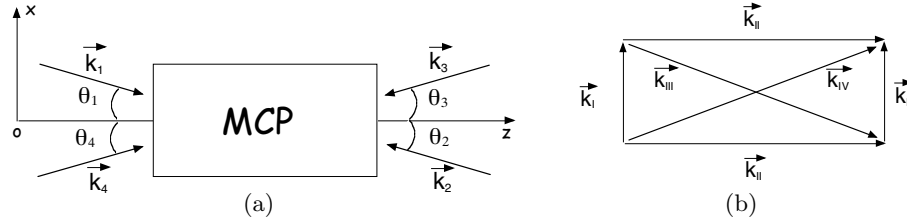


FIG. 2 – (a) Définitions des orientations des différents vecteurs d'onde par rapport à l'échantillon photoréfractif. (b) Vecteurs réseaux induits par mélange à quatre ondes

puisque si les ondes sont cohérentes entre elles, quatre réseaux d'interférence possibles peuvent coexister dans le cristal (MCP). Les quatre vecteurs réseaux associés sont (fig 2b) :

$$\begin{aligned} \vec{k}_I &= \vec{k}_4 - \vec{k}_1 = \vec{k}_2 - \vec{k}_3, & \vec{k}_{III} &= \vec{k}_1 - \vec{k}_2, \\ \vec{k}_{II} &= \vec{k}_1 - \vec{k}_3 = \vec{k}_4 - \vec{k}_2, & \vec{k}_{IV} &= \vec{k}_4 - \vec{k}_3. \end{aligned} \quad (3)$$

On se place dans l'approximation de l'onde lentement variable en supposant que les variations ne dépendent que d'une coordonnée d'espace,  $z$ . Le problème peut être simplifié en faisant deux hypothèses [4] :

La première est de considérer un système holographique pour lequel un seul réseau donne lieu à un fort couplage entre deux ondes. Ici, nous considérons le cas du réseau par transmission pour lequel le réseau d'indice I est prédominant.

La deuxième hypothèse suppose que  $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ .

Par ailleurs, nous négligeons l'absorption du cristal. Le régime dynamique est alors décrit par les équations suivantes [2-4] :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial A_1}{\partial z} &= \nu^* A_4 & (a) & \quad \frac{\partial A_2^*}{\partial z} &= \nu^* A_3^* & (b) \\
 \frac{\partial A_4^*}{\partial z} &= -\nu^* A_1^* & (c) & \quad \frac{\partial A_3}{\partial z} &= -\nu^* A_2 & (d) \\
 (\tau \frac{\partial}{\partial t} + 1)\nu &= \frac{\gamma}{I_0}(A_1^* A_4 + A_2 A_3^*) & (e)
 \end{aligned} \tag{4}$$

où

- $\gamma$  est la constante de couplage non-linéaire,
- $\nu = ik\Delta n$  et  $\Delta n(x)$  est la perturbation de l'indice de réfraction,
- $\tau$  est le temps de réponse du système,
- $I_0 = \sum_{i=1}^4 |A_i|^2$ .

## 4 L'oscillateur semi-linéaire

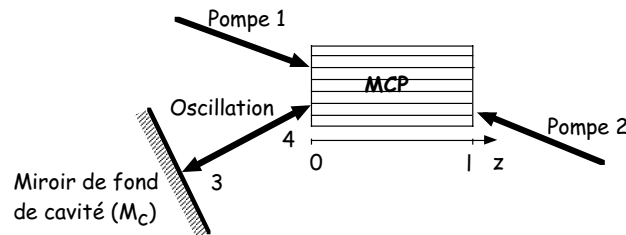


FIG. 3 – Schéma de l'oscillateur semi-linéaire basé sur le réseau à transmission.

L'oscillateur considéré a la géométrie décrite sur la figure 3 [6]. Deux faisceaux contre-propageants 1 et 2 entrent dans le matériau photoréfractif par les faces opposées. Pour n'importe quelle onde signal 4, ce cristal pompé par les deux ondes 1 et 2 agit comme un miroir à conjugaison de phase de réflectivité  $R_{pc}$  et engendre une onde 3 conjuguée de l'onde 4. Par conséquent, il peut former une cavité optique avec un miroir ordinaire  $M_C$ . La condition pour qu'une oscillation stable existe dans cette cavité impose que l'intensité soit la même après chaque aller-retour dans la cavité, c'est-à-dire :

$$RR_{pc} = 1, \tag{5}$$

avec  $R$  la réflectivité du miroir ordinaire  $M_C$  de fond de cavité.

## 5 Résultats expérimentaux

### 5.1 Dispositif expérimental

Un faisceau laser à Argon est utilisé pour pomper le cristal. Le faisceau incident est divisé par une lame séparatrice 50/50 (LS) afin de générer l'onde de pompe 1 contre-propagante à l'onde de pompe 2. L'échantillon fonctionne en tant que miroir à conjugaison

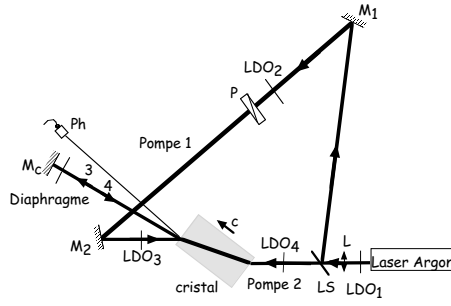


FIG. 4 – Schéma de l'oscillateur semi linéaire fonctionnant sur le réseau à transmission

de phase de réflectivité  $R_{pc}$  et forme avec le miroir  $M_c$  une cavité optique. Le gain du miroir à conjugaison de phase est contrôlé en particulier avec une lame demi-onde  $LDO_1$ . Une partie du faisceau 4 est réfléchi par la face du cristal et renvoyée sur le détecteur Ph, on mesure ainsi l'intensité de l'oscillation. L'ensemble  $LDO_2$ , P (lame demi-onde et polariseur) permet d'ajuster le rapport  $r = \frac{I_2}{I_1}$  des intensités des ondes de pompe.

## 5.2 Oscillation dans une cavité semi linéaire

Nous travaillons avec un diaphragme au sein de la cavité afin de la rendre monomode. La bifurcation apparaît nettement sur la courbe du décalage de fréquence.

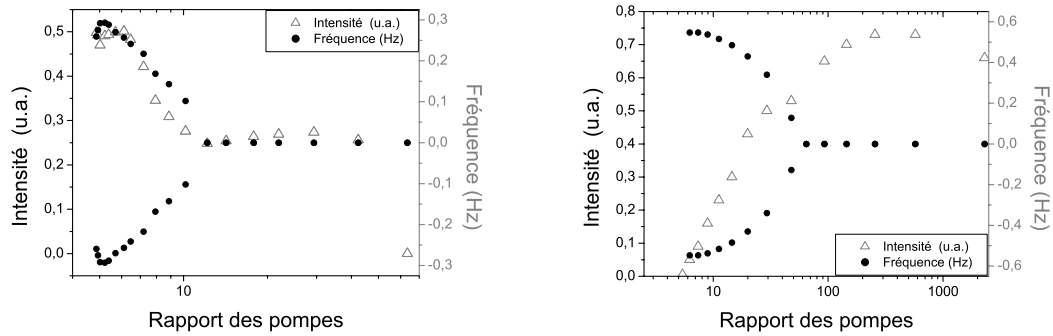


FIG. 5 – Intensité et fréquence de l'oscillation obtenue à droite avec le titanate de baryum et à gauche avec le niobate de potassium

Elle correspond sur la courbe de l'intensité à un décrochement par rapport à la série de points pour lequel le décalage est nul [7].

La position du diaphragme est importante car elle détermine dans une large mesure le niveau de pertes dans la cavité et par conséquent la valeur de  $r_c$  où il y a bifurcation. En effet, cette valeur  $r_c$  est déterminée analytiquement par [8]

$$\ln \frac{\sqrt{Rr_c} - 1}{\sqrt{r_c}(\sqrt{r_c} + \sqrt{R})} = \frac{2(1 + r_c)\sqrt{R}}{(1 + R)\sqrt{r_c}}$$

où  $R$  représente les différentes pertes de la cavité.

Nous avons étudié l'oscillation en fonction du gain du cristal. Pour ce faire, nous utilisons deux lames demi-onde de chaque côté du cristal nous permettant de varier le gain du cristal. Pour tracer les diagrammes de phase (fig 6), nous avons recherché les valeurs du

gain pour lequel l'oscillation passe d'une amplitude périodique à une amplitude constante d'une part, lorsqu'elle s'éteint d'autre part.

Dans la zone I l'oscillation est à amplitude périodique, dans la région II l'oscillation est à amplitude constante. La zone III correspond à une situation où l'oscillation n'existe pas.

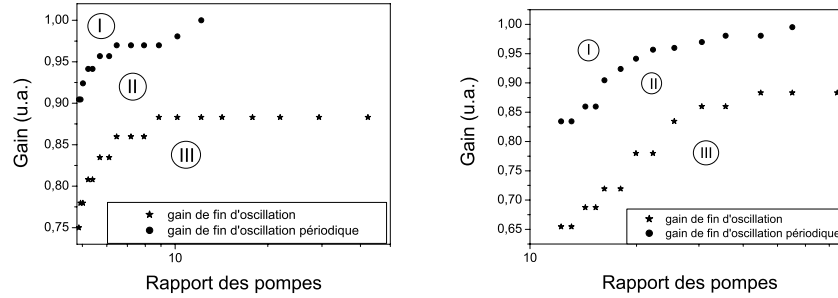


FIG. 6 – Diagrammes de phase expérimentaux pour un MCP avec le niobate de potassium (à gauche) ou le titanate de baryum (à droite).

## 6 Conclusion

Nous avons utilisé des cristaux photoréfractifs afin de réaliser des cavités non-linéaire avec un miroir à conjugaison de phase. Selon la nature de l'oscillation c'est-à-dire soit à amplitude monotone soit à amplitude périodique et en fonction du rapport des pompes, nous avons pu tracer le diagramme de phase. Il nous permet de prédire l'existence de l'oscillation et de caractériser sa dynamique. Maintenant, nous cherchons à obtenir ce diagramme de phase de manière numérique en simulant le système d'équations (4).

## Références

- [1] D. Pepper, *Les applications de la conjugaison de phase*, Pour la Science, 44-54 (1986).
- [2] A.A. Zozulya and V.T. Tikhonchuk, *Investigation of stability of four-wave mixing in photorefractive media*, Physics Letters A, **135** (8,9), 447-452 (1989).
- [3] P. Gunter and J.P. Huignard, *Topics in Applied Physics - Photorefractive Materials and Their Applications II*, Springer-Verlag, **62** (1990).
- [4] M. Cronin-Golomb, B. Fischer, J.O. White and A. Yariv, *Theory and Applications of Four-Wave Mixing in Photorefractive Media*, IEEE Journal of Quantum Electronics, **20** (1), 12-29 (1984).
- [5] D. Pepper, J. Feinberg and N. V. Kukhtarev, *L'effet photoréfractif*, Pour la Science, **158** 58-65 (1990).
- [6] P. Mathey, P. Jullien, S. G. Odoulov, O. A. Shinkarenko, *Second order phase transition in semilinear photorefractive oscillator with two counterpropagating pump waves*, J. Opt. Soc. Am. B, **19**, 405-411 (2002).
- [7] M. Grapinet, P. Mathey, S. Odoulov and D. Rytz, *Semilinear coherent oscillator with reflection-type photorefractive gratings*, Applied Physics B, **77** 551-554 (2003).
- [8] P. Mathey, S. G. Odoulov, D. Rytz, *Oscillation spectra of semilinear photorefractive coherent oscillator with two pump waves*, J. Opt. Soc. Am. B, **19**, (12) 1-11 (2002).

## Analyse non linéaire de l'EEG dans la sclérose en plaques

W. Hamadene<sup>1</sup>, L. Peyrodie<sup>1</sup>, Ph. Gallois<sup>2</sup>, G. Forzy<sup>2</sup>, B. Lenne<sup>2</sup>, P. Hautecoeur<sup>2</sup>,  
C. Vasseur<sup>3</sup>

<sup>1</sup> *Hautes Etudes d'Ingénieurs (ERASM/HEI) - 13 rue de Toul - 59046 Lille*

<sup>2</sup> *Faculté libre de médecine - 56, rue du Port - 59046 Lille cédex*

<sup>3</sup> *LAGIS, CNRS-UMR 8021- Bât.P2, université des Sciences et Technologie de  
Lille - F-59655 villeneuve d'Ascq Cedex  
wassila.hamadene@hei.fr*

### Résumé

La sclérose en plaques (SEP) est une affection inflammatoire provoquant une perte de myéline dans le système nerveux central. Celle-ci est à l'origine de perturbations de la conduction de l'influx nerveux sur les voies sensori-motrices, occasionnant les divers symptômes de la SEP. Les zones de démyélinisation constituent les plaques qui sont d'abord inflammatoires pour devenir ensuite fibreuses, elles sont disséminées dans toute la substance blanche du système nerveux central (encéphale et moëlle)[1].

L'électroencéphalogramme (EEG) a été jusqu'ici étudié dans la SEP en recourant à l'analyse visuelle ou spectrale. L'objectif de ce travail est d'utiliser l'analyse non linéaire, basée sur les méthodes mathématiques issues de la théorie du chaos et de la comparer à l'analyse spectrale. L'analyse non linéaire de l'EEG a été menée chez 200 patients atteints de sclérose en plaques (SEP) dans la perspective d'établir des corrélations cliniques et neuropsychologiques.

*Ce travail a été réalisé avec l'aide d'une bourse de recherche de l'AINF (Association Interprofessionnelle du Nord de la France) ainsi que la fondation Norbert Segard.*

## 1 Introduction

Cet article se propose en premier de présenter la méthode des récurrences, cette méthode fournit un ensemble de coefficients représentatifs de la dynamique d'un système, dans une deuxième partie, nous présentons une comparaison d'un groupe de patients atteints de SEP à un groupe témoin, afin de préciser les fréquences des anomalies EEG, puis seront établies des corrélations entre ces anomalies EEG et les données cliniques et neuropsychologiques.

## 2 Présentation de la méthode des récurrences[2, 3, 4]

### 2.1 Définition et historique

En 1985 Eckmann, Ruelle et Kamphorst ont proposé une méthode graphique assez simple, conçue initialement pour l'affichage des modèles répétitifs non stationnaires, ce qui est une caractéristique très importante des systèmes déterministes, cette stationnarité peut provenir d'un mouvement ou d'une déviation de paramètres ou bien d'un changement brusque de la dynamique du système.

Cette méthode a trouvé un intérêt dans de larges domaines de recherches biologiques et physiques et très récemment dans le domaine médical. De plus, cette méthode s'applique

facilement aux séries temporelles courtes ou bruitées, et permet de détecter les séquences de dérivations et de bifurcations.

## 2.2 Principe de la méthode des récurrences

Soit la série temporelle  $x_{(i=1,2,3,4,\dots,N)}$ , à partir de  $x_i$  on peut construire les vecteurs  $X_i$  de dimension  $m$  tel que :  $X_i = (x_{(i)}, x_{(i+L)}, x_{(i+2L)}, \dots, x_{(i+(m-1)*L)})$ , où  $L$  est un délais temporel,  $X_{(i=1,2,3,4,\dots,N)}$  représente alors le processus multidimensionnel des séries temporelles, ou une trajectoire dans un espace des phases à  $m$  dimension. Les courbes récurrentes, sont des tableaux de  $N \times N$  où un point se trouve à  $(i,j)$  à chaque fois que le point  $X_i$  de la trajectoire est proche d'un autre point  $X_j$ . Le rapport de voisinage en  $X_i$  et  $X_j$  est exprimé en calculant la distance euclidienne entre ces deux vecteurs nommés, c'est à dire,  $x_i$  et  $x_j$  sont récurrents si :

$$\forall(i,j) \leq N : |X_i - X_j| \leq r \quad (1)$$

où  $r$  est un rayon fixe. Dans ce cas ces points récurrents forment des segments de lignes (traits) diagonales qui sont considérés déterministes, ces points sont distingués des points aléatoires qui ne forment pas d'échantillons ou de caractéristiques (traits). Voir FIG. 1 Le

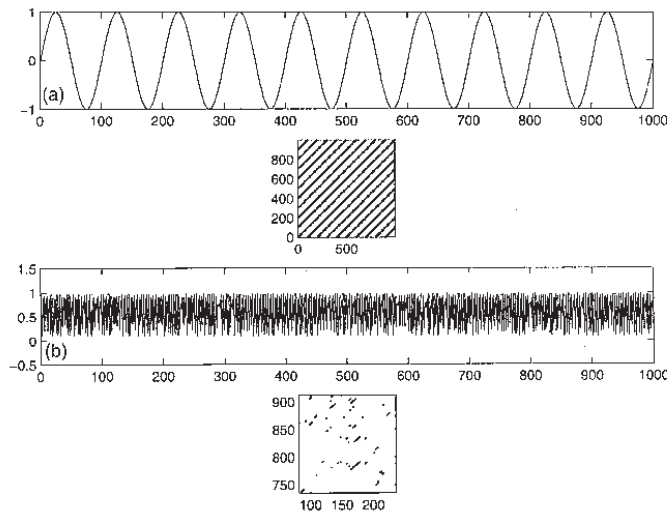


FIG. 1 – Exemples : Application de la méthode des récurrences sur un signal : (au dessus) sinusoïdal, (en dessous) régime chaotique obtenu à partir de l'équation logistique

succès des courbes (graphes) récurrentes relève du fait que la structure de ces courbes est visuellement parlante (facile à détecter). Par exemple, elles sont constituées de segments de parallèles à la diagonale principale, révélant ou identifiant les points les plus proches (les plus voisins) les uns des autres successivement à travers le temps (voir FIG. 1, la fonction sinus), de telle sorte qu'une caractéristique (trait) n'apparaît pas ou n'arrive pas d'une manière aléatoire comme dans l'exemple du régime chaotique (voir FIG. 1, la fonction logistique)[5]. Mais, ces caractéristiques graphiques sont qualitatives, de ce fait, la quantification (numérisation) des récurrences, amène à la génération de trois variables :

- Pourcentage des récurrences : c'est le nombre de points récurrents sur le nombre total de points. Compte tenu de la symétrie par rapport à la grande diagonale, il

est possible d'effectuer les calculs sur la moitié du tableau du côté N. La moitié du tableau (diagonale principale exclue) comprend :  $[P = N \times (N - 1) \div 2]$  points.

Soit  $k$  le nombre de points récurrents, le pourcentage de récurrences est défini comme :

$$\%REC = 100 \times k \div P \quad (2)$$

- Pourcentage de déterminisme : Il représente le nombre de diagonales de points récurrents (de longueur au moins égale à 2) dénommé  $q$  divisé par le nombre de points récurrents.

$$\%DET = 100 \times q \div k \quad (3)$$

- Entropie : C'est l'entropie d'information de Shannon de la distribution des longueurs de lignes, cet histogramme peut être caractérisé par:

$$Entropie = \left\{ \sum P_k \times \log[p_k] \right\} \quad (4)$$

( $P_k$ ) est la probabilité d'observer une diagonale de longueur strictement égale à  $k$ .

Ces trois variables récurrentes évaluent quantitativement la structure déterministe et la complexité de la courbe.

### 3 Méthode de classification des tracés EEG du groupe SEP et du groupe témoin

#### 3.1 Population étudiée

Groupe SEP : 59 hommes et 141 femmes âgés de  $45 \pm 11$  ans répartis en forme rémittente ( $n=106$ ), secondairement progressive ( $n=73$ ) et progressive primaire ( $n=21$ ). L'EDSS moyen (le score de handicap) était de  $4.5 \pm 2$ . L'ancienneté de la maladie était de  $12 \text{ ans} \pm 9$ .

Groupe TÉMOIN : 36 sujets appariés pour le sexe ratio et l'âge.

#### 3.2 Analyse de l'EEG

- Analyse non linéaire de l'EEG : Après une analyse en composantes principales permettant de synthétiser l'information des 17 voies EEG, ont été calculés l'entropie d'information de Shannon de la distribution des longueurs des diagonales, le pourcentage de déterminisme et la longueur maximale des diagonales. Ces mêmes indices ont aussi été calculés pour chaque dérivation EEG, ce qui a permis d'évaluer les différences inter-hémisphériques pour chaque paire d'électrodes et de calculer un  $\delta$  (delta) du Shannon et un  $\delta$  du % de déterminisme. Ces indices refléteraient la différence inter-hémisphérique de dynamique du signal EEG.
- Analyse spectrale : il a été calculé le % d'activité Thêta pour les dérivations temporelles (T3, T4, T5, T6) et pour Fz[6].

#### 3.3 Tests psychométriques

Tests tirés de la batterie de RAO (1986) : SRT, 10/36, GO / NO GO, code de la Wais, PASAT, épanims, fluences, Crossed-Tapping[7].

## 4 Résultats

### 4.1 Comparaison entre le groupe SEP et le groupe témoin

Pour comparer les groupes deux à deux, nous avons utilisé le test Wilcoxon (tests de significativité pour  $p < 0.05$ ). Nous avons constaté une différence significative pour les paramètres suivants :

- Indice de Shannon et % de déterminisme pour chaque voie EEG ( $P < 0.001$ ).
- Indice de Shannon et % de déterminisme après ACP ( $P < 0.005$ ).
- $\delta$  du Shannon et un  $\delta$  du % de déterminisme ( $P < 0.01$ ).
- % d'activité Thêta pour les dérivation temporelles (T3, T4, T5,T6) et pour Fz ( $P < 0.005$ ). Voir FIG. 2

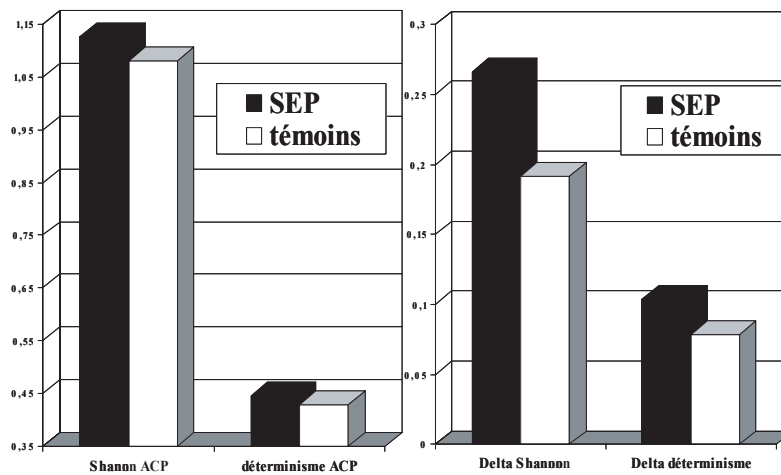


FIG. 2 – comparaison entre le groupe SEP et le groupe témoin

### 4.2 Classification des patients SEP

- Sur le groupe témoin, nous avons défini des normes comme suit (percentile 97.5):
  1. Indice de Shannon ( $IS$ )  $< 1.18$
  2. % déterminisme ( $\%D$ )  $< 0.46$
  3. % thêta temporel ( $TT$ )  $< 21.7$
- Essai de distinction des patients SEP : Après une analyse en composantes principales et à partir des normes définies sur le groupe témoin pour le % de déterminisme ( $\%D$ ) et le % de thêta temporel ( $TT$ ) nous pouvons déterminer 2 groupes de patients SEP.
  - 33.5% du groupe SEP sur 200 ont un  $\%D$  supérieur à la norme.
  - 23.5% du groupe SEP sur 200 ont un  $TT$  supérieur à la norme.
  - 37.5% du groupe SEP sur 200 ont l'un ou l'autre indice supérieur à la norme.
 La discrimination non linéaire est donc plus efficace que l'analyse spectrale.



### 4.3 Corrélations cliniques

- En combinant les deux normes définies sur le groupe témoin pour le % de déterminisme (%D) et le % de thêta temporal (TT), nous avons trouvé des anomalies de l'EEG chez 33.5% des patients. Nous avons ensuite comparé le groupe SEP avec anomalies de L'EEG (n=67) à celui sans anomalie de l'EEG (n=133) à l'aide de critères cliniques comme l'âge, la forme évolutive ( $X^2 = NS$ ), l'ancienneté de la maladie ou le score EDSS. Nous nous sommes rendu compte que ces critères n'étaient pas significatifs. Nous suggérons ainsi que l'analyse non linéaire est plus fine et met en évidence des phénomènes non visibles cliniquement. Voir Tab.1

Formes évolutives / EEG	EEG normal	EEG anormal
Rémittentes	73 (69%)	33 (31%)
Secondairement progressives	45 (62%)	28 (38%)
Progressives d'emblée	15 (71%)	6 (29%)

TAB. 1 – Répartition des anomalies de l'EEG selon les formes cliniques

- Les anomalies de l'EEG sont présentes précocement chez:
  - 31.6% des patients de moins de 1 an d'évolution.
  - 29.7% des patients de moins de 2 ans d'évolution.
  - 32.2% des patients de moins de 3 ans d'évolution.

### 4.4 Corrélations psychométriques

Les tests étant effectués sur 60 patients, nous avons remarqué qu'il y a peu de corrélation entre le % de l'activité thêta pour les dérivation temporelles (TT) (analyse spectrale) et les tests psychométriques, par contre nous avons constaté une corrélation significative (coefficient tau de Kendall) entre les paramètres EEG et le code de la Wais, l'apprentissage de mots, les fluences catégorielles et phonémiques (performances intellectuelles) et l'empan inverse. Les coefficients les plus significatifs étaient établis entre ces tests et les indices non linéaires d'asymétrie de dynamique inter-hémisphérique (ces indices refléteraient la différence inter-hémisphérique pour chaque paire d'électrodes).

Nous avons remarqué que plus le  $\delta$  de l'indice de Shannon est important et plus les fluences phonémiques sont faibles, ainsi, nous suggérons que la diminution des performances neuropsychologiques pourrait être pour une part liée à des troubles du transfert inter-hémisphérique ; et l'on sait que la SEP occasionne souvent des plaques localisées dans le corps calleux qui est la structure responsable de la communication inter-hémisphérique. Voir FIG. 3

## 5 Conclusion

La méthode des récurrences est applicable à un tracé multivoies, comme l'EEG. Les performances discriminantes sont supérieures à celles de l'analyse spectrale de l'EEG. Appliquée à la SEP, les anomalies observées ne sont liées ni à l'âge, ni au sexe, ni aux formes cliniques mais d'apparition précoces. Ces anomalies et en particulier, l'indice d'asymétrie dynamique inter-hémisphériques sont corrélées aux résultats des tests psychométriques, ce

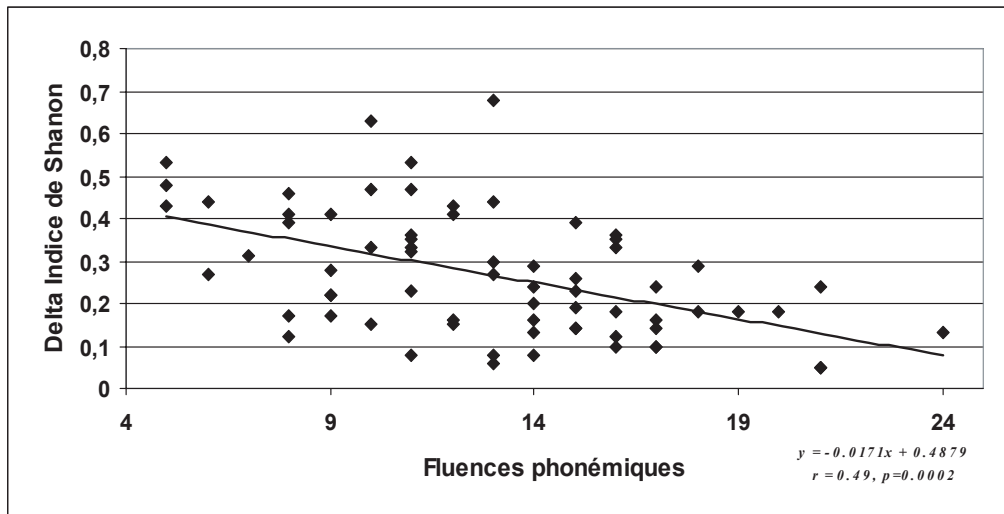


FIG. 3 – Corrélation avec les tests psychométriques

qui suggère la possibilité d'un trouble de transfert informationnelle inter-hémisphérique lié à la présence de lésions de démyélinisation du corps calleux.

## Références

- [1] P. Hautecoeur, *SEP: de la neuroimmunologie à l'immunomodulation*, Bash éditeur, 2004.
- [2] JP. Eckmann, SO. Kamphorst, D. Ruelle, *Reccurence plots of Dynamical Systems*, Europhys Lett 1987;4;973-7.
- [3] JP. Zbilut, N. Thomasson, LC. Webber, *Reccurence quantification analysis as a tool for nonlinear exploration of nonstationary cardiac signals*, Elsevier, Chicago(USA), 2001.
- [4] N. Thomasson, JT. Hoepfner, CL. Webber, JC. Zbilut, *Recurrence quantification in epileptics EEGs*, Physics Letters A 2001;279:94-43 .
- [5] W. Hamadene, L. Peyrodie, *Non linear modelisation of a signal EEG by logistic equation*, IEEE-EMBS Asian-Pacific Conference on Biomedical Engineering 2003 (Japan), Lille, 2003.
- [6] PH. Gallois, G. Forzy, *Comparaison de l'analyse spectrale et de l'analyse non-linéaire de l'EEG dans les troubles cognitifs*, Elsevier, Lille(France), Neurophysiologie clinique 32(2002);297-302.
- [7] S.M. Rao, *Neuropsychology of multiple sclerosis : a critical review*, J. Clin Exp Neuropsychol. 1986 ; 5 : 503.

## Couplage entre deux neurones électroniques dans une configuration maître-esclave

S. Jacquir\*, S. Binczak\* et J.M. Bilbault

*Laboratoire LE2I, CNRS UMR 5158*

*Université de Bourgogne*

*BP 47870, Dijon Cedex, France*

sjacquir@u-bourgogne.fr, stbinc@u-bourgogne.fr

### Résumé

On présente un neurone électronique, conçu en s'inspirant de l'équation de FitzHugh-Nagumo dont l'excitabilité a été modifiée. Selon les conditions initiales et les paramètres choisis, les expériences montrent des comportements variables incluant l'excitation, la bistabilité et les oscillations. Deux neurones sont alors couplés unidirectionnellement par un circuit spécifique. Différentes dynamiques dépendant de la force de couplage sont observées, tel que le doublement de période et le chaos.

## 1 Introduction

Depuis plusieurs années, de nombreux circuits électriques caricaturant les neurones biologiques sont développés [1, 2]. Ils permettent en effet d'étudier expérimentalement les différentes dynamiques d'un système temps réel tout en donnant l'opportunité de contrôler les paramètres du modèle. Un de ces circuits est le Neuristor [1], qui modélise l'équation de FitzHugh-Nagumo (FHN). Dans celui-ci, les oscillations émergent des bifurcations d'Andronov-Hopf. Les impulsions peuvent se propager avec une fréquence minimum définie et non nulle dans certains axones. Néanmoins, certaines fibres nerveuses telles que les cellules pyramidales du cortex sont régies par un mécanisme différent conduisant aux trajectoires de bifurcation homoclinique de type point-selle [3, 4]; ainsi des ondes de propagation de fréquence interspike proche de zéro [2, 5] peuvent exister. En première partie, nous proposons un circuit électrique non linéaire [6], basé sur l'équation de FHN modifiée conduisant aux trajectoires de bifurcation homoclinique de point-selle [7, 8]. Les conditions expérimentales de stabilité, de bistabilité et d'oscillations sont discutées. Dans la deuxième partie, nous utilisons ce circuit en tant que cellule unitaire pour réaliser un réseau de type maître-esclave. Cette configuration est obtenue en couplant de façon unidirectionnelle deux cellules, correspondant à la modélisation de deux neurones couplés synaptiquement. On montrera alors que la force de couplage modifie l'excitabilité du neurone esclave. La modification de la fréquence interspike ou encore l'apparition de phénomènes chaotiques sont montrées expérimentalement.

## 2 Description théorique et expérimentale du système

Le circuit non-linéaire est représenté sur la Fig. 1. La partie (A) est une association de 3 branches en parallèle dont deux sont résistives commutées par des diodes silicium ( $V_d = 0.6\text{ V}$ ) et la troisième, une résistance négative. Le courant non-linéaire  $I_{NL}$  est

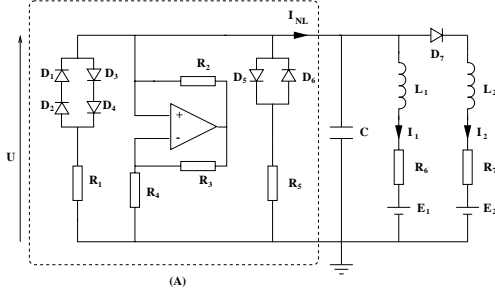


FIG. 1 – Schéma du circuit non-linéaire

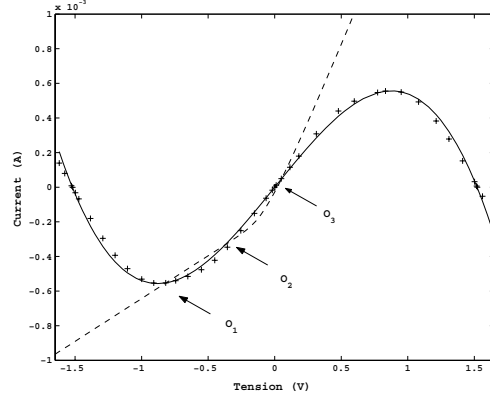


FIG. 2 – Caractéristique expérimentale  $I - V$  (+) de la partie (A). Trait continu:  $I_{NL} = f(U)$  de eq. (1). Trait pointillé: Caractéristique expérimentale  $I_1 + I_2 = h(U)$  avec  $R_6 = 2021 \, \Omega$ ,  $R_7 = 690 \, \Omega$ ,  $L_1 = 10.2 \, mH$ ,  $L_2 = 3.5 \, mH$  et  $E_1 = 0.4 \, V$

exprimé par un ensemble de paramètres appropriés :

$$I_{NL} = f(U) = \frac{1}{R_0} \left[ U - \frac{\gamma^2 U^3}{3} \right], \quad (1)$$

Les paramètres  $R_0$  et  $\gamma$  sont obtenus par la méthode des moindres carrés. La Fig. 2 montre une bonne corrélation entre les résultats expérimentaux et l'éq. (1) en posant  $R_0 = 1010 \, \Omega$  et  $\gamma = 1.138 \, V^{-1}$ . Cette résistance non-linéaire est en parallèle avec un condensateur et deux branches composées d'inductances, de résistances et de sources de tension. Une des deux branches est commutée par une diode silicium. Supposant  $D_7$  idéale ( $I_2 = 0$  si  $U < E_2 + V_d$ ) et en posant les conditions  $\frac{R_6}{L_1} = \frac{R_7}{L_2}$  et  $E_2 = -V_d$ , on obtient le système d'équations normalisées :

$$\begin{cases} \frac{dV}{d\tau} = \left[ V - \frac{V^3}{3} \right] - W \\ \frac{dW}{d\tau} = \varepsilon [g(V) - W - \eta] \end{cases} \quad (2)$$

où  $V = \gamma U$  et  $W = \gamma R_0 (I_1 + I_2)$  correspondent respectivement au potentiel transmembranaire et à la variable de recouvrement;  $\tau = \frac{t}{R_0 C}$  est le paramètre temporel,

$\varepsilon = \frac{R_0 R_6 C}{L_1}$  paramètre de recouvrement et  $\eta = \gamma \frac{R_0}{R_6} E_1$  paramètre de bifurcation.  $g(V)$  est une fonction linéaire par parties,  $g(V) = \alpha V$  si  $V \leq 0$  et  $g(V) = \beta V$  si  $V > 0$  où  $\alpha = \frac{R_0}{R_6}$  et  $\beta = \frac{L_1 + L_2}{L_2} \frac{R_0}{R_6}$  contrôlent la forme et la localisation des nullclines [6]. Lorsque  $\alpha = \beta = 1$ , le système correspond à une cellule standard de FitzHugh-Nagumo et un seul point d'équilibre émergeant des bifurcations d'Andronov-Hopf existe. D'après la Fig. 2, trois points d'équilibre  $O_1(V^{(1)}, W^{(1)})$ ,  $O_2(V^{(2)}, W^{(2)})$  et  $O_3(V^{(3)}, W^{(3)})$  peuvent

exister (un portrait de phase  $(V, W)$  expérimental peut être déduit de cette figure en multipliant l'axe des  $x$  par  $1/\gamma$  et l'axe des  $y$  par  $1/R_0$ ). Nous pouvons noter que le portrait de phase est très similaire à celui des équations de Morris-Lecar modifiées [5] modélisant par exemple les cellules pyramidales. L'analyse de stabilité de l'éq. (2) donne plusieurs résultats dépendant de l'emplacement des trois points fixes et des conditions initiales. En conservant les paramètres de la Fig. 2, c'est-à-dire  $\alpha = 0.5$  et  $\beta = 1.96$ , une détermination expérimentale des courbes de bifurcation dans le plan  $(\eta, \epsilon)$  est donnée par la Fig. 3. Dans

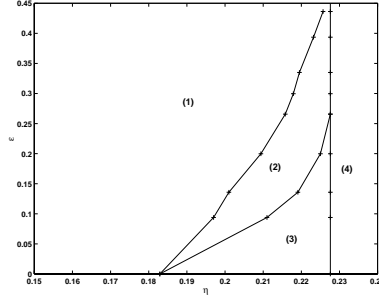


FIG. 3 – Courbes de bifurcation dans le plan  $(\eta, \epsilon)$

le domaine (1), les points  $O_1$  et  $O_3$  sont stables et instables respectivement, tandis que  $O_2$  est un point-selle. Par conséquent, si la perturbation de l'état de repos  $O_1$  est suffisamment grande pour se trouver entre les points  $O_2$  et  $O_3$  de la Fig. 2, le système répond avec une excitation, comme illustré sur la Fig. 4. L'encart supérieur montre une excitation tandis

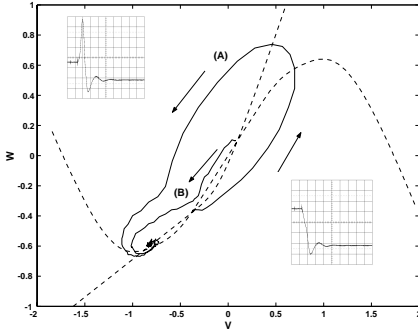


FIG. 4 – Plan de phase  $(V, W)$  montrant l'excitation (domaine (1) de la Fig. 3) avec  $\eta = 0.19$  et  $\epsilon = 0.2$  ( $E_1 = 0.332$  V et  $C = 1$  nF).

Encart : excitation (encart supérieur); perturbation au repos (encart inférieur). Paramètres des encarts : abscisse  $20 \mu\text{s}/\text{div}$ ; ordonnée  $225 \text{ mV}/\text{div}$

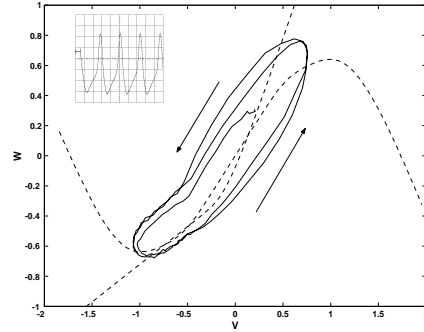


FIG. 5 – Plan de phase  $(V, W)$  montrant la bistabilité (domaine (2) de la Fig. 3) avec  $\eta = 0.22$  et  $\epsilon = 0.2$  ( $E_1 = 0.3876$  V et  $C = 1$  nF).

Encart : train d'impulsions correspondant au cycle limite dans le portrait de phase expérimental. Paramètres de l'encart : abscisse  $20 \mu\text{s}/\text{div}$ ; ordonnée  $195 \text{ mV}/\text{div}$

que celui du bas montre une perturbation relaxant vers l'état de repos; la figure principale donne le portrait de phase expérimental dans les deux cas. Le domaine (2) correspond au cas de bistabilité caractérisé par l'existence d'un point fixe stable  $O_1$  et un cycle limite stable. Des oscillations existent si la perturbation est assez grande, comme illustré sur la Fig. 5. L'encart montre un train d'impulsions correspondant au cycle limite. Dans le do-

maine (3), le point fixe perd sa stabilité via une bifurcation d'Andronov-Hopf subcritique et seulement les oscillations existent. Les expériences ont montré que contrairement au modèle de FHN standard, de longs intervalles interspikes peuvent être trouvés lorsque les deux points d'équilibre  $O_1$  et  $O_2$  se rejoignent. Enfin, dans le domaine (4), un seul point fixe instable  $O_3$  existe.

Les neurones communiquent principalement entre eux à travers des structures appelés synapses via des messagers chimiques. Il est intéressant de concevoir et de réaliser un circuit électrique possédant des caractéristiques semblables au couplage synaptique. La Fig. 6 présente le couplage unidirectionnel entre deux cellules dans une configuration maître-esclave où  $N_i$  ( $i = 1, 2$ ) décrits par la Fig. 1.

$D$  est le paramètre de couplage (force synaptique) et son circuit électrique est illustré par la Fig. 7. Le circuit de couplage inclut un sommateur inverseur, un inverseur et un suiveur.  $U_1$  (resp.  $U_2$ ) est la tension aux bornes de la capacité de la cellule  $N_1$  (resp. cellule  $N_2$ ). La valeur de la résistance  $R$  est fixée à  $100\text{ k}\Omega$ ,  $R_a = 10\text{ k}\Omega$ , et  $R_c$  est une résistance variable.

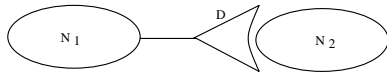


FIG. 6 – Couplage entre cellules  $N_1$  et  $N_2$

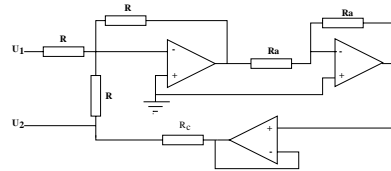


FIG. 7 – Circuit électrique de couplage

En utilisant les lois de Kirchoff, les équations normalisées peuvent être exprimées par :

$$\begin{cases} \frac{dV_i}{d\tau} = \left[ V_i - \frac{V_i^3}{3} \right] - W_i + DV_1 \delta_{2,i} \\ \frac{dW_i}{d\tau} = \varepsilon_i \left[ g(V_i) - W_i - \eta_i \right] \end{cases} \quad (3)$$

avec  $i = \{1, 2\}$ ,  $D = \frac{R_0}{R_c}$ , et où  $\delta_{2,i}$  est le symbole de Kronecker,  $\delta_{2,1} = 0$  et  $\delta_{2,2} = 1$ .

## 2.1 Le neurone $N_1$ est silencieux

La tension  $V_1$  est constante, la variable  $W_2$  et le paramètre de bifurcation  $\eta_2$  de la cellule  $N_2$  sont alors donnés par :

$$\begin{cases} \eta_2(V_1) = \eta_2(V_1 = 0) - DV_1 \\ W_2(V_1) = W_2(V_1 = 0) + DV_1 \end{cases} \quad (4)$$

L'excitabilité de la cellule  $N_2$  est modifiée et correspond à un décalage dans le plan  $(\eta, \epsilon)$ , ce qui a été confirmé expérimentalement.

Les conditions initiales sont fixées telles que, quand  $D = 0$ , le neurone  $N_1$  est dans le domaine (1) à l'état de repos, alors que le neurone  $N_2$  est dans le domaine (2) et produit un train d'impulsions. L'augmentation de la force de couplage entraîne un décalage des courbes de bifurcation du neurone esclave. Selon la valeur de  $D$ ,  $N_2$  rejoint le domaine (1) : le neurone esclave devient silencieux. La capacité du neurone  $N_1$  à inhiber le neurone

$N_2$  correspond ainsi au décalage prévu par l'éq. (4).

Ce résultat suggère que, pour une activité définie d'un neurone esclave, la force de couplage doit être au-dessus d'une valeur critique pour changer l'excitabilité du neurone esclave.

## 2.2 Le neurone N1 oscille

Les courbes de bifurcation des neurones sont traduitées dans le plan  $(\eta, \epsilon)$  d'une façon périodique. Le neurone esclave situé près d'une courbe de bifurcation peut croiser parfois cette courbe et développer un comportement dynamique différent. Par conséquent

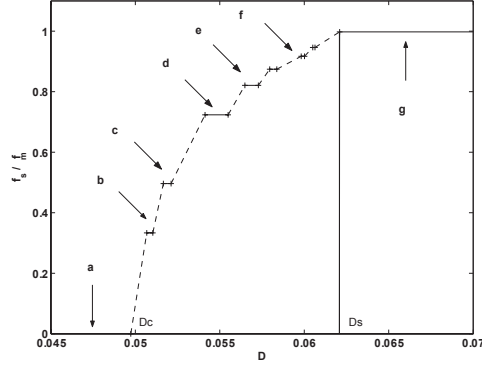


FIG. 8 – Fréquence interspike  $f_s$  de  $N_2$  normalisée par la fréquence interspike  $f_m$  de  $N_1$  en fonction de  $D$  avec  $C = 0$  nF,  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0$ ,  $\eta_1 = 0.199$  et  $\eta_2 = 0.109$ .

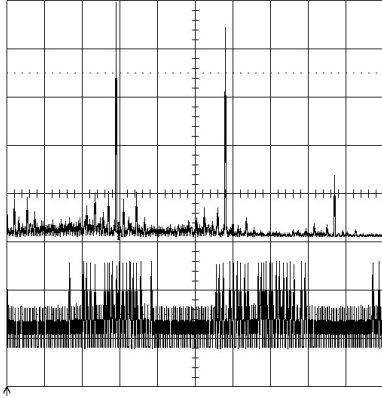


FIG. 9 – Signal périodique et le spectre de Fourier de la cellule esclave lorsque  $D = 0.055$ . Dessous: abscisse: temps (5 ms/div); ordonnée: tension  $U_2$  (1 V/div). Dessus: abscisse: fréquence (10 KHz/div; ordonnée: amplitude de la fft (21.5 mV/div)

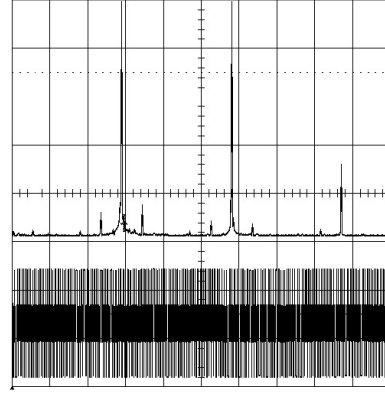


FIG. 10 – Signal chaotique et le spectre de Fourier de la cellule esclave lorsque  $D = 0.055$ . Dessous: abscisse: temps (5 ms/div); ordonnée: tension  $U_2$  (1 V/div). Dessus: abscisse: fréquence (10 KHz/div; ordonnée: amplitude de la fft (21.5 mV/div)

nous avons étudié l'influence du couplage unidirectionnel sur  $N_2$ , dans le cas où le neurone  $N_1$  se situe (c.-à-d. quand  $D = 0$ ) dans le domaine (2) et oscille, alors que le neurone  $N_2$  est dans le domaine (1) à l'état de repos. Selon la valeur de  $D$ , plusieurs comportements dynamiques différents peuvent être identifiés, comme illustré sur la Fig. 8. Pour  $D$

inférieur à  $D_c$ ,  $N_2$  oscille de façon subthreshold. L'augmentation de la force de couplage provoque un doublement de périodes pour le neurone esclave, la période est multipliée par  $5/4$ (e),  $4/3$ (d),  $2$ (c),  $3$ (b)... Le neurone esclave présente également un état chaotique (représenté par des traits pointillés sur la Fig. 8) dont les fréquences interspike sont variables. Quand le paramètre de couplage croît graduellement, on passe alternativement d'un régime périodique d'impulsions à un régime chaotique. L'augmentation du couplage provoque l'augmentation des perturbations fréquentielles et ainsi le chaos domine dans la cellule esclave. (Fig.9,10) [9]. Pour  $D$  supérieur à  $D_s$ ,  $N_2$  est complètement synchronisé avec  $N_1$ .

### 3 Conclusion

Un circuit électrique non linéaire montrant la génération de bifurcations d'Andronov-Hopf ou des bifurcations homocliniques de type point-selle a été décrit. Il peut être utilisé comme une cellule fondamentale pour réaliser un réseau neuronal. De plus, nous avons considéré le cas de deux cellules couplées, dans une configuration maître-esclave. Nous avons montré que les intervalles entre des impulsions successives peuvent être chaotiques et dépendent de la force de couplage. En complément, il serait intéressant d'étudier le couplage bidirectionnel, correspondant au cas de synapse électrique, et l'influence de la taille du réseau sur la dimension fractale de l'information [10].

### Références

- [1] A. C. Scott. *Neuroscience: A mathematical primer*, Springer-Verlag, New York, 2002.
- [2] C. Koch. *Biophysics of computation: Information processing in single neurons*, Oxford University Press, Oxford, 1998.
- [3] J. Nagumo, S. Arimoto and S. Yoshizawa, An active impulse transmission line simulating nerve axon, *Proc. IRE* **50** (1962) 2061-2070.
- [4] E. M. Izhikevich, Neural excitability, spiking and bifurcations, *Int. J. Bifurcation and Chaos* **10** 6 (2000) 1171-1266.
- [5] J. Rinzel and B. B. Ermentrout, Analysis of neural excitability and oscillations, In *Methods in neuronal modeling*, C. Koch and I. Segev editors, second edition, MIT press, Cambridge, Massachusetts (1998) 251-292.
- [6] S. Binczak, V. B. Kasantsev, V. I. Nekorkin, J. M. Bilbault, Experimental study of bifurcations in modified FitzHugh-Nagumo cell, *Elect. Lett.* **39** (2003) 961-962.
- [7] V. B. Kasantsev, Selective communication and information processing by excitable systems, *Phys. Rev. E* **64** (2001) 056210.
- [8] S. P. Dawson, M. V. D'Angelo and J. E. Pearson, Towards a global classification of excitable reaction-diffusion systems, *Phys. Lett. A* **265** (2000) 346-352.
- [9] A. H. Nayfeh, B. Balachandra, *Applied nonlinear dynamics*, A Wiley-Interscience Publication (1995).
- [10] V. B. Kasantsev, V. I. Nekorkin, S. Binczak, J. M. Bilbault, Spiking patterns emerging from wave instabilities in a one-dimensional neural lattice, *Phys. Rev. E* **68** (2003) 017201,1-4.



## Transition sous-critique à la turbulence dans l'écoulement de Couette plan

Maher Lagha, Paul Manneville

*Laboratoire d'Hydrodynamique, École polytechnique, 91128 Palaiseau cedex*  
 maher@ladhyx.polytechnique.fr,  
 paul.manneville@ladhyx.polytechnique.fr

### Résumé

Nous présentons les premiers résultats de simulations numériques d'un modèle simplifié de l'écoulement de Couette plan obtenu au moyen d'un développement de Galerkin de la dépendance spatiale transverse  $y$ . C'est un système d'équations aux dérivées partielles non-linéaires gouvernant la dépendance des vitesses dans le plan  $(x, z)$ , voir Fig.1a. Pour faciliter l'étude des bandes turbulentes obliques observées expérimentalement [1], le modèle a été écrit dans un référentiel faisant un angle arbitraire  $\theta$  avec la direction de l'écoulement de base. Cette approche à la *Swift-Hohenberg* qui devrait donner accès au mécanisme de l'intermittence spatio-temporelle susceptible d'intervenir dans la transition à la turbulence de l'écoulement de Couette plan.

## 1 Introduction

Bien que l'écoulement de Couette plan soit l'une des configurations les plus simples et malgré les progrès faits sur le plan théorique, expérimental et numérique, sa transition à la turbulence n'a pas encore reçu une explication satisfaisante. La démarche classique consiste à suivre l'apparition de nouvelles solutions résultant d'instabilités linéaires et à en étudier la déstabilisation ultérieure avec les méthodes perturbatives habituelles, ce qui a été fait par exemple pour les vortex de Taylor ou les rouleaux de Rayleigh-Bénard (contexte *globalement super-critique*). Malheureusement, l'écoulement de Couette plan étant stable pour tout nombre de Reynolds, la théorie linéaire ne fournit pas le point de départ. Expérimentalement, un nombre de Reynolds  $R_g$  de l'ordre de 320 a été déterminé, en deçà duquel toutes les perturbations finissent par s'atténuer et au delà duquel l'amplitude des perturbations nécessaire pour déstabiliser l'écoulement décroît comme une puissance négative du nombre de Reynolds. La transition se manifeste par la formation de petites poches turbulentes (spots) dans un écoulement globalement laminaire pour  $R$  voisin de  $R_g$ . L'état qui remplit ces poches ne peut pas être obtenu par continuité avec l'écoulement de base laminaire: on dit qu'on a une transition *globalement sous-critique* [2]. Depuis des années, deux grands axes de recherches ont été ainsi développés pour expliquer cette transition. Le premier est la continuation directe de la théorie linéaire et repose sur l'étude des effets de la *non-normalité* de l'opérateur d'évolution temporelle [3], amplifiant transitoirement l'énergie cinétique des perturbations infinitésimales. Le second axe est la recherche de solutions non-linéaires non-triviales à l'équation de Navier-Stokes [4]. Mais aucun d'eux ne permet de prédire la transition. Plusieurs modèles mathématiques simplifiés ont été proposés en termes d'ODEs gouvernant un petit nombre de degrés de liberté combinant l'effet de la non-normalité à celui des non-linéarités [4, 5]. Cette démarche correspond à des configurations où l'écoulement est contraint par des conditions de confinement qui ne correspondent pas à la situation expérimentale. C'est la raison pour laquelle

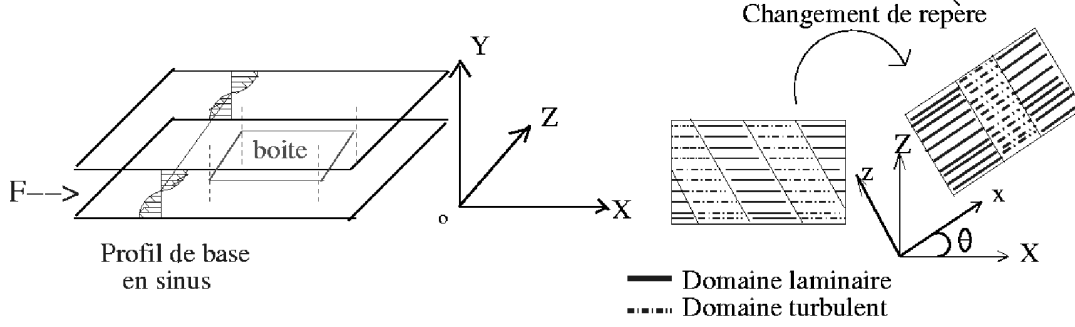


FIG. 1 – a) Configuration de l'écoulement de Couette plan. b) Repère adapté à la simulation des bandes obliques.

nous nous intéressons à des modélisations spatio-temporelles dérivant d'une approche de type "Swift–Hohenberg" en convection. Nous présentons ici un modèle à cinq champs et quelques résultats typiques de simulations.

## 2 Modèle à cinq champs

Soit un fluide de viscosité cinématique  $\nu$  situé entre deux plaques planes perpendiculaires à l'axe  $y$  et localisées en  $y = \pm h$ . Le déplacement des parois dans leur plan à la vitesse  $(\pm U_p, 0, 0)$  engendre l'écoulement de cisaillement simple dit de *Couette plan*. Les vitesses sont adimensionnées par  $U_p$  et les longueurs par  $h$ , voir Fig.1a. Le nombre de Reynolds noté  $R$  est défini par  $R = U_p h / \nu$ . Avec des conditions aux limites physiques rigide-rigide, la solution laminaire de base (indice 'b') est  $\hat{\mathbf{u}}_b = (y, 0, 0)$ . Ces conditions aux limites ne se prêtent pas facilement à la modélisation, au contraire des conditions libre-libre qui permettent des développements de Galerkin à l'aide de lignes trigonométriques [6]. En contre partie, le fluide n'est plus entraîné par les parois et il faut ajouter une force en volume  $\hat{\mathbf{F}}$  qui produit un profil de vitesse en sinus  $\hat{\mathbf{u}}_b = (\sin(\beta y), 0, 0)$ , avec  $\beta = \pi/2$ .

$$\partial_t \hat{\mathbf{u}} + \hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla \hat{\mathbf{u}} = -\nabla p + R^{-1} \nabla^2 \hat{\mathbf{u}} + \hat{\mathbf{F}}, \quad \nabla \cdot \hat{\mathbf{u}} = 0,$$

De l'équation de Navier–Stokes on tire  $\hat{\mathbf{F}} = (\mathcal{F} \sin(\beta y), 0, 0)$ , avec  $\mathcal{F} = \beta^2/R$ . Dans le plan de l'écoulement, les conditions aux limites seront prises périodiques à des distances  $L_x$  (suivant  $x$ ) et  $L_z$  (suivant  $z$ ). Pour étudier les bandes turbulentes obliques observées expérimentalement [1] sans être gênés par cette périodicité, suivant en cela une suggestion de D. Barkley, nous avons choisi de récrire le modèle dans un référentiel faisant un angle  $\theta$  arbitraire avec la direction de l'écoulement de base, Fig 1b. La force volumique doit donc être plutôt prise sous la forme  $\hat{\mathbf{F}} = \mathcal{F} \sin(\beta y)(\cos(\theta), 0, \sin(\theta))$  toujours avec  $\mathcal{F} = \beta^2/R$ , ce qui conduit au profil de base:  $\hat{\mathbf{u}}_{\text{base}} = \sin(\beta y)(U_b, 0, W_b)$ , avec  $U_b = \cos(\theta)$  et  $W_b = \sin(\theta)$ . À cette solution de base, on superpose des perturbations  $(u, v, w)$  développées sur une base complète de sinus et cosinus satisfaisant les conditions aux limites libre-libre:  $\partial_y u = \partial_y w = 0$  et  $v = \partial_{yy} v = 0$  en  $y = \pm 1$ . Le développement de Galerkin des perturbations s'écrit ainsi:

$$\begin{aligned} (u, w, p) &= (U_0, W_0, P_0) + (U_1, W_1, P_1) \sin(\beta y) + (U_2, W_2, P_2) \cos(2\beta y) + \dots, \\ v &= V_1 \cos(\beta y) + V_2 \sin(2\beta y) + \dots \end{aligned}$$

où  $U_0, W_0$  etc ... sont fonctions de  $x, z$  et  $t$ . Pour éliminer la pression du système d'équations, on utilise des fonctions de courants et des potentiels:

$$\begin{aligned} U_0 &= -\partial_z \Psi_0; & W_0 &= \partial_x \Psi_0; \\ U_1 &= \partial_x \Phi_1 - \partial_z \Psi_1; & W_1 &= \partial_z \Phi_1 + \partial_x \Psi_1; & \beta V_1 &= (\partial_{xx} + \partial_{zz})\Phi_1; \\ U_2 &= \partial_x \Phi_2 - \partial_z \Psi_2; & W_2 &= \partial_z \Phi_2 + \partial_x \Psi_2; & -2\beta V_2 &= (\partial_{xx} + \partial_{zz})\Phi_2; \\ & \dots & \text{etc.} & \dots \end{aligned}$$

La troncature de ce développement au-delà de l'indice 1 donne le modèle à trois champs étudié auparavant par l'un d'entre nous [6, 7]. Le travail présenté ici est la prolongation de cette étude avec une troncature portée un cran plus loin. Les équations du modèle à cinq champs complet sont:

$$\begin{aligned} (\partial_t - R^{-1}\Delta_2) \Delta_2 \Psi_0 &= (\partial_z N_{U_0} - \partial_x N_{W_0}) + \frac{U_b}{2}(\partial_z \Delta_2 \Phi_1 - \partial_x \Delta_2 \Psi_1) \\ &\quad - \frac{W_b}{2}(\partial_x \Delta_2 \Phi_1 + \partial_z \Delta_2 \Psi_1), \\ (\partial_t - R^{-1}(\Delta_2 - \beta^2)) \Delta_2 \Psi_1 &= (\partial_z N_{U_1} - \partial_x N_{W_1}) - U_b \partial_x \Delta_2 \Psi_0 + \frac{U_b}{2} \partial_x \Delta_2 \Psi_2 \\ &\quad - \frac{U_b}{4} \partial_z \Delta_2 \Phi_2 - W_b \partial_z \Delta_2 \Psi_0 + \frac{W_b}{2} \partial_z \Delta_2 \Psi_2 + \frac{W_b}{4} \partial_x \Delta_2 \Phi_2, \\ (\partial_t - R^{-1}(\Delta_2 - 4\beta^2)) \Delta_2 \Psi_2 &= (\partial_z N_{U_2} - \partial_x N_{W_2}) + \frac{U_b}{2} \partial_x \Delta_2 \Psi_1 + \frac{U_b}{2} \partial_z \Delta_2 \Phi_1 \\ &\quad + \frac{W_b}{2} \partial_z \Delta_2 \Psi_1 - \frac{W_b}{2} \partial_x \Delta_2 \Phi_1, \\ (\partial_t - R^{-1}(\Delta_2 - \beta^2))(\Delta_2 - \beta^2) \Delta_2 \Phi_1 &= \beta^2(\partial_x N_{U_1} + \partial_z N_{W_1}) - \Delta_2(\beta N_{V_1}) \\ &\quad + \frac{U_b}{4}(\Delta_2 - 3\beta^2) \partial_x \Delta_2 \Phi_2 + \frac{W_b}{4}(\Delta_2 - 3\beta^2) \partial_z \Delta_2 \Phi_2, \\ (\partial_t - R^{-1}(\Delta_2 - 4\beta^2))(\Delta_2 - 4\beta^2) \Delta_2 \Phi_2 &= 4\beta^2(\partial_x N_{U_2} + \partial_z N_{W_2}) + \Delta_2(2\beta N_{V_2}) \\ &\quad + U_b \partial_x \Delta_2 \Delta_2 \Phi_1 + W_b \partial_z \Delta_2 \Delta_2 \Phi_1, \end{aligned}$$

dans lesquels, les termes non-linéaires sont donnés par:

$$\begin{aligned} N_{U_0} &= U_0 \partial_x U_0 + W_0 \partial_z U_0 + \frac{1}{2}(U_1 \partial_x U_1 + \beta V_1 U_1 + W_1 \partial_z U_1) \\ &\quad + \frac{1}{2}(U_2 \partial_x U_2 - 2\beta V_2 U_2 + W_2 \partial_z U_2), \\ N_{W_0} &= U_0 \partial_x W_0 + W_0 \partial_z W_0 + \frac{1}{2}(U_1 \partial_x W_1 + \beta V_1 W_1 + W_1 \partial_z W_1) \\ &\quad + \frac{1}{2}(U_2 \partial_x W_2 - 2\beta V_2 W_2 + W_2 \partial_z W_2), \\ N_{U_1} &= U_0 \partial_x U_1 + W_0 \partial_z U_1 + U_1 \partial_x U_0 + W_1 \partial_z U_0 - \frac{1}{2}(U_1 \partial_x U_2 + 2\beta V_1 U_2 + W_1 \partial_z U_2) \\ &\quad - \frac{1}{2}(U_2 \partial_x U_1 - \beta V_2 U_1 + W_2 \partial_z U_1), \\ N_{V_1} &= U_0 \partial_x V_1 + W_0 \partial_z V_1 + \frac{1}{2}(U_1 \partial_x V_2 + 2\beta V_1 V_2 + W_1 \partial_z V_2) \\ &\quad + \frac{1}{2}(U_2 \partial_x V_1 - \beta V_2 V_1 + W_2 \partial_z V_1), \\ N_{W_1} &= U_0 \partial_x W_1 + W_0 \partial_z W_1 + U_1 \partial_x W_0 + W_1 \partial_z W_0 - \frac{1}{2}(U_1 \partial_x W_2 + 2\beta V_1 W_2 + W_1 \partial_z W_2) \\ &\quad - \frac{1}{2}(U_2 \partial_x W_1 - \beta V_2 W_1 + W_2 \partial_z W_1), \\ N_{U_2} &= U_0 \partial_x U_2 + W_0 \partial_z U_2 + U_2 \partial_x U_0 + W_2 \partial_z U_0 - \frac{1}{2}(U_1 \partial_x U_1 - \beta V_1 U_1 + W_1 \partial_z U_1), \\ N_{V_2} &= U_0 \partial_x V_2 + W_0 \partial_z V_2 + \frac{1}{2}(U_1 \partial_x V_1 - \beta V_1 V_1 + W_1 \partial_z V_1), \\ N_{W_2} &= U_0 \partial_x W_2 + W_0 \partial_z W_2 + U_2 \partial_x W_0 + W_2 \partial_z W_0 - \frac{1}{2}(U_1 \partial_x W_1 - \beta V_1 W_1 + W_1 \partial_z W_1). \end{aligned}$$

On remarquera que dans le modèle à trois champs, l'équation pour  $\Phi_1$  ne dépend pas explicitement de l'angle  $\theta$  (pas de termes en  $U_b$  et  $W_b$ ), ce qui n'est plus le cas maintenant et porte à conséquence pour la simulation du développement des bandes turbulentes obliques.

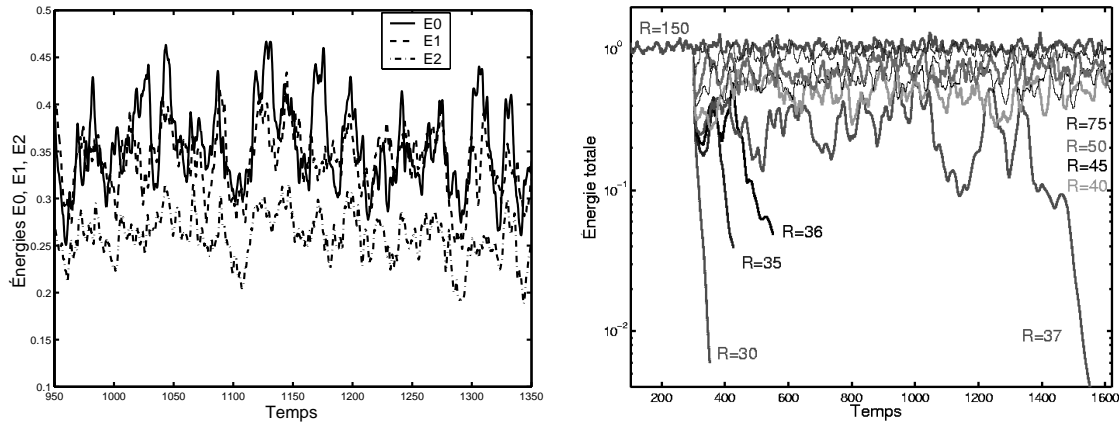


FIG. 2 – À gauche: État auto-entretenu obtenu pour  $R = 75$ . À droite: Expérience de trempe. Dans chaque cas:  $N_x = 256$ ,  $N_z = 128$ ,  $dx = dz = 0.125$ .

Nous avons vérifié que le modèle à cinq champs préserve la stabilité linéaire de l'écoulement de Couette plan pour tout  $R$  et que les termes non-linéaires conservent l'énergie cinétique des perturbations. Les termes en  $U_b$  et  $W_b$  placés aux membres de droite des équations sont responsables de la non-normalité de l'opérateur d'évolution linéaire.

### 3 Simulations numériques

Nous avons utilisé une méthode pseudo-spectrale désaliasée par la règle des 3/2 qui tire parti des conditions aux limites périodiques en  $x$  et  $z$ . L'évolution temporelle intègre exactement les termes aux membres de gauche des équations de champs qui sont diagonaux dans l'espace spectral. Les termes linéaires et non-linéaires des membres de droite sont traités par un schéma d'Adams–Bashford d'ordre 2 [7]. Les pas d'espace  $dx$  et  $dz$  ont été choisis de manière à capturer les structures cohérentes. Expérimentalement, celles-ci prennent la forme de vortex contrarotatifs d'une largeur de l'ordre de  $2h$  à  $3h$ . Pour mettre au moins une dizaine de points par vortex il faut donc prendre  $dz \leq 0.25$ . Le pas  $dx$  est toujours pris égal à  $dz$ . Les tailles horizontales  $L_x$  et  $L_z$  se déduisent alors des nombre de modes  $N_x$  et  $N_z$ . Nous nous intéressons à des systèmes étendus de tailles  $(32, 16)$  à  $(512, 256)$  en unité de  $h$ . Une convergence temporelle satisfaisante est obtenue à condition de maintenir  $dt \leq 0.02$ . Nous avons défini trois énergies moyennes globales:  $E_0 = \langle \mathcal{E}_0 \rangle$ ,  $E_1 = \langle \mathcal{E}_1 \rangle$  et  $E_2 = \langle \mathcal{E}_2 \rangle$ , où  $\langle f \rangle$  désigne la moyenne spatiale de  $f$ . Les énergies locales sont définies par  $\mathcal{E}_0 = U_0^2 + W_0^2$ ,  $\mathcal{E}_1 = \frac{1}{2}(U_1^2 + V_1^2 + W_1^2)$ ,  $\mathcal{E}_2 = \frac{1}{2}(U_2^2 + V_2^2 + W_2^2)$  calculées en chaque point  $(x, z)$ .<sup>1</sup>

Des états turbulents auto-entretenus ont pu être obtenus, partant d'une condition initiale d'énergie cinétique suffisante, Fig. 2a.<sup>2</sup> De tels états ont servi en premier lieu à des expériences de trempe réalisées pour déterminer le seuil de transition à la turbulence: à

1. On notera l'absence du facteur 1/2 dans l'expression de  $\mathcal{E}_0$ : l'intégration sur  $[-1, +1]$  d'une fonction indépendante de  $y$  donne un facteur 2 qui compense le 1/2, à la différence des moyennes quadratiques sur  $y$  des sinus et cosinus.

2. L'énergie  $E_2$  est systématiquement inférieure aux énergies  $E_{0,1}$ , du moins tant que  $R$  n'est pas trop grand (ici  $R = 75$ ), ce qui suggère que les deux champs ajoutés sont esclaves des trois premiers et valide la troncature du modèle à l'ordre deux.

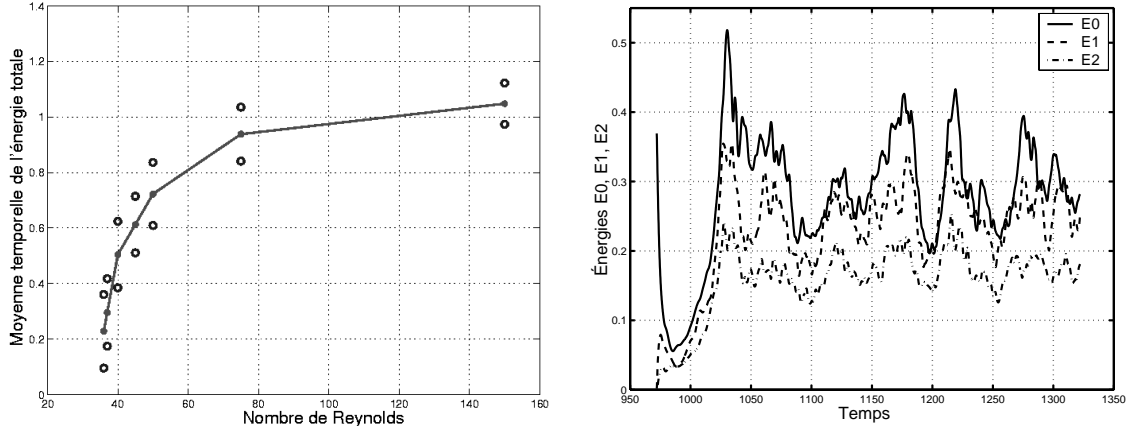


FIG. 3 – À gauche: diagramme de bifurcation du modèle. À droite: croissance des champs 1 et 2 partant d'une condition initiale ne contenant que le champ 0 pour  $R = 50$

un instant donné,  $R$  est abaissé et l'on suit la solution pour déterminer si l'état turbulent perdure. Le résultat est présenté sur la Fig. 2b. Pour cette expérience, la condition initiale est un état auto-entretenu réalisé pour  $R = 150$ . Pour  $R = 30$ , la turbulence s'effondre de façon monotone. Le long transitoire pour  $R = 37$  finit lui aussi par relaminariser, alors que les régime turbulent persiste aussi longtemps que l'on fait durer la simulation pour  $R$  plus grand. Ceci conduit à l'estimation du seuil de stabilité globale  $R_g \sim 38$  dans ce modèle. Ce nombre de Reynolds ne semble dépendre que faiblement de l'ordre de la troncature dans le développement de Galerkin ( $R_g \sim 45$  pour le modèle à trois champs). Il est relativement bas par rapport à la valeur déterminée expérimentalement, ce qu'il est facile d'attribuer à l'effet du choix des conditions aux limites de type libre-libre, bien connu en convection. En portant la moyenne temporelle de l'énergie cinétique totale pour chaque nombre de Reynolds, on obtient le diagramme de bifurcation présenté sur la Fig. 3a. Les points correspondent à l'écart type des fluctuations autour de la valeur moyenne de l'énergie portée en ligne continue. Cette courbe est caractéristique d'une transition sous-critique.

D'autres expériences ont été conduites pour étudier les interactions entre les champs en faisant naître par exemple le champs  $\Psi_2$ ,  $\Phi_2$  et  $\Psi_1$ ,  $\Phi_1$  à partir du champ  $\Psi_0$ . Sur la Fig. 3. b qui présente le résultat d'une telle expérience, on voit que l'énergie  $E_1$  est alimentée en premier par  $E_0$  puis vient  $E_2$ , conformément à ce que l'on est en droit d'attendre du modèle.

L'étude de la propagation de domaines turbulents (bandes, spots...) est un élément important de la compréhension d'une transition sous-critique en milieu étendu [7]. Nous avons commencé récemment quelques expériences de ce type. Sur la figure 4 qui montre l'évolution de l'énergie totale d'une bande turbulente pour  $R = 150$  à trois instants différents  $t_1 < t_2 < t_3$ , on observe que le domaine turbulent gagne sur l'état laminaire de part et d'autre de la bande. Dans les expériences de Prigent *et al* [1], les spots s'organisent pour former des bandes turbulentes obliques. Nous avons donc en projet de pratiquer des simulations à des grandes tailles inaccessibles à la DNS avec  $L_x = 512$  et  $L_z = 256$  et en faisant varier l'angle  $\theta$  dans le modèle à cinq champs.

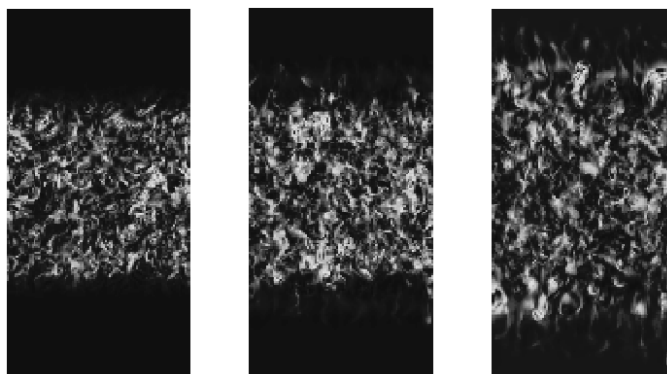


FIG. 4 – Évolution de l'énergie locale contenue dans une bande turbulente à trois instants successifs,  $R = 150$ ,  $\Theta = 0$ ,  $dx = 0.125$  et  $dt = 0.002$ ,  $N_x = 512$ ,  $N_z = 256$ . Axes  $Ox$  ( $Oz$ ) selon la verticale (horizontale).

## 4 Conclusion et Perspectives

Nous avons étudié un système non-linéaire de cinq équations aux dérivées partielles modélisant l'écoulement de Couette plan. Nous avons vérifié que le modèle est linéairement stable pour tout nombre de Reynolds  $R$  et que les termes non-linéaires conservent l'énergie cinétique. La visualisation de la dynamique des cinq champs  $\Psi_{0,1,2}$  et  $\Phi_{1,2}$  et l'enregistrement de l'évolution des énergies correspondantes  $E_{0,1,2}$ , mettent en évidence une dynamique spatio-temporelle très riche: apparition, interaction et disparition de structures cohérentes. Le mode  $(\Psi_2, \Phi_2)$  ajouté au modèle à trois champs rend compte d'un embryon de cascade vers des structures plus fines. Les développements les plus récents ( $dx = dz = 0.25$ ,  $N_x = 2048$ ,  $N_z = 1024$ ) concernent des domaines de taille  $L_x = 512$  et  $L_z = 256$ , comparable à ceux des expériences réalisées à Saclay [1]. Pariant sur la cohérence transverse des perturbations, notre modélisation se focalise sur la dépendance dans le plan de l'écoulement et semble offrir les ingrédients majeurs nécessaires à l'étude de l'intermittence spatio-temporelle dans le contexte de l'écoulement de Couette plan transitionnel dont il respecte l'essentiel de la physique.

**Remerciements.** Nos simulations ont bénéficié d'une allocation de temps de calcul sur l'ordinateur NEC-SX5 de l'IDRIS dans le cadre du projet CP6/1462.

## Références

- [1] A. PRIGENT *et al*, Phys. Rev. Lett. **89** (2002) 014501.
- [2] P. MANNEVILLE & O. DAUCHOT, dans: *Coherent Structures in Complex Systems*, D. Reguera *et al*, (Springer, 2001).
- [3] P. SCHMID, D. HENNINGSON, *Stability and transition in shear flows* (Springer, 2001).
- [4] F. WALEFFE, Phys. Fluids, **7** (1995) 3060 et **15** (2003) 1517.
- [5] J. BAGGETT, L. TREFETHEN, Phys. Fluids, **9** (1997) 1043.
- [6] P. MANNEVILLE ET F. LOCHER, C. R. Acad Sci, Paris **328**, Série IIb (2000) 159.
- [7] P. MANNEVILLE, à paraître: Theoretical and Computational Fluid Dynamics, 10/2003.

## Transition des spirales vers les spirales interpénétrantes dans le système de Couette-Taylor

N. Latrache<sup>1</sup>, A. Ezersky<sup>2</sup> et I. Mutabazi<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *LMPG, UFR-Sciences et Techniques, Université du Havre,  
25 rue Philippe Lebon, B.P. 540 76058 Le Havre Cedex*

<sup>2</sup> *Institut de Physique Appliquée de l'Académie des Sciences de Russie,  
46 rue Uljanov, 603600 Nijni-Novgorod, Russie  
noureddine.latrache@univ-lehavre.fr*

### Résumé

La transition des spirales vers les spirales interpénétrantes a été étudiée expérimentalement dans le système de Couette-Taylor en contra-rotation. Pour de faibles valeurs du paramètre de contrôle  $R_{ic1} = 330 < R_i < R_{ic2} = 343$ , les spirales sont séparées par une source quasi-stationnaire. Au dessus de  $R_{ic2}$ , la source devient instationnaire et le motif bifurque vers le régime de spirales interpénétrantes. Ce régime est caractérisé par deux fréquences discontinues dont la différence est celle des défauts périodiques observés dans le motif.

## 1 Introduction

Le système de Couette-Taylor possède un diagramme riche en régimes d'écoulements issus des brisures successives de symétries, ces écoulements présentent des propriétés spatiotemporelles surprenantes [1,2]. Lorsque les deux cylindres sont contra-rotatifs, l'écoulement de base de Couette circulaire subit une bifurcation de Hopf supercritique vers un écoulement de spirales. Ces spirales sont observables dans une plage des valeurs du nombre de Reynolds ( $-1155 < R_o < -155$  et  $180 < R_i < 500$ ) pour un dispositif de rapport de rayon  $\eta = a/b = 0,883$  et de rapport d'aspect  $\Gamma = L/d = 46,6$ . Les spirales sont des ondes non-linéaires se propageant le long et autour du cylindre intérieur, elles peuvent être séparées par des sources ou des puits. Les motifs d'ondes contra-propagatives séparées par des fronts (source ou puits) ont été observées dans d'autres systèmes physico-chimiques non linéaires tels que le système de Taylor-Dean [3,4] ou le système de l'imprimeur [5], la convection dans les mélanges binaires [6] ou la thermoconvection dans une couche de liquide soumise à un gradient horizontal de température [7]. Ces différents motifs d'ondes contra-propagatives peuvent être décrits par le système des équations complexes de Ginzburg-Landau couplées. Les simulations numériques de ces équations avec une vitesse de groupe linéaire positive ont montré que dans des systèmes étendus [8,9] : (i) pour une faible supercriticalité, les puits sont instables, les sources sont instables, (ii) pour une supercriticalité supérieure à un seuil bien défini, on peut voir des sources et des puits stables, (iii) pour de grandes valeurs de la supercriticalité, les sources et les puits peuvent manifester un mouvement instationnaire. Les études expérimentales sur la stabilité des fronts des ondes hydrothermales [10] sont en bon accord pour les sources et en désaccord pour les puits avec les prédictions théoriques. Des résultats expérimentaux et théoriques sur les spirales générées dans le système de Couette-Taylor en contra-rotation ont montré que pour de faibles valeurs du paramètre de contrôle  $Ri = 341$ , la vitesse de groupe linéaire et la vitesse

de phase sont de signe opposé, les spirales sont des ondes avec une dispersion anormale [11]. Cette dispersion anormale permet d'expliquer, dans le cadre de la théorie de Ginzburg-Landau, l'existence d'une source stable entre deux spirales. Notre travail s'intéresse à la stabilité de la source et à la transition des spirales vers les spirales interpénétrantes pour de grandes valeurs du nombre de Reynolds du cylindre intérieur.

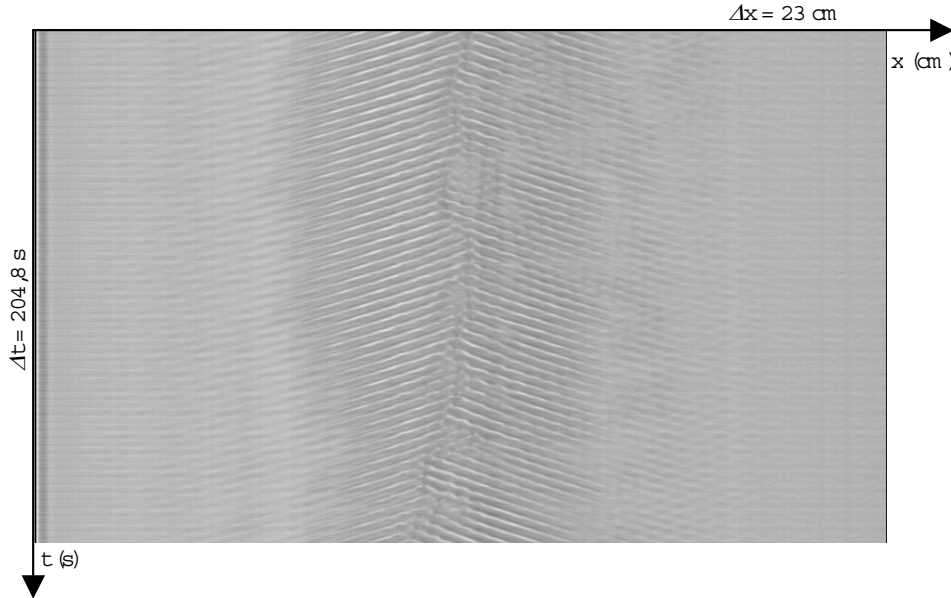


FIG. 1 – *Source instationnaire entre deux spirales contrapropagatives pour un  $R_o = -622$  ;  $R_i = 343$  :  $\epsilon = 0,038$*

## 2 Dispositif expérimental et méthode de visualisation

Le système de Couette-Taylor utilisé dans notre expérience est constitué de deux cylindres de commun axe horizontal. Le cylindre intérieur de rayon  $a = 4,46$  cm est en aluminium anodisé en noir pour un meilleur contraste. Le cylindre extérieur de rayon intérieur  $b = 5,05$  cm est en Plexiglass. L'entrefer de largeur  $d = b - a = 0,591$  cm et de longueur utile  $L = 27,5$  cm est rempli de l'eau déminéralisée dont la viscosité à  $T = 21^{\circ}C$  vaut  $\nu = 10^{-2} \text{ cm}^2/\text{s}$ . Le rapport des rayons  $\eta = a/b = 0,883$  et le rapport d'aspect  $\Gamma = L/d = 46,6$ . Les cylindres sont entraînés par des moteurs électriques asservis. Les paramètres de contrôle sont les nombres de Reynolds  $Ro = \Omega_o b d / \nu$  et  $Ri = \Omega_i a d / \nu$  où  $\Omega_o$  et  $\Omega_i$  sont respectivement les fréquences angulaires du cylindre extérieur et intérieur. Pour visualiser les différents régimes d'écoulements, on ajoute à l'eau déminéralisée 2 % en volume de solution de Kallioroscope AQ1000, dont les fines plaquettes réfléchissantes s'orientent selon la direction de fort cisaillement. Notre système possède les mêmes caractéristiques géométriques ( $\eta, \Gamma$ ) que celles d'Andereck.

La distribution spatiale de l'intensité lumineuse réfléchie indique la présence de structures tourbillonnaires organisées. Une caméra linéaire (CCD d'une ligne de 1024 pixels) placée parallèlement à l'axe des cylindres enregistre à intervalles de temps réguliers l'intensité de la lumière réfléchie par le motif le long d'une ligne horizontale centrée de 23 cm



de longueur, soit une résolution spatiale d'environ 44,5 pixels/cm. La superposition chronologique des distributions d'intensité lumineuse acquises par la caméra, réparties en 256 niveaux de gris, donne un diagramme spatio-temporel  $I(x, t)$  illustré sur la Figure 1. Nous utilisons la démodulation complexe (filtre et transformée de Hilbert du signal réel  $I(x, t)$ ) afin de séparer l'amplitude  $A(x, t)$  et la phase  $\Phi(x, t)$  du motif. La dérivation temporelle et spatiale de la phase donne la fréquence  $\omega = \partial\Phi/\partial t$  et le nombre d'onde  $k = \partial\Phi/\partial x$ .

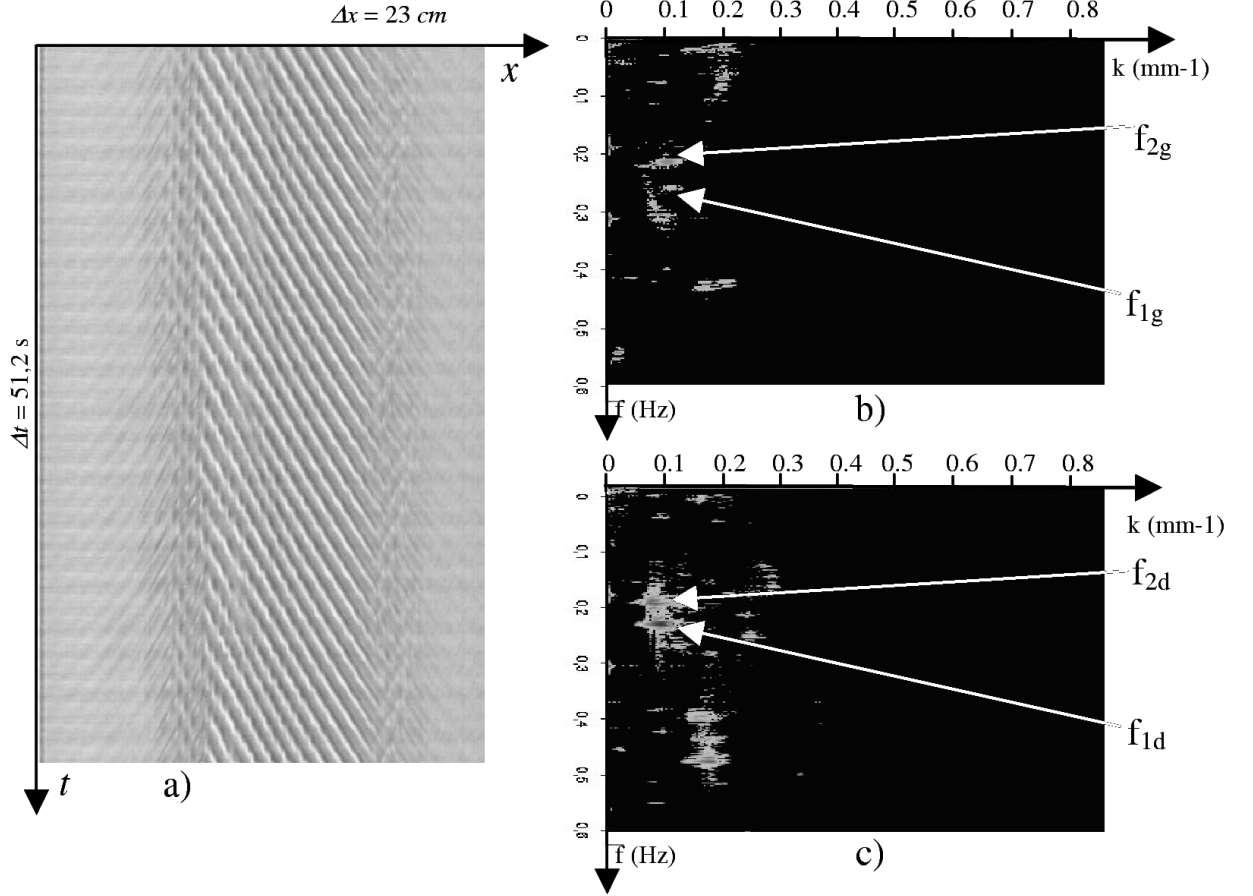


FIG. 2 – Motif de spirales interpénétrantes pour  $R_o = -622$ ;  $R_i = 344$ ;  $\epsilon = 0,040$  : a) diagramme spatiotemporel des spirales ininterpénétrantes pour b) transformée de Fourier 2D de la spirale gauche, c) transformée de Fourier 2D de la spirale droite.

### 3 Résultats

Nous présentons les résultats obtenus pour la valeur fixe  $R_o = -622$  en variant le Reynolds du cylindre intérieur  $R_i$ .

#### 3.1 Spirales séparées par une source instable

La première instabilité est une bifurcation supercritique de Hopf qui apparaît à  $R_{ic1} = 330$  et se manifeste sous forme d'un motif de spirales se propageant à droite ou à gauche.

Juste au dessus du seuil, on observe souvent deux spirales contrapropagatives séparées par une source stable [11]. Ce motif reste observable lorsque l'on augmente la valeur du  $R_i$  jusqu'à  $R_{ic2} = 343$ , valeur à laquelle la source devient instable et décrit un mouvement instationnaire (Fig.1).

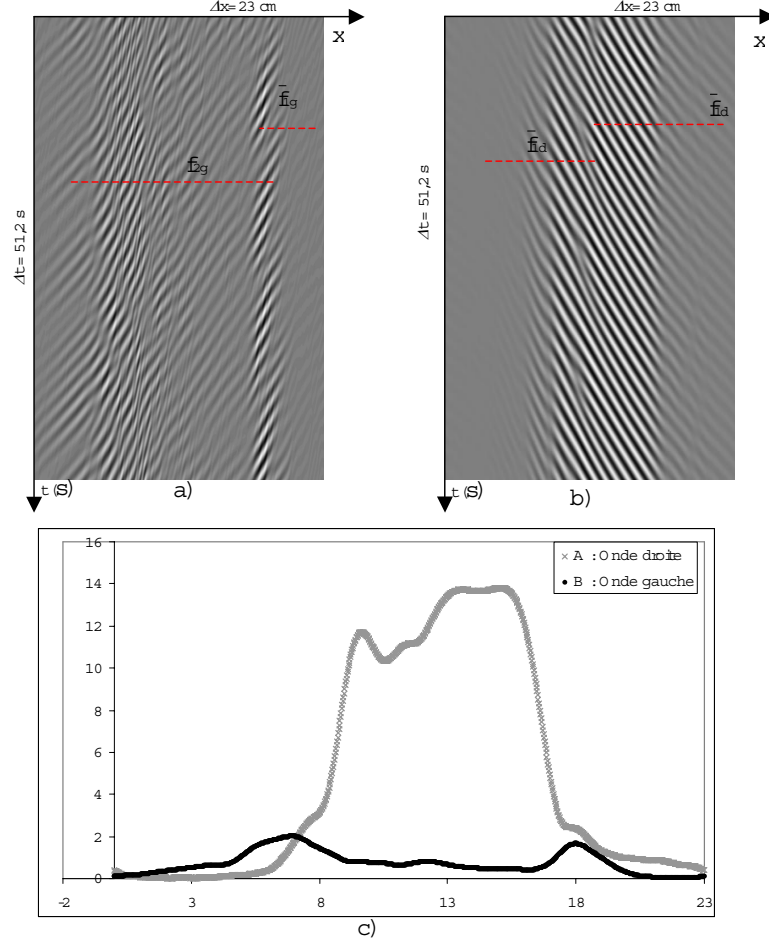


FIG. 3 – Séparation des motifs de la spirale gauche (a) et droite (b) pour  $R_o = -622$  ;  $R_i = 344$ :  $\epsilon = 0,040$ . c) Profil spatial d'amplitude moyennée dans le temps de la spirale gauche et droite.

### 3.2 Spirales interpénétrantes

Pour  $R_{ic2} > 343$ , l'analyse spectrale et la démodulation complexe du motif nous ont permis de mettre en évidence l'apparition d'un deuxième mode d'instabilité dans lequel on observe que l'onde droite a une amplitude supérieure à celle de l'onde gauche. Lorsque l'on continue à augmenter le paramètre de contrôle, les spirales deviennent interpénétrantes (Fig.2). L'analyse spectrale 2D des deux ondes montre l'existence de deux fréquences incommensurables :  $\langle f_{1d} \rangle = 0,249 \text{ Hz}$ ,  $\langle f_{2d} \rangle = 0,210 \text{ Hz}$  pour l'onde droite et  $\langle f_{1g} \rangle = 0,269 \text{ Hz}$ ,  $\langle f_{2g} \rangle = 0,227 \text{ Hz}$  pour l'onde gauche. Ces deux fréquences correspondent à un même nombre d'onde  $k_d = k_g = 0,098 \text{ mm}^{-1}$ . Donc le signal du motif

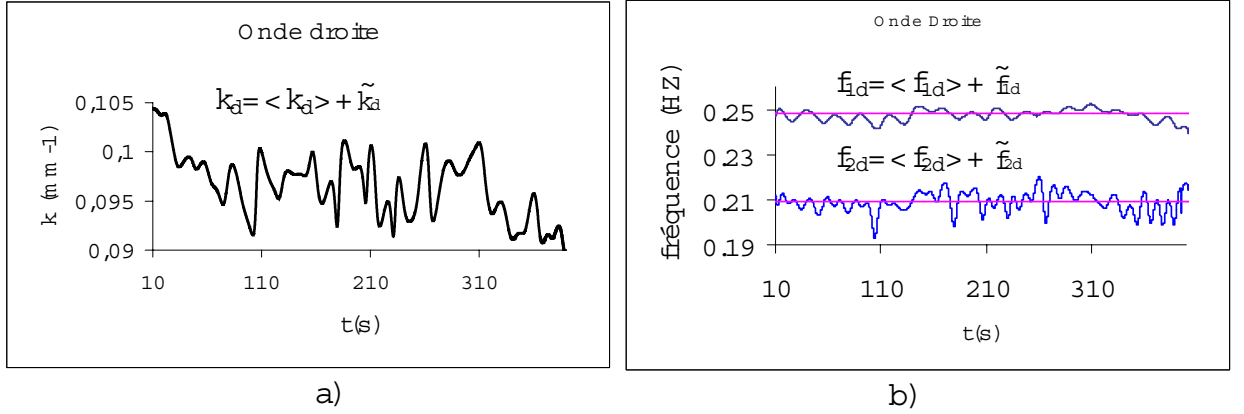


FIG. 4 – Profil temporel : a) du nombre d'onde , b) des fréquences de l'onde droite

(2-a) peut être sous la forme :

$$I(x, t) = A(x, t) \exp[i(k_d x - \omega_d t)] + B(x, t) \exp[i(k_g x + \omega_g t)] + c.c.$$

où  $\omega_d = 2\pi f_d$  et  $\omega_g = 2\pi f_g$ ,  $A(x, t)$  et  $B(x, t)$  sont respectivement les amplitudes des spirales droite et gauche, *c.c.* représente les termes complexes conjugués. Pour étudier la dynamique de ce motif, nous utilisons la démodulation complexe avec un filtrage autour des deux modes fondamentaux  $(k, f_2)$  et  $(k, f_1)$  pour chaque onde. Les parties réelles et les amplitudes de chaque onde sont représentées sur la figure 3.

Le diagramme spatiotemporel de chaque onde possède des modulations de phase qui sont la conséquence des variations spatiotemporelles de la fréquence et du nombre d'onde. Ces modulations se manifestent en particulier par des dislocations spatio-temporelles périodiques portées par la spirale droite (Fig. 3-b). Au cœur de la dislocation, l'amplitude s'annule et la phase subit un saut de  $\pi$ . La fréquence de ces dislocations est égale à la différence de fréquence des spirales gauche et droite  $\Delta f = \langle f_1 \rangle - \langle f_2 \rangle$ .

Le profil temporel du nombre d'onde moyenné dans l'espace présente des fluctuations  $\tilde{k}$  (Fig 4-a). Les profils temporels des deux fréquences moyennées dans l'espace  $f_1$  et  $f_2$  présentent des fluctuations  $(\tilde{f}_1; \tilde{f}_2)$  autour d'une valeur moyenne  $\langle f_1 \rangle$  et  $\langle f_2 \rangle$  pour les deux ondes (Fig 4-b).

Lorsque l'on augmente la valeur du paramètre de contrôle, l'interpénétration des spirales gauche et droite devient nette (Fig. 5-a) : le motif présente des zones de coexistence de spirales gauche et droite séparées par des sources et des puits, les amplitudes des deux ondes deviennent comparables (Fig.5-b).

## 4 Conclusion

Nous avons étudié la transition des spirales vers les spirales interpénétrantes dans le système de Couette-Taylor en augmentant la vitesse de rotation du cylindre intérieur. Les caractéristiques spatio-temporelles ont été obtenues à l'aide de la démodulation complexe des diagrammes spatio-temporels. La transition se manifeste par l'apparition de deux fréquences incommensurables. Pour de grandes valeurs du paramètre de contrôle, l'écoulement devient chaotique à cause des modulations et de multiples défauts dans le motif.

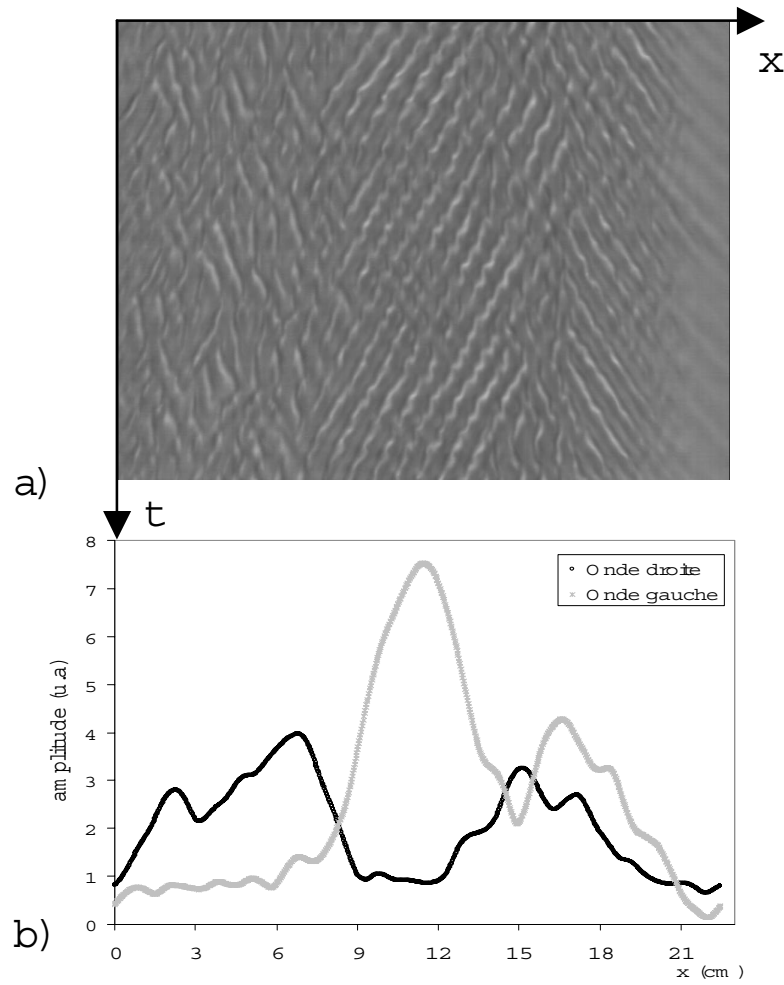


FIG. 5 – Motif de spirales interpénétrantes pour  $R_o = -622$  ;  $R_i = 369$ ,  $\epsilon = 0,066$ , a) Diagramme spatiotemporel, b) profil spatial d'amplitude moyenné dans le temps du motif

## Références

- [1] C.D. Andereck, S.S. Liu and H.L. Swinney, *J. Fluid Mech.* **164**, 155 (1986).
- [2] P. Chossat and G Iooss, *The Couette-Taylor problem*, Springer-Verlag, New York (1994)
- [3] I. Mutabazi, J.J. Hegseth, C.D. Andereck and J.E. Wesfreid, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 1729 (1990).
- [4] P. Bot and I. Mutabazi, *Eur. Phys. J. B* **13**, 141 (2000).
- [5] M. Rabaud, S. Michalland and Y. Couder, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 184 (1990).
- [6] P. Kolodner, *Phys. Rev. A* **46**, 6452 (1992).
- [7] N. Garnier, A. Chiffaudel, *Phys.Rev.Lett.*, **86**, 75 (2001).
- [8] P. Couillet, T. Frish, F. Plaza, *Physica D* **62**,75 (1993).
- [9] M. van Hecke, C. Storn and W, van Sarloos, *Physica D* **134**, 1(1999).
- [10] L. Pastur, M.T. Westra and W. van de Water *Physica D* **174**, 75(2003).
- [11] A. Ezersky, N. Latrache, O. Crumeyrolle and I. Mutabazi, *Theor. Comput. Fluid Dynamics* (2004).

## Spirales, chaos de spirales et spirales dentelées en optique

M. Le Berre, E. Ressayre, A. Tallet et M. Tlidi\*

*Laboratoire de Photophysique du CNRS, Bat. 210, Université de Paris-Sud,  
91405-Orsay, Cedex, France*

*Optique Nonlinéaire Théorique, Université Libre de Bruxelles, Campus de la  
Plaine, C.P. 231, 1050 Bruxelles, Belgique\**

`Martine.Le-Berre@ppm.u-psud.fr`

### Résumé

Des spirales sont observées numériquement sur les profils d'intensité des deux champs qui se propagent dans un oscillateur optique dégénéré contenant un absorbant saturable. Elles se forment au seuil d'instabilité de Hopf de la solution laser. La forme normale est une équation de type Ginzburg-Landau complexe, dont l'opérateur différentiel est un bi-Laplacien. Au-delà du seuil de Hopf, les spirales se cassent en morceaux animés d'une dynamique collisionnelle. Lorsqu'on augmente le paramètre de contrôle, une autre instabilité avec de nouveaux modes actifs, de type Turing, créent des spirales dentelées.

## 1 Introduction

Des spirales sont observées dans les simulations numériques d'un oscillateur paramétrique optique dégénéré contenant un absorbant saturable (DOPOSA), modélisé par l'ensemble des 2 équations couplées décrivant l'évolution des amplitudes complexes des champs pompe et signal, de fréquence  $\omega_0$  et  $\omega_0/2$  respectivement, en résonance avec la cavité,

$$\partial_t A_0 = E - A_0 - A_1^2 + \frac{i}{2} \Delta_T A_0, \quad (1)$$

$$\partial_t A_1 = -A_1 + A_1^* A_0 - \frac{R A_1}{1 + S |A_1|^2} + i \Delta_T A_1 \quad (2)$$

où  $E$  est l'amplitude du champ pompe incident, et  $R, S$  caractérisent l'absorbant saturable. Dans ce résonateur, la solution homogène subit deux bifurcations, de type Hopf, et de type Turing [1]. Nous considérons des situations favorables à l'apparition de spirales, où l'instabilité de Hopf arrive avant celle de Turing lorsqu'on augmente le paramètre de contrôle  $E$ . Suivant les valeurs des paramètres de l'absorbant, on observe numériquement diverses structures composées de spirales ou de défauts (sans spirales). L'équation aux amplitudes qui modélise les Eqs. (1-2) au voisinage du seuil de Hopf, est différente de l'équation générique de Ginzburg-Landau complexe (CGL) [2], car elle ne contient pas de Laplacien, mais un bi-Laplacien. Nous dérivons les conditions de stabilité des ondes, et nous comparons les prédictions de l'analyse non linéaire aux résultats numériques des équations du DOPOSA près du seuil.

## 2 Résultats numériques

Deux solutions stationnaires homogènes (SSH) équivalentes existent,  $(\overline{A}_0, \pm \overline{A}_1)$  pour  $E$  supérieur au seuil laser  $E_{th} = 1 + R$ , qui obéissent aux relations  $\overline{A}_0 = E - \overline{I}_1$ ,  $E = 1 + \overline{I}_1 + R/(1 + S\overline{I}_1)$ , avec  $I_1 = |\overline{A}_1|^2$ . Le but de notre étude étant d'étudier les structures formées au delà du seuil de Hopf sur une seule des deux solutions, nous partons d'une condition initiale centrée sur l'une des deux SSH avec un bruit additif et modéré (un faible bruit conduit à des solutions homogènes oscillantes, un très fort bruit conduit à des solutions localisées ou périodiques qui connectent les deux branches positives et négatives). Nous avons fixé deux valeurs de  $R$ , associées à plusieurs valeurs de  $S$ . Par exemple, dans le cas  $R = 4.5$ ,  $S = 0.1$ , on observe la séquence suivante en augmentant le paramètre de contrôle  $E$  au-delà du seuil de Hopf  $E_H = 6.4$ :

- Près du seuil des états liés de spirales se forment, montrés dans la figure 1: Les



FIG. 1 – *Spirales tournantes au seuil pour  $R = 4.5$ ,  $S = 0.1$ ,  $E = 6.4$ . Graphe de l'intensité du signal,  $dx = 0.78$ ,  $128 \times 128$  points.*

traces temporelles sont quasi-sinusoidales, deux points situés au maximum et minimum d'intensité étant en opposition de phase. Les spirales tournent au cours d'une période, mais évoluent très lentement d'une période à l'autre. Lorsqu'on s'écarte du seuil, des bouffées de turbulence apparaissent sur la trace temporelle, indiquant une réorganisation des structures.

- Pour  $E \sim 7 \sim E_T$  un régime de spirales chaotiques est observé:



FIG. 2 – *Chaos de spirales.  $R = 4.5$ ,  $S = 0.1$ ,  $E = 7.1$ , intensité du signal au temps  $t$*

Les spirales sont cassées en petites portions avec des bras plus fins, la trace temporelle de l'intensité locale devient de plus en plus anharmonique, et l'aspect global change lentement d'une période à l'autre. Au cours d'une période la dynamique est montré dans les Figs. 2 et Fig. 3a-d aux temps successifs  $t + nT/5$ ,  $n = 0, 1, 2, 3, 4$ : les portions de

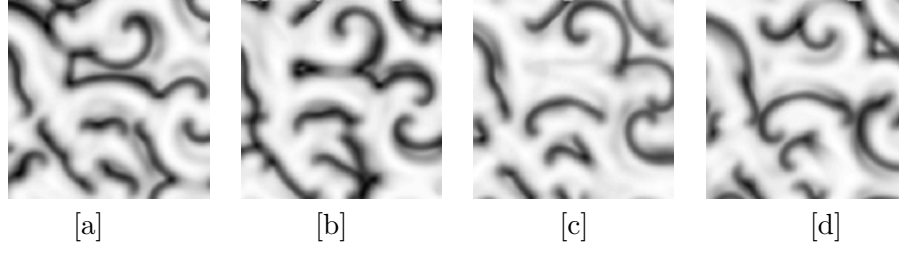


FIG. 3 – Evolution d'un quart de la figure 2 (partie supérieure, au milieu) aux temps  $t + nT/5$ ,  $n$  de 1 à 4.

spirales tournent, entrent en collision et fusionnent avec leurs voisines ( Figs. 2 et 3a), se séparent au point de contact (Fig. 3b), puis de nouvelles portions émergent et se mettent à tourner (Fig. 3b-d) pour retrouver approximativement leurs positions au temps  $t$ .

Le spectre de Fourier spatial contient l'ensemble des modes instables de l'instabilité de Hopf.

-Pour  $E \sim 8$  les spirales présentent de longs bras dentelés, sur lesquels se forment des modulations transverses et longitudinales, Figs. 4.

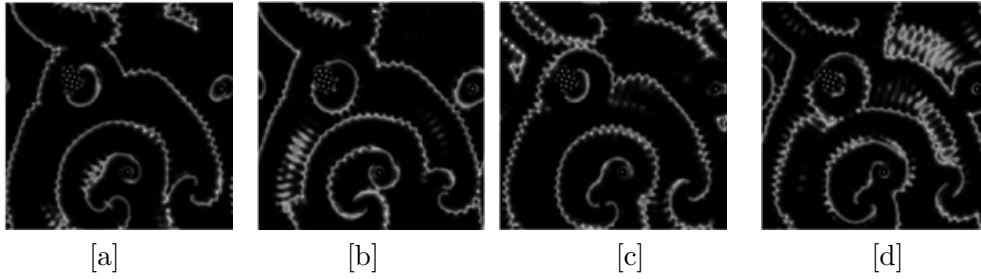


FIG. 4 – Spirales dentelées.  $R = 4.5$ ,  $S = 0.1$ ,  $E = 8.8$ . Evolution de l'intensité du signal sur une période (a)  $t$ , (b)  $t + T/4$ , (c)  $t + 2T/4$ , (d)  $t + 3T/4$ .  $dx = 0.234$ ,  $512 \times 512$  points

Le spectre de Fourier est composé d'une tache centrale (modes de Hopf) et d'un anneau (modes de Turing) qui est responsable de la dentelure observée sur les spirales.

La séquence décrite ci-dessus peut être modifiée si l'on change les paramètres  $R$ ,  $S$  de l'absorbant. Par exemple, gardant  $R = 4.5$  avec  $S = 0.05$ , on n'observe pas des spirales au seuil, mais des filaments tordus, puis le régime de spirales chaotiques, et celui de spirales dentelées. Les modifications sont plus fortes si l'on diminue  $R$ . Par exemple pour  $R = 2.3$ , et variant  $S$  de 0.1 à 0.4, on a des spirales au seuil, puis une structure chaotique contenant de nombreux défauts mais très peu de portions de spirales, comme dans le régime de turbulence de défauts de l'Eq. CGL [3], et pas de spirales dentelées.

Les structures décrites ci-dessus ont été obtenues avec des conditions aux limites périodiques, et un faisceau incident spatialement homogène. Mais elles sont très robustes, et persistent dans le cas d'un faisceau pompe borné, de profil gaussien ou hypergaussien.

Les simulations numériques ont été effectuées, non seulement à partir des Eqs. (2-3), mais aussi à partir du modèle dit "de propagation" qui décrit correctement la propagation

des champs à travers les deux milieux non linéaires, et dont le modèle (Eqs. (2-3)) est une approximation [4]. Nous avons trouvé que les deux modèles sont en accord qualitatif. Pour une valeur donnée des paramètres  $R, S$ , les séquences sont identiques avec les deux modèles, bien que leur domaine d'existence diffère parfois notablement, spécialement au-delà du seuil.

### 3 Analyse non linéaire

Au voisinage du seuil de bifurcation de Hopf  $E_H$  où la solution homogène  $\overline{A_0}, \overline{A_1}$  devient instable, l'équation aux amplitudes est de la forme  $\partial_t A = \epsilon^2 \mu A - c_3 |A|^2 A - c_1 \Delta_T^2 A$ , où  $\epsilon^2 = E - E_H$  et les coefficients complexes  $\mu = \mu_r + i\mu_i$ ,  $c_1 = c_{1r} + ic_{1i}$ ,  $c_3 = c_{3r} + ic_{3i}$  s'expriment en fonction des paramètres  $R, S$  [5]. Après renormalisation des amplitudes, du temps, et des variables d'espace on obtient l'équation

$$\partial_t A = A - (1 + ib)\Delta_T^2 A - (1 + ic)|A|^2 A \quad (3)$$

qui peut être vue comme une équation de type CGL avec un bi-Laplacien, ou comme une équation de type Swift-Hohenberg complexe (CSH) avec un nombre d'onde critique nul, et sans Laplacien. L'absence de Laplacien dans l'Eq. (3) est due au fait que les Eqs. (1-2) sont invariantes par la transformation  $x \rightarrow ix$ ,  $A_0 \rightarrow A_0^*$ ,  $A_1 \rightarrow A_1^*$  dans le cas résonant traité ci-dessus. Dans le cas de petits désaccords en fréquence on montre que l'équation aux amplitudes acquiert un terme supplémentaire  $d\Delta_T A$  où le coefficient complexe  $d$  est une combinaison linéaire des désaccords. La forme normale est alors analogue à celles dérivées pour le laser, les milieux photoréfractifs, et pour l'oscillateur paramétrique à 3 champs sans absorbant saturable (OPO), qui ont  $d$  imaginaire, et  $b = c = 0$  [6].

L'Eq. (3) admet une famille d'ondes planes de la forme  $A = F e^{i(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \phi)}$  de nombre d'onde  $Q = |\mathbf{Q}|$ , avec  $F^2 = 1 - Q^4$ ,  $\omega = c + (b - c)Q^4$ . L'analyse linéaire de stabilité des ondes [5] montre que le taux de croissance d'une perturbation de petit nombre d'onde  $k$ , de la forme  $\lambda = -iV_g k - D_2 k^2 - i\Omega_g k^3 - D_4 k^4 + O(k^5)$ , est négatif pour l'état homogène  $Q = 0$  si  $1 + bc > 0$  et que les perturbations les plus dangereuses sont dues aux perturbations longitudinales, comme dans le cas de l'équation CGL.

#### 3.1 Comparaison avec les résultats numériques

L'étude numérique des Eqs. (1-2) est comparée aux prédictions de l'Eq.(3) dans les 3 cas suivants: (i)  $R = 4.5$ ,  $S = 0.1$ ,  $b = -0.09$ ,  $c = 0.35$ ; (ii)  $R = 4.5$ ,  $S = 0.05$ ,  $b = -0.18$ ,  $c = 0.85$ ; (iii)  $R = 2.3$ ,  $S = 0.4$ ,  $b = 0.027$ ,  $c = 10.7$  où  $b, c$  sont déduits de l'analyse nonlinéaire.

Dans les trois cas notre analyse prédit que *les solutions homogènes oscillantes sont stables*, en accord avec nos simulations: un faible bruit additif sur une SSH décroît avec le temps.

Si on compare l'amplitude du cycle limite des équations (1-2) (et du modèle de propagation) aux prédictions de l'équation aux amplitudes,  $|A(E)| = \sqrt{(E - E_H)\mu_r/c_{3r}}$ , les résultats sont assez décevants: Pour une distance au seuil d'à peine 10%, l'amplitude numérique est 2 fois supérieure aux prédictions pour le cas (i) et 2 fois inférieure pour le cas (ii), Fig. (5). En revanche la valeur numérique de la fréquence suit correctement la relation  $\omega(E) = \omega_H + \mu_i(E - E_H)$  prédite par l'équation aux amplitudes, l'écart n'étant que de 10% pour une distance au seuil de 10%.



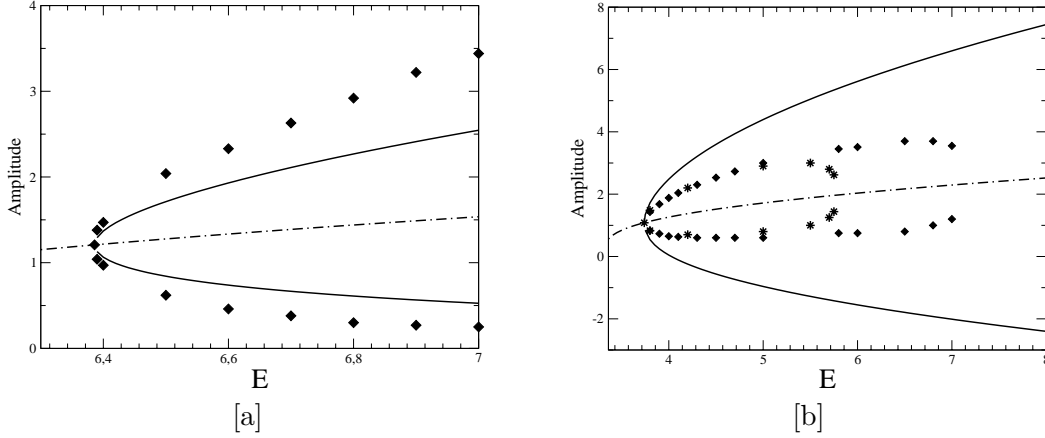


FIG. 5 – Diagramme d'amplitude du cycle limite. Comparaison entre les équations du DOPOSA et la prédiction de l'analyse non linéaire (trait plein).  $R = 4.5$ ,  $S = 0.1$  pour a),  $R = 2.3$ ,  $S = 0.4$  pour b). Les losanges correspondent aux Eqs. (2-3), les étoiles pour le modèle de propagation. La courbe du milieu est la solution homogène.

## 4 Conclusion

La plupart des spirales reportées numériquement ou expérimentalement dans des résonateurs optiques sont passives [7], telles que celles formées dans le cas de structures périodiques présentant des défauts [8]- [9], ou celles formées à partir de défauts d'un mur de Bloch dans des systèmes réductibles à une Eq. CGL avec forcing [10], enfin celles qui se forment en régime de bistabilité dynamique [11]. Les spirales observées dans le DOPOSA sont des spirales actives, i.e. résultant d'une dynamique ponctuelle oscillante, comme celles de l'éq. CGL décrivant le laser et l'oscillateur paramétrique nondégénéré au voisinage de la première bifurcation, [12]- [13]. Ici l'instabilité de Hopf est une instabilité secondaire, qui apparaît sur la solution homogène dite 'solution laser'. Il en résulte que les spirales sont visibles aussi bien sur l'intensité que sur la partie réelle du champ.

Nous avons montré que la forme normale des Eqs. (1-2), au voisinage du seuil de Hopf, est l'Eq. (3) de type CGL avec un bi-Laplacien. La présence ou l'absence de spirales au seuil dépend des paramètres  $R$ ,  $S$  de l'absorbant, ou encore des paramètres  $b$ ,  $c$  de l'Eq. (3), qui en sont déduits.

Lorsqu'on s'éloigne du seuil de Hopf, l'Eq. (3) n'est plus valable, les simulations des Eqs. (1-2) montrent que les belles spirales tournantes au seuil se déstabilisent en un régime de chaos de spirales, avec des portions de spirales animées d'une dynamique de collision, fusion et recombinaison. D'une période à l'autre la structure globale change peu, ce qui différencie ce chaos de spirales de celui de turbulence de défauts de l'Eq. CGL. Le processus de déstabilisation des spirales, qui a été très étudié pour les modèles de fibrillation, n'est pas élucidé ici.

Lorsqu'on dépasse le troisième seuil de bifurcation, de type Turing, on peut observer de très belles structures formées de grands bras de spirales dentelées, qui tournent avec une période presque constante, et dont les dentelles ont la longueur d'onde des modes actifs de Turing. C'est donc une structure mixte, de Hopf et de Turing, dont les dentelures ne peuvent pas s'expliquer à partir de l'analyse de stabilité des ondes de l'Eq. (3).

## 5 Remerciements

Nous remercions L. Gil pour des discussions stimulantes et fructueuses. Nous remercions l'IDRIS (Institut de Développement et des Ressources en Informatiques du Centre National de la Recherche Scientifique) et le CRI (Centre de Ressources en Informatiques de l'Université de Paris-Sud) pour leurs services.

## Références

- [1] M. Tlidi, P. Mandel, and M. Haelterman, *Spatiotemporal patterns and localized structures in nonlinear optics*, Phys. Rev E **56**, 6524 (1997); M. Tlidi and P. Mandel, *Space-time localized structures in the degenerate optical parametric oscillator*, Phys. Rev A **59**, 2575 (1999).
- [2] C. Elphick, E. Tirapegui, M. E. Brachet, P. Coulet, G. Ioss, *A simple global characterisation for normal forms of singular vector field*, Physica 29 D, 95 (1987).
- [3] H. Chaté, P. Manneville, *Phase diagram of the two-dimensional complex Ginzburg-Landau equation*, Physica A **224**, 348 (1996); I.S. Aranson, L. Kramer, *The world of the complex Ginzburg-Landau equation*, Reviews of Modern Physics **74**, 99 (2002).
- [4] M. Tlidi, M. Le Berre, E. Ressayre, A. Tallet, and L. Di Menza, Phys. Rev. A **61**, 043806 (2000); M. Tlidi, A. Taki, M. Le Berre, E. Ressayre, A. Tallet, L. Di Menza, *Moving localized structures and spatial patterns in quadratic media with a saturable absorber*, J. Opt. B, sous presse.
- [5] M. Le Berre, E. Ressayre, A. Tallet, M. Tlidi, *Spiral patterns, spiral break up and zig-zag spirals in quadratic media with saturable absorber*, soumis
- [6] a) J. Lega, J.V. Moloney, A.C. Newell, *Universal description of laser dynamics near threshold*, Physica D **83**, 478 (1995); b) C. O. Weiss, M. Vaupel, K. Staliunas, G. Sleky, V. B. Taranenko, *Solitons and vortices in lasers*, Appl. Phys. B **151**, (1999); c) S. Longhi, Phys. Rev. A **53**, 4488 (1996).
- [7] M.I. rabinovitch, A.B. Ezersky, P.D. Weidman, *The dynamics of patterns*, World Scientific, Londres (2000).
- [8] F. Huneus, B. Schapers, T. Ackemann, W. Lange, *Optical target and spiral patterns in a single-mirror feedback scheme*, Appl. Phys. B **76**, 191 (2003);
- [9] F.T. Arecchi, G. Giacomelli, P.L. Ramazza, S. Residori, *Vortices and defect statistics in two-dimensional optical chaos*, Phys. Rev. Lett. **67**, 3749 (1991); see also Ref. ( b); P. Lodahl, M. Bache, M. Saffman, *Spiral intensity patterns in an internally pumped optical parametric oscillator*, Phys. Rev. Lett. **85**, 4506 (2000).
- [10] S. Longhi, *Spiral waves in a class of optical parametric oscillators*, Phys. Rev. E **63**, 055202 (2001).
- [11] D. Yu, W. Lu, R. G. Harrison, *Dynamic bistability and spiral waves in a laser*, J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt. **1** 25 (1999)
- [12] P. Coulet, L. Gil and F. Rocca, Opt. Comm. **73**, 403 (1989).
- [13] Z.H. Musslimani, *Long wave instability in optical parametric oscillator*, Physica A **249**, 141 (1998).

## Instabilité d'un rideau liquide

L. Lebon, J.S. Roche, P. Brunet, N. Le Grand et L. Limat

*Physique et Mécanique des milieux Hétérogènes — UMR 7636 CNRS - ESPCI*  
 10 rue Vauquelin, 75005 PARIS  
 lebon@pmmh.espci.fr

### Résumé

La stabilité d'un rideau liquide en chute libre reste toujours une question mal comprise. Nous explorons quelques processus d'instabilités et de rupture de rideau d'huiles silicones : propagation d'un trou dans un rideau mince, oscillation d'un trou, régime d'ondes propagatives original sur la nappe.

Un régime original d'instabilité du rideau a été mis en évidence lorsque celui-ci est suspendu sous un surplomb arrondi permettant des oscillations pendulaires : on observe alors deux jeux d'ondes propagatives inclinées qui se déplacent horizontalement dans des directions opposées dont la superposition forme un motif spectaculaire en damier. L'analyse dimensionnelle a permis de prévoir certaines propriétés, notamment la vitesse des ondes ; de plus nous avons trouvé des lois d'échelles pour la fréquence de ces ondes. Nous observons la présence d'un mode fondamental ou de ses harmoniques (avec une éventuelle coexistence des modes) sans que le mécanisme de sélection de la fréquence ne soit encore élucidé. Nous étudions également le comportement d'un trou dans un rideau mince. Nous observons alors un démouillage purement inertiel du liquide avec une dynamique à la Culik[4].

## 1 Introduction

La stabilité des rideaux liquides verticaux n'est toujours pas une problématique résolue. D'un point de vue historique, on a introduit un simple critère fondé sur le nombre de Weber  $We = \rho h u^2 / 2\gamma$  ( $\rho$  est la densité,  $h$  l'épaisseur du rideau,  $u$  la vitesse du fluide et  $\gamma$  la tension superficielle). Le rideau est supposé stable lorsque  $We > 1$  et instable lorsque  $We < 1$ . Ce critère est local puisque l'épaisseur du rideau et la vitesse du fluide varient le long de la nappe de telle sorte que le nombre de Weber augmente lorsque le liquide descend. Cette condition a été établie à partir de deux points de vue :

- Le premier est d'origine mécanique : la tension superficielle ( $2\gamma$ ) tend à ouvrir un trou dans le rideau alors que le flux de quantité de mouvement ( $\rho h u^2$ ) tend à emporter en aval tout les défauts qui peuvent apparaître au sein du rideau [1].
- Dans le second point de vue, les ondes sinusoïdales qui se propagent à la vitesse  $c$  ( $c^2 = 2\gamma/\rho h$ ) peuvent rompre le rideau si la vitesse du fluide  $u < c$  [2].

Il est maintenant bien connu que cette description élémentaire échoue à prédire le comportement pratique des rideaux liquides. Ce critère local ne fournit pas une condition globale de stabilité pour la nappe alors que l'on observe des rideaux très stables pour lesquels le nombre de Weber est partout inférieur à l'unité. De plus, les brevets et les expériences montrent que la viscosité du fluide joue un rôle important dans la stabilité du rideau (ainsi, un maximum de stabilité semble être observé pour des viscosités de l'ordre de 30 cP) alors le modèle précédent ne prend pas en compte les effets visqueux.

## 2 Description de l'expérience

### 2.1 Dispositif expérimental

Le système de déversement du fluide mis en œuvre ici est conçu de sorte à permettre les mouvements pendulaires du rideau. Un cylindre creux avec une fente d'épaisseur 2 mm percée le long d'une génératrice est alimenté par ses deux cotés en huile silicone à débit  $Q$  constant ; l'huile s'écoule à partir de la fente et ruisselle le long du cylindre pour former le rideau de largeur  $L = 25,5$  cm et de hauteur  $H = 25$  cm (cf figure 1). Le

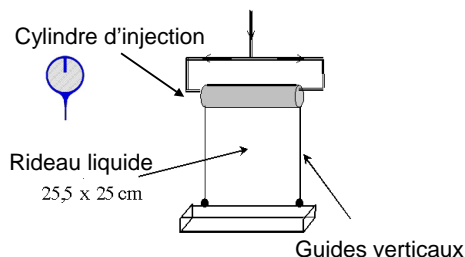


FIG. 1 – L'expérience : le rideau s'écoule à partir d'un tube horizontal fendu et il est guidé entre deux fils verticaux. La fente du cylindre est orientée vers le haut de sorte que le liquide ruisselle le long du cylindre avant la chute libre (cf coupe du cylindre).

rétrécissement de la nappe est empêché par les deux guides accrochant les bords latéraux du rideau ; ce sont ici deux fils minces tendus par des poids. Nous avons utilisé la famille d'huiles silicones Rhodorsil de Rhône-Poulenc ; la plage de viscosité  $\eta$  va de 10 cP à 50 cP, la tension superficielle  $\gamma$  est de l'ordre de 20 mN/m et la densité  $\rho$  est 0,95 g/cm<sup>3</sup>.

### 2.2 Caractéristiques de l'écoulement

Nous travaillons en général à des débits linéiques faibles  $\Gamma = Q/L$ , typiquement de 0 à 2 cm<sup>2</sup>/s, près du seuil de rupture du rideau. L'écoulement au sein du rideau est un écoulement à surface libre induit par la gravité. La vitesse locale dans le rideau  $u$  est bien estimée par  $u^2 = 2gz$  dès que  $z$  devient supérieur à environ 1 cm ( $z = 0$  correspond à l'origine du rideau, juste au dessous du cylindre d'injection). Comme l'écoulement s'accélère sous l'effet de la gravité, l'épaisseur locale  $h$  du rideau diminue ; la conservation de la masse impose que  $\Gamma = hu$  reste constant le long de  $z$  si bien que :

$$h = \frac{\Gamma}{(2gz)^{1/2}} \quad (1)$$

## 3 Le motif en damier

Nous avons déjà décrit[3] un motif remarquable qui apparaît spontanément sur le rideau lorsque l'on réduit le débit ; des ondulations sinueuses s'amplifient et conduisent à un motif en damier dû à la superposition de deux jeux d'ondes inclinées se propageant horizontalement dans des directions opposées. Deux vues de ce motif sont présentées sur la figure 2 ; la fréquence typique de ces ondes est de l'ordre de 10 Hz. Ces ondes apparaissent comme une instabilité qui peut entraîner la rupture du rideau. Une étude quantitative de ces ondes propagatives a été effectuée.

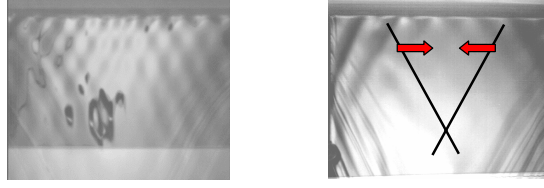


FIG. 2 – *Instabilité en damier du rideau liquide observée pour une viscosité de 10 cP (à gauche et 30 cP (à droite).*

### 3.1 Vitesse des ondes

Les mesures expérimentales de la vitesse horizontale des ondes qui constituent le motif en damier  $V_H$  nous montre que celle-ci est uniforme partout sur le rideau. Ce résultat n'est vraiment pas trivial car les vitesses caractéristiques dans le rideau sont locales et dépendent de la position  $z$ , qu'il s'agisse de celle du fluide  $u$  ou celle des ondes sinueuses  $c$ .

D'un point de vue dimensionnelle, on peut construire une vitesse indépendante de la position  $z$ , à partir des deux vitesses naturelles du système : celle du fluide  $u(z) = \sqrt{2gz}$  et celle des ondes sinueuses  $c(z) = \sqrt{2\gamma/\rho h} \sim z^{1/4}$  :

$$V_H = \frac{c^2}{u} = \frac{\gamma}{\rho \Gamma} \quad (2)$$

Les mesures expérimentales montrent que cette analyse dimensionnelle permet de prédire très correctement la vitesse des ondes  $V_H$  sur une large plage de débit  $\Gamma$ , comme le montre la figure 3.

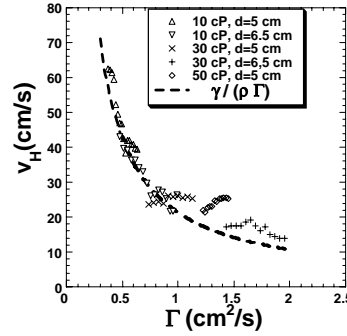


FIG. 3 – *Vitesse mesurée des ondes propagatives  $V_H$  en fonction du débit linéique pour différentes viscosités  $\eta$  et diamètres du cylindre d'injection  $d$ . Comparaison avec le résultat issu de l'analyse dimensionnelle.*

### 3.2 Fréquence des ondes

Nous avons également mesuré la fréquence  $f$  des ondes constituant le damier pour différentes viscosités (10, 30 et 50 cP) et différentes valeurs du diamètre du tube d'injection  $d$ . Ce dernier paramètre semble en effet jouer un rôle important dans la détermination de la fréquence ; en effet si l'on trace le produit  $fd$ , fréquence fois diamètre, en fonction du

débit linéique (cf. figure 4), les données expérimentales se répartissent très bien suivant trois droites dont les pentes sont en rapport 1,2 et 3.

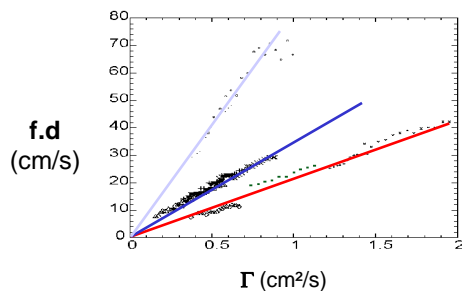


FIG. 4 – *Produit  $f.d$  fréquence des ondes fois diamètre du cylindre d'injection en fonction du débit linéique pour différentes viscosités et diamètres de cylindre.*

Il apparaît ainsi au sein du rideau un mode fondamental de cette instabilité ou un de ses harmoniques d'ordre 2 ou 3. Signalons que l'on a pu, dans quelques cas, observer la présence simultanée du fondamental avec un de ses harmoniques. Si l'origine physique de cette instabilité est toujours à déterminer, la viscosité, ainsi que la géométrie de l'injection, jouent un rôle dans la sélection du mode.

## 4 Rupture de rideau mince

A partir de l'observation détaillée, à l'aide d'une caméra rapide (fréquence d'acquisition de l'ordre de 100 Hz), de mécanismes de destruction du rideau, on a remarqué que la rupture était induite par une perturbation apparue sur la surface inférieure libre du rideau. Dans certains cas, une telle perturbation va s'amplifier, remonter le rideau et finalement conduire à sa destruction complète.

### 4.1 Les rideaux minces

Fort de cette constatation, nous avons cherché à modifier les conditions limites sur la partie inférieure du rideau puisque de là provenaient les perturbations qui emportaient *in fine* le rideau. Nous avons "accroché" le bas du rideau de sorte à supprimer le bord libre à l'aide d'un cylindre rigide en métal ; nous avons constaté une stabilité exceptionnelle du rideau. Il restait stable jusqu'à des débits très faibles, au moins un ordre de grandeur inférieur aux débits de rupture avec bord inférieur libre. Dans le cas présenté sur la figure 5, le rideau reste stable pour un débit linéique  $\Gamma = 0,01 \text{ cm}^2/\text{s}$  ; avec un bord inférieur libre, la rupture se produit pour un débit  $\Gamma = 0,35 \text{ cm}^2/\text{s}$ . Ces rideaux apparaissent spectaculaires car ils présentent des franges d'irisation telles que celles que l'on observe sur la figure 5. Un calcul d'ordre de grandeur montre en effet que l'épaisseur du rideau peut devenir submicronique (de l'ordre de  $0,7 \text{ } \mu\text{m}$  ici). Signalons qu'alors le nombre de Weber défini dans l'introduction reste partout inférieur à l'unité (de 0 en haut du rideau à 0,6 en bas). Il est en effet d'une étonnante stabilité et ne se détruit pas lorsqu'il est soumis à des perturbations simples comme le percement par une petite aiguille, alors qu'une application du critère de Weber prévoit que le rideau doit être partout instable. Il est clair maintenant que la condition de stabilité d'une nappe reste encore à écrire et qu'il s'agit d'un problème devant être traité globalement au niveau du rideau.

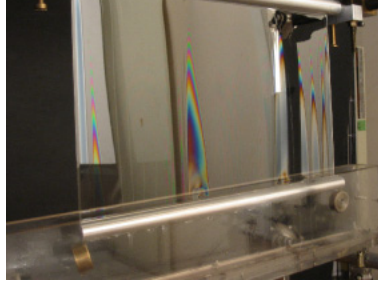


FIG. 5 – *Le rideau fin : observation des irisations pour des épaisseurs submicroniques.*

#### 4.2 Dynamique de rupture du rideau fin – Vitesse de démouillage

Pour des débits très faibles (typiquement de l'ordre de  $0,01 \text{ cm}^2/\text{s}$ , ce qui correspond à un régime de goutte à goutte!), le rideau fin finit par se détruire spontanément. Nous avons mené une étude quantitative de ce mode de destruction. L'observation montre qu'un trou est nucléé spontanément sur le rideau, le point de nucléation, déterminé par des fluctuations locales de l'épaisseur du rideau, variant d'une mesure à l'autre. A partir de cette origine, on observe une croissance du trou qui finit par emporter tout le rideau comme le montre la figure 6 illustrant un scénario de destruction du rideau, l'ensemble du processus se déroulant en moins de 100 ms. Nous avons mesuré la vitesse de croissance du

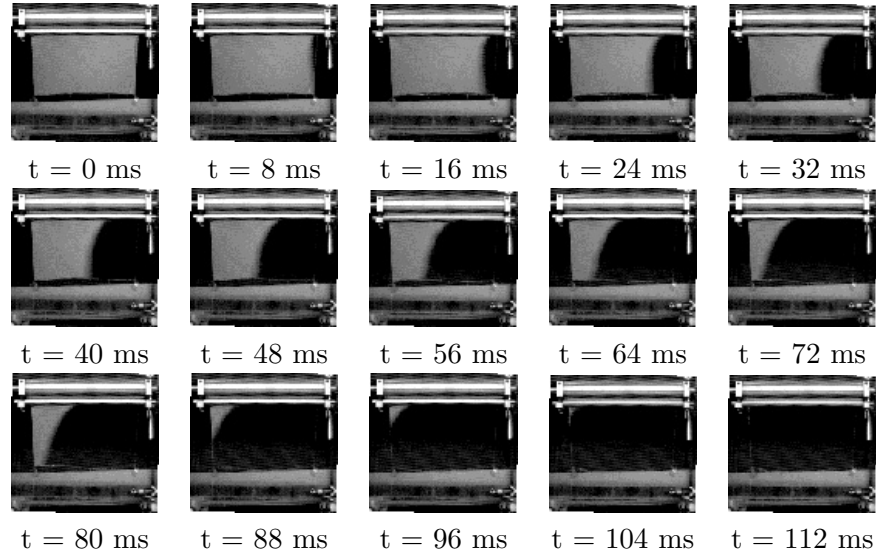


FIG. 6 – *Scénario de rupture d'un rideau mince ; nucléation et croissance d'un trou (visualisation à la caméra rapide).*

trou, puis nous l'avons comparé avec un modèle proposé par Culik[4] pour la croissance dans un film mince à partir du bilan de quantité de mouvement : la vitesse prédite par Culik est constante dans le temps (il s'agit d'un mouvement à vitesse constante, mais à masse variable, comme celui de la fusée ; le bourrelet croît en avançant puisqu'il absorbe l'essentiel du liquide provenant du rideau qui se déchire) et elle décroît en fonction de l'épaisseur :  $V = \sqrt{2\gamma/\rho h}$ . On observe bien que la vitesse de croissance du trou est plus

élevée dans le bas du rideau, correspondant aux zones de plus faibles épaisseurs (comme le liquide s'accélère en chute libre, l'épaisseur décroît vers l'aval). Quantitativement, en

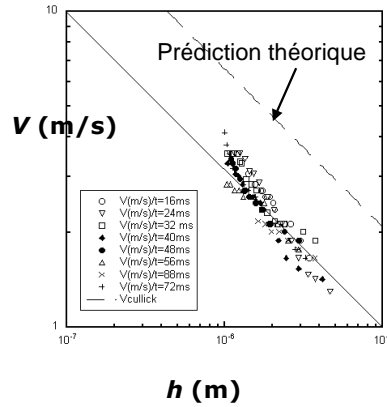


FIG. 7 – Vitesse de croissance du trou  $V$  en fonction de l'épaisseur  $h$  du rideau. Comparaison avec le modèle de Culik.

estimant à partir d'un modèle simple l'épaisseur locale du rideau (équation 1), on vérifie parfaitement la loi d'échelle prévue par le modèle de Culik en fonction de l'épaisseur (figure 7) ; en revanche on mesure systématiquement une vitesse deux fois plus faible que celle prévue par Culik. Signalons que Culik propose une autre vitesse de croissance du trou construite à partir d'un bilan énergétique, mais cette vitesse est encore plus grande  $V = \sqrt{4\gamma/\rho h}$  que la précédente.

## 5 Conclusion

Les deux mécanismes de destruction présentés ici montrent clairement que le critère fondé sur le nombre de Weber n'est pas pertinent pour prédire la stabilité d'un rideau liquide.

L'exemple du rideau fin montre combien les conditions limites jouent un rôle important dans la stabilité ; cela indique clairement le caractère hystérétique et métastable du rideau. La définition rigoureuse d'un rideau fin doit être clarifiée car le comportement d'un trou apparaît très différent dans le cas du rideau épais[3].

## Références

- [1] D.R. Brown, *A study of the behaviour of a thin sheet of a moving liquid*, J. Fluid Mech., **10**, 297 (1961),
- [2] S.P. Lin, *Waves in a viscous liquid curtain*, J. Fluid Mech., **104**, 111 (1981) ; S.P. Lin et G. Roberts, *Stability of a viscous liquid curtain*, J. Fluid Mech., **112**, 443 (1981)
- [3] N. Legrand, P. Brunet, J.M. Flesselles, L. Limat, *Perturbations of Liquid Curtains near Break-up*, 4<sup>th</sup> European Coating Symposium, 1-4 Octobre 2001, Bressels, Belgique.
- [4] F.E.C. Culik, *Bursting of soap films*, J. Appl. Phys., **30** (1960).



## Convection naturelle dans un anneau cylindrique vertical

V. Lepiller, A. Prigent, F. Dumouchel et I. Mutabazi

*Laboratoire de Mécanique, Physique et Géosciences, Université du Havre, 25 rue  
Philippe Lebon, B.P. 540, 76058 Le Havre Cedex  
valerie.lepiller@univ-lehavre.fr*

### Résumé

Nous avons étudié d'un point de vue expérimental la convection naturelle dans un anneau cylindrique vertical de grand rapport d'aspect. Les parois cylindriques sont maintenues à des températures différentes créant ainsi un gradient radial de température à travers le fluide. L'analyse des diagrammes spatio-temporels et leur démodulation complexe permet d'étudier la dynamique spatio-temporelle des motifs et leur transition vers le chaos.

## 1 Introduction

Notre travail consiste en l'étude expérimentale de la convection naturelle dans un anneau cylindrique vertical de grand rapport d'aspect. Ce sujet se place dans le cadre de l'étude de la transition vers la turbulence dans des systèmes thermo-hydrodynamiques. Les configurations annulaires sont des structures rencontrées dans plusieurs applications industrielles, comme les échangeurs thermiques, les systèmes de refroidissement des composants électroniques ou les circuits d'isolation des réacteurs nucléaires. Le problème de la convection naturelle a fait l'objet de nombreuses études numériques [1] et expérimentales [2] en cavité parallélépipédique différentiellement chauffée. Trois régimes d'écoulement ont été mis en évidence : le régime de conduction, le régime de transition et le régime de couches limites. Lorsque l'écart de température imposé entre les parois est faible, le transfert de chaleur s'effectue uniquement par conduction ; il n'existe pas de gradient vertical de température. Quand on augmente cet écart, un gradient vertical de température apparaît. On passe d'un régime de transition à un régime de couches limites où l'écoulement est formé de deux couches limites convectives. Les paramètres de contrôle sont de deux natures : physique avec le nombre de Grashof et le nombre de Prandtl, et géométrique avec le rapport d'aspect. La configuration annulaire introduit un second paramètre de contrôle géométrique le rapport des rayons. Parmi les travaux consacrés à la convection naturelle dans un anneau, on distingue les études numériques effectuées par Choi et Korpela [3] et par Bahloul [4, 5] sur la stabilité du régime de conduction. Les modes critiques sont de nature oscillante et non axisymétrique, les propriétés de l'écoulement dépendent à la fois de la géométrie et de la nature du fluide. F. Abcha [6, 7] a étudié numériquement les couches limites dans une cavité annulaire. Lorsque l'écart de température entre les parois cylindriques devient important, l'écoulement se concentre au niveau des parois en formant deux couches limites. Entre ces couches se trouve une région, appelée le coeur de la cavité, caractérisée par une stratification verticale de température stable et par des isothermes horizontales. Il a étudié les effets de la courbure et de la stratification sur les grandeurs des états critiques pour une large gamme du nombre de Prandtl,  $Pr = \nu/\kappa$ , rapport du temps de diffusion thermique  $\tau_\kappa = d^2/\kappa$  sur le temps de diffusion visqueuse  $\tau_\nu = d^2/\nu$ . A notre

connaissance, peu d'études expérimentales ont été consacrées au problème de la convection naturelle dans une cavité annulaire. On peut toutefois mentionner celle de Weidman et Mehrdadtehranfar [8] qui a mis en évidence la formation des couches limites verticales et l'existence d'une région centrale où les particules semblent immobiles. Notre intérêt s'est porté sur la caractérisation des modes d'instabilités apparaissant dans cette configuration annulaire.

## 2 Dispositif expérimental

Le système, utilisé pour l'étude de la convection naturelle, se compose de trois cylindres coaxiaux verticaux de même longueur utile  $H = 57$  cm : un cylindre intérieur en aluminium anodisé noir de rayon  $a = 2$  cm, un cylindre extérieur en verre transparent de rayon  $b = 2,5$  cm et un cylindre d'isolation en verre transparent de rayon  $c = 5$  cm. Le fluide étudié, l'eau déminéralisée, se trouve confiné dans l'espace entre les deux premiers cylindres dont la distance est  $d = b - a = 0,5$  cm. Ainsi le rapport d'aspect est  $\Gamma = L/d = 114$  et le rapport des rayons est  $\eta = a/b = 0,8$ . Le cylindre intérieur et l'espace compris entre les cylindres extérieur et d'isolation peuvent être maintenus à des températures différentes respectivement  $T_1$  et  $T_2$  grâce à deux circulations d'eau provenant de deux cryo-thermostats. Un gradient radial de température  $\delta T = \mu * (T_1 - T_2)$  est ainsi créé dans l'entrefer, où le coefficient  $\mu$  dépend de la conductivité des matériaux des cylindres et de l'eau. Dans notre expérience,  $\mu$  vaut 0,611. Les expériences présentées ici porteront sur la gamme de température comprise entre 17°C et 57°C. Afin de visualiser l'écoulement, on ajoute 2 % de Kalliroscope AQ-1000 [9, 10], qui est une suspension de 1-2 % de plaquettes réfléchissantes de  $30 \mu\text{m} \times 6 \mu\text{m} \times 0,07 \mu\text{m}$ . Un faisceau monochromatique issu du laser He-Ne ( $\lambda = 638$  nm) est transformé par une lentille cylindrique en une nappe plane parallèle à l'axe des cylindres. L'intersection de cette nappe avec l'entrefer permet de visualiser une section droite verticale de l'écoulement (Fig. 1). Une caméra CCD linéaire de 2048 pixels enregistre, à intervalles de temps réguliers, un signal de distribution de l'intensité lumineuse le long d'une ligne verticale de la section. Le signal est représenté sous forme de 256 niveaux de gris. Les lignes ainsi enregistrées sont disposées les unes à la suite des autres et forment un diagramme spatio-temporel (Fig. 2).

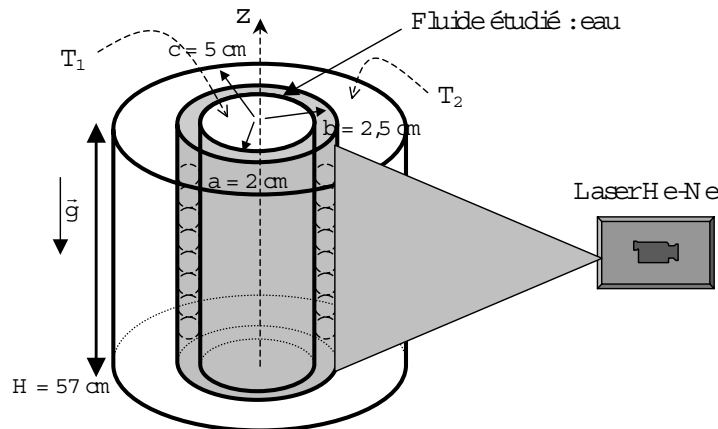


FIG. 1 – Dispositif expérimental du système de Couette-Taylor

### 3 Résultats

#### 3.1 Visualisation

Pour étudier les effets thermiques dans une cavité annulaire, nous avons imposé au départ la même température aux deux bains thermostatés. Puis nous avons augmenté la température  $T_1$  tout en maintenant constante la température  $T_2$ . Dès que l'écoulement est soumis à un faible écart de température, une unique cellule verticale de convection se forme : les particules, le long de la paroi chauffée, ont un mouvement ascendant tandis que celles au voisinage de la paroi froide, plus lourdes, ont un mouvement descendant. Lorsque la température atteint la température critique  $T_{1c}$ , la cellule de convection devient instable. Un motif caractérisé par des rouleaux inclinés se forme au centre du dispositif. Il n'existe aucune présence d'instabilités aux extrémités du système. En continuant d'augmenter cet écart, les rouleaux inclinés se propagent vers les extrémités et les premières traces de chaos apparaissent dans le motif. Le chaos se développe avec la distance au seuil. Ni la disparition totale des rouleaux inclinés, ni le développement du motif chaotique dans tout le système n'ont été observé. L'étude des diagrammes spatio-temporels permet également de suivre l'évolution du motif dans le temps et l'espace : rouleaux inclinés, traces de chaos, motif chaotique d'instabilités (Fig. 2). Nous avons constaté que la différence de température imposée entre les parois cylindriques n'est pas le seul facteur déclenchant du changement de la dynamique de l'écoulement. En effet, pour un écart radial de température plus faible, le chaos peut être davantage développé. Les structures rencontrées dans le système pour  $\delta T = 11^\circ\text{C}$  et  $T_2 = 35^\circ\text{C}$  (Fig. 2(c)) sont de nature plus chaotique que pour  $\delta T = 17,1^\circ\text{C}$  et  $T_2 = 19^\circ\text{C}$  (Fig. 2(d)). La figure 3 présente le diagramme de bifurcation de l'écoulement en fonction des températures des parois  $T_1$  et  $T_2$ . Nous constatons sur ce diagramme une évolution rapide vers le chaos pour une température  $T_2$  fixée.

#### 3.2 Propriétés spatio-temporelles

A partir de l'étude des diagrammes spatio-temporels, nous avons extrait des informations concernant la dynamique de l'écoulement. Les spectres de puissance spatiale et temporelle permettent d'avoir accès respectivement au nombre d'onde  $k$  et à la fréquence  $f$  des motifs. Pour les grands écarts de températures, les spectres de puissance deviennent dominés par le bruit. Nous avons étudié le comportement du nombre d'onde adimensionné  $q$  défini par  $q = kd$ , pour différentes valeurs de  $T_2$  et  $T_1$ . Il reste constant par rapport au nombre de Grashof  $Gr = (g\alpha\delta T d^3)/\nu^2$ , sa valeur est  $q_m = 2,83 \pm 0,17$  (Fig. 4(a)). La fréquence, adimensionnée par le temps de diffusion par viscosité  $\tau_\nu$ , croît avec le nombre de Grashof  $Gr$  (Fig. 4(b)).

#### 3.3 Taille du motif

Pour une température  $T_2$  fixée, le motif d'instabilités s'étend quand la température  $T_1$  croît. L'utilisation de la démodulation complexe permet de déterminer la taille du motif. Nous avons constaté qu'elle augmente sans que les motifs atteignent les extrémités du système. La figure 5 présente la taille du motif en fonction du nombre de Grashof pour différentes températures du cylindre extérieur  $T_2$ . Les courbes comportent des caractéristiques similaires. Nous pouvons donc écrire la dépendance de la taille du motif en fonction du nombre de Grashof sous la forme :  $L = L_c(T_2, Gr_c) + a(L_c, Gr_c, T_2) \cdot (Gr -$

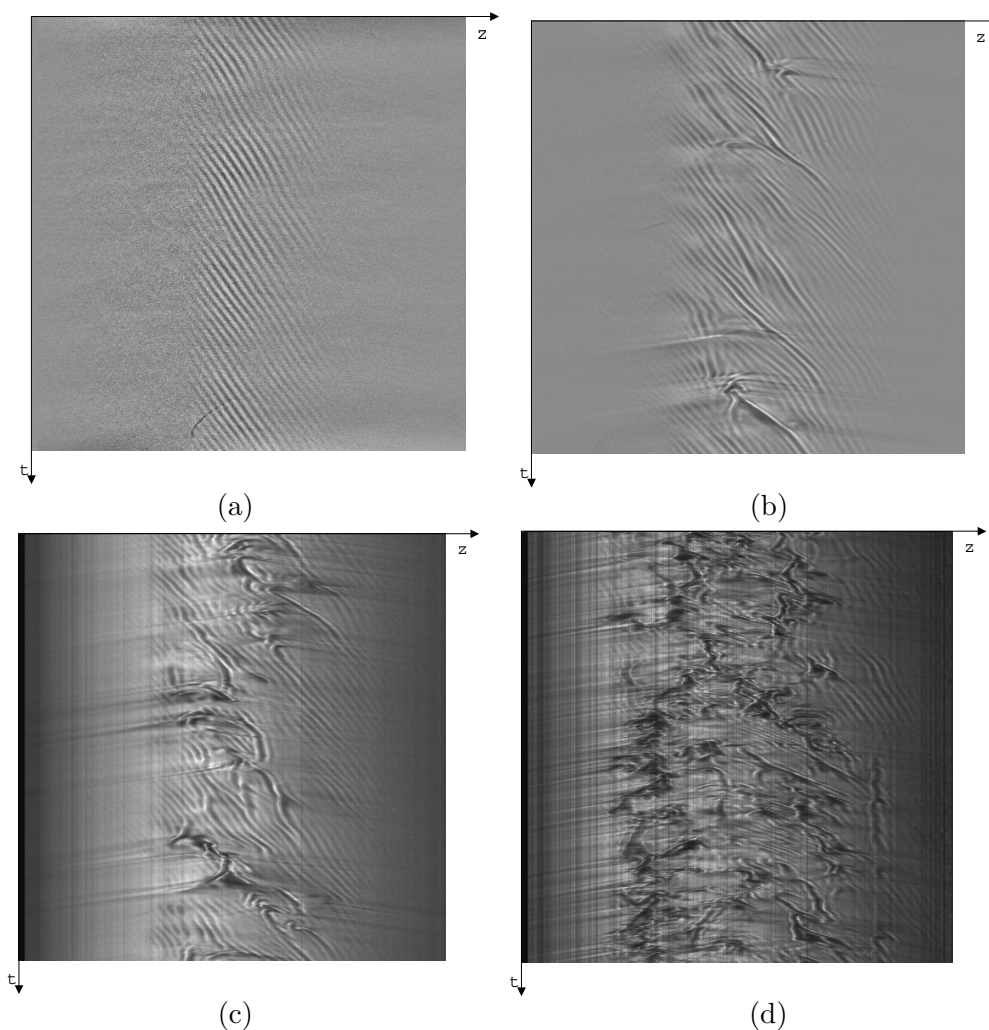


FIG. 2 – Diagrammes spatio-temporels représentant a) des rouleaux inclinés pour  $T_1 = 43^\circ C$  et  $T_2 = 19^\circ C$ , b) les premières traces de chaos pour  $T_1 = 46^\circ C$  et  $T_2 = 19^\circ C$ , c) le motif chaotique pour  $T_1 = 47^\circ C$  et  $T_2 = 19^\circ C$  ( $\delta T = 17,1^\circ C$ ) et d) le motif chaotique pour  $T_1 = 53^\circ C$  et  $T_2 = 35^\circ C$  ( $\delta T = 11^\circ C$ )

$Gr_c)^{0,5}$ . Nous avons ainsi identifié un paramètre d'ordre  $\Lambda = L - L_c$  lié à la taille du motif en accord avec la théorie des bifurcations de Landau [11, 12].

## 4 Discussion et conclusion

Le problème de la convection naturelle en cavité annulaire est complexe à cause des non linéarités hydrodynamiques et thermiques entrant en compétition. L'écart de température imposé entre les parois de l'anneau provoque l'apparition d'une unique cellule verticale de convection : les particules chaudes ont un mouvement ascendant tandis que celles plus froides ont un mouvement descendant. L'augmentation de cet écart entraîne le développement de motifs dans le système : rouleaux inclinés, traces de chaos, motif chaotique. Nous avons constaté que l'écart de température n'est pas le seul facteur

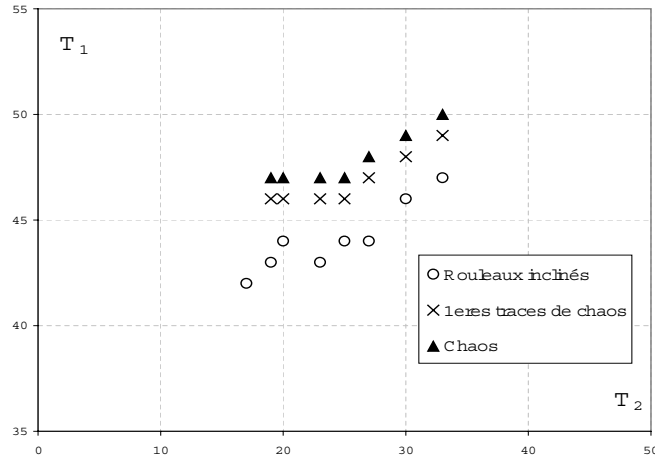
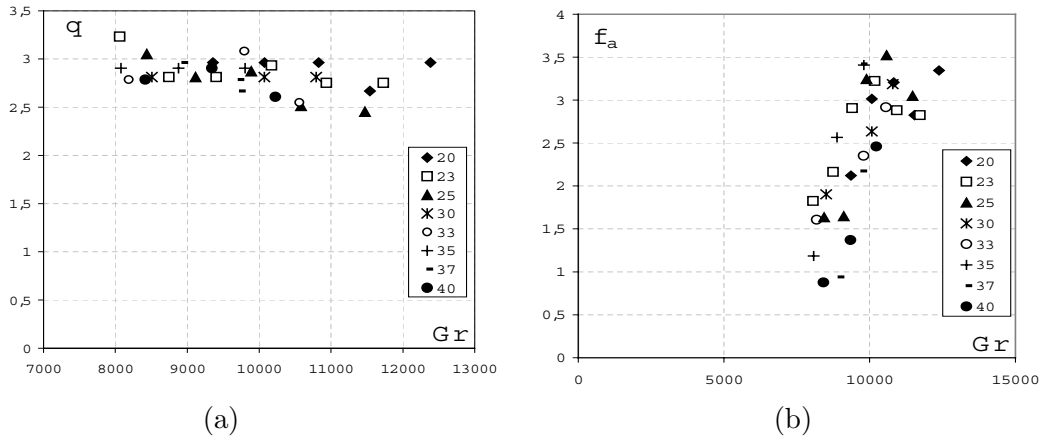


FIG. 3 – Diagramme de bifurcation de l'écoulement

FIG. 4 – Evolution du nombre d'onde  $q$  et de la fréquence  $f_a$  du motif en fonction du nombre de Grashof  $Gr$  pour différentes températures  $T_2$ 

déclenchant l'apparition d'un motif, les températures des cylindres intérieur et extérieur jouent un rôle primordial dans le système. Ainsi les variations des propriétés du fluide avec la température ne sont pas négligeables dans l'entrefer : l'approximation de Boussinesq est donc remise en cause pour les grands écarts de température. Les motifs rencontrés dans la cavité annulaire se caractérisent par un nombre d'onde constant, une fréquence et une taille du motif croissantes avec le nombre de Grashof. Nos résultats expérimentaux sont en accord avec ceux obtenus dans des études de stabilité linéaire ou dans des simulations numériques. Ce travail ouvre sur de nombreuses perspectives. L'eau déminéralisée pourrait être remplacée par un liquide plus visqueux pour atteindre des valeurs très élevées du nombre de Prandtl. De plus, une faible rotation d'un des cylindres permettrait de mieux comprendre le rôle de l'écoulement azimuthal sur la convection naturelle dans un anneau cylindrique. L'ajout de miroirs placés autour du système cylindrique apporterait des informations sur l'inclinaison des rouleaux et permettrait de visualiser tout le motif.

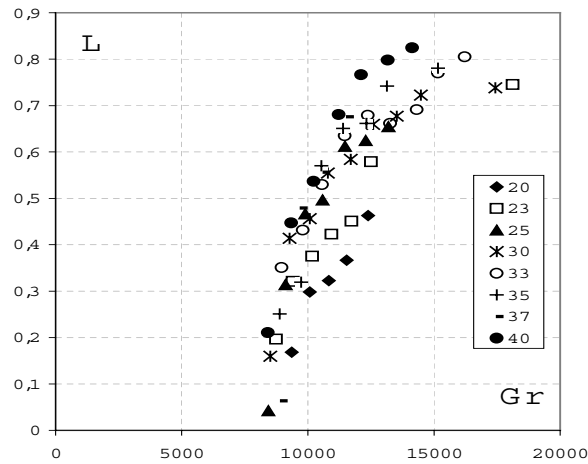


FIG. 5 – Variation de la taille adimensionnée du motif  $L$  en fonction du nombre de Grashof pour différentes températures  $T_2$

## Références

- [1] S.A. Korpela, D. Gözüüm & C.B. Baxi, *On the stability of conduction regime of natural convection in a vertical slot*, Int J. Heat Mass Transfer, **16**, pp. 1683-1690 (1973).
- [2] J.W. Elder, *Laminar free convection in a vertical slot*, J. Fluid Mech., **23**, pp. 77-98 (1965).
- [3] I.G. Choi & S. A. Korpela, *Stability of a conduction regime of natural convection in a tall vertical annulus*, J. Fluid Mech., **99**, pp. 725-738, (1980).
- [4] A. Bahloul, *Étude numérique de la stabilité d'un écoulement de Poiseuille courbe avec un gradient radial de température*, Thèse de doctorat de l'Université du Havre, (1997).
- [5] A. Bahloul, I. Mutabazi & A. Ambari, *Codimension 2 points in the flow inside a cylindrical annulus with a radial temperature gradient*, Eur. Phys. J AP, **9**, pp. 253-264, (2000).
- [6] F. Abcha, *Étude de la stabilité des écoulements de convection naturelle entre deux cylindres coaxiaux verticaux*, Thèse de doctorat de l'Université Paris VI, (1995).
- [7] J. Pécheux, P. Le Quéré & F. Abcha, *Curvature effects on axisymmetric instability of conduction regime in a tall air-filled annulus*, Phys. Fluids, **6**, pp. 3247-3255, (1994).
- [8] P.D. Weidman & G. Mehrdadtehranfar, *Instability of natural convection in a tall vertical annulus*, Phys. Fluids, **28**, 776, (1985).
- [9] M.A. Dominguez-Lerma, G. Ahlers & D.S. Cannell, *Effects of "Kalliroscope" flow visualization particles on rotating Couette-Taylor flow*, Phys. Fluids, **28**, pp. 1204-1206, (1985).
- [10] P. Matisse & M. Gorman, *Neutrally buoyant anisotropic particles for flow visualization*, Phys. Fluids, **27**, pp. 759-760 (1984).
- [11] E. Guyon, J.P. Hulin & L. Petit, *Hydrodynamique physique*, Editions du CNRS, (2000).
- [12] L. Landau & E. Lifchitz, *Mécanique des fluides*, Editions Mir Moscou, (1989).

## Instabilité dynamo en présence de bruit

N. Leprovost et B. Dubrulle

*Groupe Instabilité et Turbulence, CEA/DSM/DRECAM/SPEC,  
CNRS URA 2464,  
F-91191 Gif sur Yvette Cedex, France  
nicolas.leprovost@cea.fr*

### Résumé

L'équation d'induction en présence d'un champ de vitesse turbulent, est envisagée dans une approche stochastique qui consiste à dériver l'équation de Fokker-Planck décrivant l'évolution de la densité de probabilité du champ magnétique. Celle-ci est alors séparée en une partie ne faisant intervenir que la norme du champ magnétique et une autre faisant intervenir sa direction. A partir de l'équation pour la probabilité de la norme, on peut définir un seuil turbulent d'apparition de l'effet dynamo (correspondant à l'apparition d'une solution non triviale pour le champ magnétique).

## 1 Introduction

Un écoulement de fluide conducteur est capable de donner naissance spontanément à un champ magnétique par effet dynamo. Dans une dynamo expérimentale, le fluide utilisé est le sodium liquide et un des buts des études est de déterminer l'écoulement optimum pour engendrer un champ magnétique. En pratique, cela revient à déterminer le nombre de Reynolds magnétique critique d'apparition de l'effet dynamo pour différents écoulements et de sélectionner l'écoulement pour lequel le seuil est le plus faible (vitesse du fluide plus faible donc puissance consommée plus faible). Malheureusement le nombre de Prandtl magnétique (rapport de la viscosité sur la diffusivité magnétique,  $P_m = R_m/R_e$ ) du sodium liquide étant extrêmement faible, n'importe quel écoulement de sodium ayant une chance de passer le seuil (pratiquement pour des nombres de Reynolds magnétique de l'ordre de 10 ou de 100) est fortement turbulent. Compte tenu de l'impossibilité de simuler des écoulements à très grand nombre de Reynolds, il est clair que le problème de la dynamo à très faible nombre de Prandtl magnétique ne peut être résolu numériquement. Cependant, l'existence d'une séparation d'échelle permet de construire des approximations numériques [1].

En ce qui concerne les dynamos astrophysiques, on est dans le régime opposé: le nombre de Prandtl est très élevé mais il ne faudrait pas en conclure l'absence de turbulence. En effet, ces dynamos fonctionnent très loin du seuil, le nombre de Reynolds magnétique y est très élevé ce qui implique un nombre de Reynolds gigantesque aussi. Cependant, l'échelle de diffusion du champ magnétique est très faible comparée à celle de dissipation visqueuse; il existe donc une gamme d'échelle sous l'échelle de dissipation visqueuse dans laquelle on peut considérer que le champ de vitesse est régulier (régime de Batchelor). On peut donc approximer celui-ci par un champ de vitesse aléatoire mais linéaire en position et l'équation d'induction devient une équation stochastique analysable en termes de matrices aléatoires [2]. Cependant le champ magnétique considéré par ces méthodes est à des échelles très petites devant la turbulence alors que les objets astrophysiques ont des champs magnétiques sur des échelles de longueur beaucoup plus grandes.

On voit donc qu'une théorie analytique de la dynamo prenant en compte toutes les échelles de la turbulence est de première importance. Dans la suite, nous allons considérer l'équation d'induction avec un champ de vitesse  $\vec{V} = \bar{U} + \vec{u}$  composé d'une partie moyenne (par exemple moyennée en temps) et de fluctuations turbulentes dont on précisera les propriétés statistiques en temps voulu.

## 2 Formulation du problème

Dans toute cette section, on va utiliser les notations de [3]: un exposant dénote la composante d'un vecteur alors qu'un indice représente une dérivée par rapport à une coordonnée d'espace. De plus, on utilisera la convention d'Einstein (sommation sur les indices répétés). L'équation d'induction, qui régit l'évolution d'un champ magnétique dans le champ de vitesse  $u^k$  d'un fluide conducteur, prend alors la forme:

$$\partial_t B^i = -(\bar{V}^k + u^k)B_k^i + (\bar{V}_k^i + u_k^i)B^k + \eta B_{kk}^i \quad (1)$$

Du fait de la forme de l'équation d'induction, on voit que la turbulence se manifeste sous la forme d'un bruit multiplicatif dans l'équation d'induction. Le champ  $B^k$  est donc aléatoire et on peut calculer la probabilité de trouver une certaine valeur du champ magnétique au point  $\vec{x}$  et au temps  $t$ : sa fonction densité de probabilité  $P(\vec{B}, \vec{x}, t)$ . Dans l'approximation cinématique, on considère la stabilité de la solution  $B^k = 0$  de cette équation et il n'est pas nécessaire de considérer la rétroaction du champ magnétique sur le champ de vitesse, rétroaction qui se manifeste par l'intermédiaire de la force de Lorentz dans l'équation de Navier-Stokes. L'approximation linéaire valide pour des champs de vitesses  $u^k$  continus doit cependant être manié avec précaution dans le cas où le champ de vitesse est un processus stochastique. En effet, l'analyse de stabilité linéaire d'une équation en présence d'un bruit multiplicatif présente des comportements surprenants: notamment, les moments d'une telle équation divergent pour des valeurs du paramètre de contrôle dépendant de l'ordre du moment considéré d'où des problèmes dans la définition d'un seuil d'instabilité!

Pour contourner ces difficultés de définition, on suivra une idée de [4] illustrée sur la figure 1: en dessous du seuil, la seule solution de l'équation d'induction est un champ magnétique nul. La fonction de probabilité est donc une fonction concentrée à l'origine et d'intégrale unité: une fonction de Dirac. Au dessus du seuil, le champ de vitesse doit donner naissance à un champ magnétique par effet dynamo. L'instabilité dynamo (et son seuil d'apparition  $R_{mc}$ ) sera donc repéré par l'existence de solutions différentes d'un Dirac centré en 0 pour la distribution de probabilité du champ magnétique. Un problème subsiste: l'équation d'induction étant linéaire en  $\vec{B}$ , le champ magnétique, si il existe, ne peut que diverger aux temps longs. Cette situation n'est bien sûr pas physiquement plausible mais plus important pour nous, cela nous empêche de définir la fonction de probabilité du champ magnétique au dessus du seuil de l'effet dynamo. Si l'on veut poursuivre dans cette voie, on est obligé d'inclure un terme de saturation non-linéaire dans l'équation d'induction. D'après les équations de la MHD, ce terme doit venir de la force de Lorentz dans l'équation de Navier-Stokes. Une façon plausible de faire saturer l'équation d'induction due à [3] est d'équilibrer la force de Lorentz et les forces visqueuses (éventuellement turbulentes) dans l'équation de Navier-Stokes, ce qui revient à effectuer le remplacement:

$$u_k^i \longrightarrow u_k^i - \frac{1}{\nu} \frac{d-1}{d} B^2 B^i \quad (2)$$



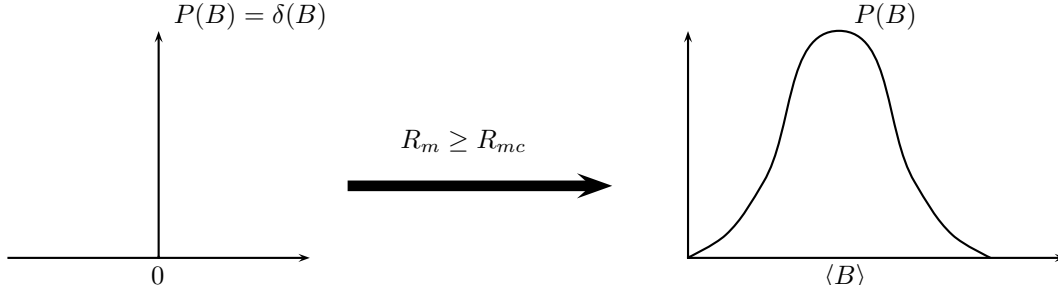


FIG. 1 – Schéma du passage d'une fonction de Dirac pour la distribution de probabilité à une fonction normalisable lorsqu'on franchit le seuil de l'effet dynamo.

où  $\nu$  est la viscosité du fluide (éventuellement turbulente) et  $d$  est la dimension de l'espace dans lequel on travaille. Un des problèmes évidents avec cette façon de faire est que le membre de droite de la nouvelle équation d'induction (avec le terme non-linéaire) n'est plus de divergence nulle et donc la condition de non-divergence du champ magnétique n'est plus conservée au cours du temps. Ceci vient du fait que l'on a inclut la rétroaction du champ magnétique uniquement par l'intermédiaire de son action sur le gradient de vitesse  $u_k^i$  et pas sur le champ de vitesse lui même  $u^k$ . Il est cependant légitime de penser que cette façon de faire nous donnera des résultats cohérents: en effet, [4] ont montré que le seuil d'une instabilité déterminée par cette méthode de transition de la fonction de probabilité correspondait au passage par zéro de l'exposant de Lyapunov calculé à partir de l'équation **linéaire**. On peut donc supposer que la forme particulière du terme non linéaire n'est pas très importante pour la détermination du seuil: en effet, celui-ci sert principalement à assurer que la fonction de probabilité  $P(\vec{B}, \vec{x}, t)$  existe lorsque le champ magnétique n'est plus identiquement nulle.

### 3 Détermination de la Fokker-Planck

Pour trouver l'équation vérifiée par la fonction  $P$ , nous allons utiliser la méthode classique de la fonction caractéristique [5]. On introduit la fonction caractéristique associée au processus stochastique  $B^i(\vec{x}, t)$  dont la valeur moyenne est la transformée de Fourier (par rapport à  $\vec{B}$ ) de la distribution de probabilité  $P$ :

$$Z(\vec{\lambda}, \vec{x}, t) = \exp[i\lambda^i B^i(\vec{x}, t)] \quad (3)$$

L'équation vérifiée par  $Z$  est facile à déterminer exception faite du terme de diffusion (qui fait intervenir deux dérivés spatiales), que nous allons donc négliger pour l'instant. On écrit la valeur moyenne de cette équation sous la forme  $\partial_t \langle Z \rangle = \mathcal{D} + \mathcal{S}$  où  $\mathcal{D}$  est la partie déterministe (faisant intervenir uniquement le champ magnétique et le champ de vitesse moyen) et  $\mathcal{S}$  la partie stochastique (faisant intervenir le champ de vitesse turbulent  $u^k$ ). La partie déterministe se calcule aisément:

$$\mathcal{D} = -\bar{V}^k \partial_{x^k} \langle Z(\lambda, x, t) \rangle + \bar{V}_k^i \lambda^i \partial_{\lambda^k} \langle Z(\lambda, x, t) \rangle + \frac{d-1}{d\nu} \lambda_i \partial_{\lambda^k} \partial_{\lambda^k} \partial_{\lambda^i} \langle Z(\lambda, x, t) \rangle \quad (4)$$

Pour déterminer l'équation de Fokker-Planck vérifiée par  $P(B, x, t)$ , il faut prendre la transformée de Fourier inverse de l'équation pour la valeur moyenne de  $Z(\lambda, x, t)$ :

$$\partial_t P + \bar{V}^k \partial_k P = -\bar{V}_k^i \partial_{B^i} [B^k P] + \frac{d-1}{d\nu} \partial_{B^i} [B^2 B^i P] + \mathcal{T} \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{S}) \quad (5)$$

La partie stochastique se calcule par intégration formelle de l'équation d'évolution de  $Z$ . On obtient alors:

$$\begin{aligned} \mathcal{S} = & +\partial_k \int_{-\infty}^t \langle u^k(t) u^l(t') \rangle \partial_l \langle Z(t') \rangle dt' - \partial_k \int_{-\infty}^t \langle u^k(t) u_l^i(t') \rangle \lambda^i \partial_{\lambda^i} \langle Z(t') \rangle dt' \\ & - \lambda_i \partial_{\lambda^k} \int_{-\infty}^t \langle u^l(t') u_k^i(t) \rangle \partial_l \langle Z(t') \rangle dt' + \lambda_i \partial_{\lambda^k} \int_{-\infty}^t \langle u_k^i(t) u_l^j(t') \rangle \lambda^j \partial_{\lambda^i} \langle Z(t') \rangle dt' \end{aligned} \quad (6)$$

Pour continuer, on va supposer que toutes les quantités turbulentes sont delta-corrélés en temps, par exemple on écrit  $\langle u^k(t) u^l(t') \rangle = 2\delta(t - t') \langle u^k(t) u^l(t) \rangle$ . On utilise aussi les notations suivantes:

$$\beta^{kl} = \langle u^k u^l \rangle \quad \alpha^{ijk} = \langle u^i u_k^j \rangle \quad \mu^{ijkl} = \langle u_j^i u_l^k \rangle \quad (7)$$

A cause de l'incompressibilité du champ de vitesse, on a les relations suivantes:  $\alpha^{kii} = \mu^{iikl} = \mu^{ijkk} = 0$ . Avec ces notations, on peut calculer la transformée inverse de la partie stochastique puis de la réinjecter dans (5) pour déterminer l'équation de Fokker-Planck vérifiée par la densité de probabilité du champ magnétique  $P(B, x, t)$ :

$$\begin{aligned} \partial_t P + \bar{V}^k \partial_k P = & -\bar{V}_k^i \partial_{B^i} [B^k P] + \frac{d-1}{d\nu} \partial_{B^i} [B^2 B^i P] + \partial_k [\beta^{kl} \partial_l P] \\ & + \partial_k \partial_{B^i} (\alpha^{kil} B^l P) + \partial_{B^i} [B^k \alpha^{lik} \partial_l P] + \mu^{ijkl} \partial_{B^i} [B^j \partial_{B^k} (B^l P)] \end{aligned} \quad (8)$$

Si on suppose l'homogénéité (i.e. les valeurs moyennes ne dépendent pas de l'espace), on peut sortir les tenseurs  $\alpha$  et  $\beta$  des dérivées spatiales et l'on voit alors que le quatrième et le cinquième terme du membre de droite de l'équation précédente sont égaux. Par simplification, on supposera l'homogénéité par la suite mais le cas inhomogène se traite sans difficulté particulière.

Par analogie avec la théorie classique de la "Mean-Field Dynamo" [6, 7], on peut dériver l'équation vérifiée par le champ moyen; pour cela, on multiplie l'équation précédente par  $B^i$  et on intègre par rapport au champ magnétique ce qui donne l'équation suivante:

$$\partial_t \langle B^i \rangle + \bar{V}^k \partial_k \langle B^i \rangle = \bar{V}_k^i \langle B^k \rangle - 2\alpha^{kil} \partial_k \langle B^l \rangle + \beta^{kl} \partial_k \partial_l \langle B^i \rangle - \frac{d-1}{d\nu} \langle B^2 B^i \rangle \quad (9)$$

Les tenseurs précédemment définis s'identifient donc aux coefficients  $\alpha$  et  $\beta$  de la MFD (deuxième et troisième terme du membre de droite). Par analogie avec l'effet  $\beta$  (diffusivité turbulente), on peut rajouter la diffusion "à la main" en faisant le remplacement:  $\beta^{kl} \rightarrow \beta^{kl} + \eta \delta^{kl}$ . D'après l'expression de  $\beta$ , la diffusivité turbulente a toutes les chances d'être positive ce qui exclut les dynamos turbulentes par "diffusivité négative" [8]. On remarque cependant que notre inclusion artificielle de la diffusivité empêche tout couplage entre la diffusivité moléculaire et le champ turbulent et donc n'est pas le cas le plus général.

## 4 Décomposition norme-angle

Pour continuer, on va introduire la norme du champ magnétique  $B = \sqrt{B^k B^k}$  ainsi que sa direction  $n^k = B^k / B$ . On remarque alors que le gradient s'écrit dans les nouvelles variables:

$$\frac{\partial}{\partial B^i} (B^k G) = n^i n^k B \frac{\partial G}{\partial B} + \frac{\partial}{\partial n^i} (n^k G) \quad (10)$$

Le dernier terme est une notation pour la partie du gradient faisant intervenir les angles. La Fokker-Planck peut être réécrite:

$$\partial_t P + \bar{V}^k \partial_k P = \partial_k (\beta^{kl} \partial_l P) + \mathcal{L}_B P + \mathcal{L}_n P + \mathcal{R}P \quad (11)$$

où l'opérateur  $\mathcal{L}_B$  est composé des termes ne faisant intervenir que les dérivées par rapport à la norme du champ magnétique,  $\mathcal{L}_n$ , ceux ne contenant que les dérivées par rapport à l'orientation de ce dernier et le dernier terme contient les dérivées croisées.

En supposant que la probabilité est séparable, on écrit  $P(B, x, t) = P(B, t)G(\vec{n}, \vec{x}, t)$ . En intégrant l'équation (11) sur les angles, on obtient l'équation suivante pour la distribution de probabilité de la norme du champ magnétique (on remarque que tous les termes contenant des dérivées spatiales disparaissent à cause de l'incompressibilité):

$$\frac{\partial P}{\partial t} = a \frac{1}{B^{d-1}} \frac{\partial}{\partial B} [B \frac{\partial}{\partial B} (B^d P)] - b \frac{1}{B^{d-1}} \frac{\partial}{\partial B} (B^d P) + \frac{d-1}{d\nu} \frac{1}{B^{d-1}} \frac{\partial}{\partial B} (B^{d+2} P) \quad (12)$$

où les coefficients de cette équation s'expriment avec une moyenne sur les angles et la position:  $\langle \bullet \rangle_\phi = \int \bullet G(\vec{n}, \vec{x}) d\vec{x} d\vec{n}$ .

$$a = \langle \mu^{ijkl} n^i n^j n^k n^l \rangle_\phi \quad b = \langle \bar{V}_k^i n^i n^k \rangle_\phi + \langle \mu^{ijkl} (\delta^{ik} n^j n^l + \delta^{kj} n^i n^l) \rangle_\phi \quad (13)$$

Pour dériver l'équation (12), on a utilisé la formule d'intégration par partie sur les angles suivantes:

$$\langle F(\vec{n}) \partial_{n^i} [n^j G(\vec{n})] \rangle_\phi = (d-1) \langle n^i n^k F(\vec{n}) G(\vec{n}) \rangle_\phi - \langle \partial_{n^i} [F(\vec{n})] n^j G(\vec{n}) \rangle_\phi \quad (14)$$

Comme évoqué dans l'introduction, le seuil d'apparition de l'effet dynamo sera franchie lorsque l'équation (12) admettra des solutions normalisables autres que la distribution de Dirac (qui correspond à un champ magnétique identiquement nul). On va donc maintenant chercher grâce à un raisonnement local, sous quelles conditions, l'équation (12) possède des solutions stationnaires ( $\partial_t P = 0$ ) normalisables aussi bien en 0 qu'à l'infini.

Pour  $B \gg 1$ , les termes dominants de l'équation pour P sont:

$$a \frac{1}{B^{d-1}} \frac{\partial}{\partial B} [B \frac{\partial}{\partial B} (B^d P)] + \frac{d-1}{d\nu} \frac{1}{B^{d-1}} \frac{\partial}{\partial B} (B^{d+2} P) = 0 \quad (15)$$

dont la contribution dominante est une Gaussienne de variance  $d\nu a/(d-1)$  et dont on voit qu'elle est normalisable à l'infini sous la seule condition que  $a$  soit positif. Nous ne savons pas démontrer dans le cas général que le signe de  $a$  est fixé mais nous avons bonne raison de croire que le tenseur  $\mu^{ijkl}$  étant relié à la dissipation du système, ce signe doit être fixé par le fait que la dissipation est négative.

Pour  $B \ll 1$ , on peut négliger le terme non linéaire et on va chercher les solutions de l'équation (12) sous la forme  $P(B) \propto B^{(\alpha-d)}$  ce qui donne l'équation suivante pour  $\alpha$ :

$$a\alpha^2 - b\alpha = 0 \quad (16)$$

Pour que l'on puisse avoir une solution normalisable, il faut que  $P(B)$  multiplié par l'élément de volume  $B^{d-1}$  soit intégrable en 0 ce qui, compte tenu de notre choix pour la forme de  $B$  se ramène au fait que l'une au moins des racines de l'équation précédente soit positive strictement. On obtient donc la condition:

$$\frac{b}{a} > 0 \quad (17)$$

#### 4.1 Lien avec l'exposant de Lyapunov

Dans la théorie des systèmes dynamiques déterministes, la condition d'instabilité est associée à l'existence d'un exposant de Lyapunov positif. Pour les systèmes stochastiques, le lien est moins clair et aucun théorème général ne permet de relier l'instabilité d'un tel système à un exposant de Lyapunov. Cependant dans tous les systèmes étudiés jusqu'alors, le seuil d'instabilité coïncide avec le passage par zéro de l'exposant:  $\lim_{t \rightarrow \infty} \ln B^2 / 2t$ . Pour trouver ce que ce dernier vaut dans notre cas, on multiplie l'équation (12) par  $B^{d-1} \ln B$  et on intègre sur  $B$  ce qui nous amène à l'expression suivante:

$$\partial_t \langle \ln B \rangle = b \quad (18)$$

et donc l'exposant de Lyapunov de notre système s'identifie à  $b$ . La condition d'instabilité donné par l'exposant de Lyapunov est donc équivalente à celle trouvée précédemment uniquement si le coefficient  $a$  est positif.

## 5 Conclusion

Grâce à une approche stochastique, nous avons pu étudier l'équation d'induction et trouver un critère simple d'apparition de l'effet dynamo:  $\langle \bar{V}_k^i n^i n^k \rangle_\phi + \langle \mu^{ijkl} (\delta^{ik} n^j n^l + \delta^{kj} n^i n^l) \rangle_\phi > 0$ . Si on ne considère que la partie déterministe de cette équation, on voit que cette condition se résume à l'existence d'un exposant de Lyapunov positif pour le champ de vitesse moyen  $\bar{V}$  et qu'en moyenne, le champ magnétique soit orienté dans la direction correspondante [2]. L'interprétation de la partie stochastique de ce critère est moins évidente et nécessite de calculer la distribution de la direction du champ magnétique: pour cela, on multiplie l'équation (11) par le facteur de normalisation  $B^{d-1}$  et on intègre par rapport à  $B$ . L'étude de cette équation dans différents cas est en cours.

## Références

- [1] Y. Ponty et al., *Simulation of induction at low magnetic Prandtl number*, on press PRL, 2003,
- [2] M. Chertkov et al., *Small scale turbulent dynamo*, Phys. Rev. Lett., **Vol.83**, pp. 4065-4068, 1999,
- [3] S. Boldyrev, *A solvable model for nonlinear mean field dynamo*, Astrophys. J., **Vol. 569**, pp. 1081-1085, 2001,
- [4] K. Mallick et P. Marcq, *Stability analysis of a noise-induced Hopf bifurcation*, Eur. Phys. J. B, **Vol. 36**, pp. 119-128, 2003,
- [5] J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*, Oxford, 2002
- [6] F. Krause et K.-H. Radler, *Mean field MHD and dynamo theory*, Pergamon press, 1980,
- [7] H.K. Moffatt, *Magnetic field generation in fluids*, CUP, 1978,
- [8] V.A. Zeligovsky et al., *Dynamo effect in parity-invariant flow with large and moderate separation of scales*, Geophys. Astro. Fluid, **Vol. 95**, pp. 227-268, 2001,

## Discrétisation de systèmes dynamiques par schémas non standards

C. Letellier, et E. Mendes

*CORIA - Univ. de Rouen, BP 12, 76801 Saint-Etienne du Rouvray cedex*

*UFMG, Belo-Horizonte, Minas Gerais, Brésil*

Christophe.Letellier@coria.fr

### Résumé

Des schéma de discrétisations non standards, c'est-à-dire plus robustes aux variations de pas de temps, sont appliquées au système de Lorenz. Il est montré que tant que le pas de temps est inférieur au critère de Nyquist, les solutions obtenues sont équivalentes à celles du système original, à un déplacement dans l'espace des paramètres près.

Lorsque des équations différentielles ordinaires sont étudiées, rares sont les situations où la solution s'obtient par intégration analytique. Il est alors nécessaire d'utiliser des intégrations numériques pour l'obtention de solutions. Néanmoins, il peut être parfois utile de remplacer le système d'équations différentielles avec une dépendance continue par rapport au temps par des équations discrètes. Par exemple, lorsque des techniques de modélisations globales sont utilisées pour obtenir un modèle reproduisant l'évolution d'un système dans l'espace des phases, des modèles continus ou discrets peuvent être obtenus [1, 2] : la comparaison entre ces deux types de modèles passent nécessairement par la discrétisation d'équations différentielles [3].

Lorsque des schémas standards (schéma d'Euler ou schéma aux différences finies centrées) sont utilisés, les solutions de la discrétisations sont équivalentes à celles des équations différentielles, mais pour de petits pas de temps seulement. Lorsque des schémas non standards sont utilisés, les équations discrètes obtenues possèdent des solutions correspondant aux équations différentielles mais avec un déplacement dans l'espace des paramètres. Ces résultats [3, 5] ont été montrés à l'aide d'un schéma de Mickens [6] appliqué au système de Rössler et un schéma de Monaco et Normand-Cyrot appliqué au système de Genesio et Tesi. En particulier, des instabilités numériques, qui sont des solutions des équations discrètes qui ne correspondent à aucune solution des équations différentielles originales, apparaissent lorsque le pas de temps est trop grand [4].

Dans cette contribution, nous appliquons les deux schémas précédents au système de Lorenz. La section 2 introduit la discrétisation obtenue à l'aide du schéma de Mickens tandis que la section 3 est consacrée aux équations discrètes obtenues à l'aide du schéma de Monaco et Normand-Cyrot. Dans les deux cas, la robustesse des équations discrètes en fonction du pas de temps est discutée.

## 1 Schéma non standard de Mickens

De manière à optimiser la robustesse des discrétisations par rapport aux variations du pas de temps, Mickens a formulé un ensemble de lois pour la construction d'équations discrètes à partir d'équations différentielles [4]. Pour cela, nous partons de la forme générale

$$\dot{u}_i \mapsto \frac{u_{i,k+1} - \Psi u_{i,k}}{\varphi_i}, \quad (1)$$

où  $\Psi_i$  et  $\varphi_i$  dépendent du pas de temps  $h$  et des autres paramètres apparaissant dans les équations différentielles. Les fonctions  $\Psi_i$  et  $\varphi_i$  doivent satisfaire les conditions  $\Psi_i = 1 + \mathcal{O}(h)$  et  $\varphi_i = h + \mathcal{O}(h^2)$  et peuvent varier d'un jeu d'équations à un autre. Malheureusement, il n'y a pas encore de règles claires pour les déterminer. Dans la plupart des applications,  $\Psi = 1$  pour l'ensemble des variables, et  $\varphi_i$  peut être choisi de la forme :

$$\varphi_i(h, g_i) = \frac{1 - e^{-g_i h}}{g_i}, \text{ avec } g_i = \max \left( \left| \frac{\partial f_i}{\partial u_i} \right|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}_j} \right). \quad (2)$$

Les coefficients  $g_i$  sont déterminées pour les  $\mathbf{u}_j$  désignant les coordonnées du  $j^{\text{ème}}$  point singulier du système continu. Ces maxima correspondent aux échelles de temps les plus rapides du système. Utilisant ces propriétés, Mickens a énoncé un théorème qui spécifie que les équations discrètes ont des points singuliers avec les mêmes propriétés de stabilité que ceux des équations différentielles pour tout  $h > 0$  [4].

Utilisant les recommandations de Mickens, nous utilisons les changements de coordonnées suivants :

- première équation:  $(x_k, y_k, z_k) \mapsto (x_k, y_k, z_k)$
- deuxième équation:  $(x_k, y_k, z_k) \mapsto (x_{k+1}, y_k, z_k)$
- troisième équation:  $(x_k, y_k, z_k) \mapsto (x_{k+1}, y_{k+1}, z_k)$ .

Ce choix a l'avantage de préserver la forme polynomiale du modèle discret. La nonlinéarité  $xz$  de la deuxième équation du système de Lorenz est remplacée par le terme “non local”  $x_{k+1}z_k$ . Par exemple, la deuxième équation du système de Lorenz

$$\dot{y} = Rx - y - xz \quad (3)$$

est transformée en

$$\frac{y_{k+1} - \Psi_2 y_k}{\varphi_2} = Rx_k - y_k - x_{k+1}z_k \quad (4)$$

Nous avons ainsi

$$y_{k+1} = \varphi_2 Rx_k + (\Psi_2 - \varphi_2)y_k - x_{k+1}z_k \quad (5)$$

Comme suggéré par Mickens,  $\Psi_2 = 1$  et  $\varphi_2 = \frac{1-e^{-g_2 h}}{g_2}$  où  $g_2 = |-1| = 1$ . Ainsi, nous avons pour le système complet :

$$\begin{cases} x_{k+1} = (1 - \varphi_1 \sigma)x_k + \varphi_1 \sigma y_k \\ y_{k+1} = \varphi_2 Rx_{k+1} + (1 - \varphi_2)y_k - \varphi_2 x_{k+1}z_k \\ z_{k+1} = (1 - \varphi_3 b)z_k + \varphi_3 x_{k+1}y_{k+1} \end{cases} \text{ avec } \begin{cases} \varphi_1 = \frac{1-e^{-\sigma h}}{\sigma} \\ \varphi_2 = 1 - e^{-h} \\ \varphi_3 = \frac{1-e^{-bh}}{b} \end{cases} \quad (6)$$

Ceci signifie que  $g_1 = \sigma$ ,  $g_2 = 1$  et  $g_3 = b$ , c'est-à-dire les trois éléments de la matrice Jacobienne du système de Lorenz.

Le modèle discret (6) du système de Lorenz est itéré avec  $(R, \sigma, b) = (28, 10, 8/3)$ . Lorsque le pas de temps est très petit, disons  $h = 0.002$  s, le portrait de phase est l'attracteur de Lorenz habituel. Le pas de temps est alors augmenté jusqu'à la valeur maximale pour laquelle le comportement est encore oscillant. Pour des pas de temps plus grands que 0.071 s, la trajectoire est éjectée à l'infini. Un diagramme de bifurcation en fonction de  $h$  est calculé (Fig. 1). Notons que pour les valeurs de  $h$  jusqu'à 0.04 s, la section de Poincaré

varie peu, confirmant que la discrétisation (6) est plutôt robuste face aux variations du pas de temps  $h$ . L'attracteur obtenu avec cette valeur du pas de temps est encore très proche de celui habituellement obtenu. Notons qu'une augmentation du pas de temps correspond *grosso-modo* à une augmentation du paramètre  $R$  du système de Lorenz (réduire  $R$  de 28 à 17 permet de contre-balancer l'augmentation de  $h$  à 0.04 s). Un spectre de Fourier calculé

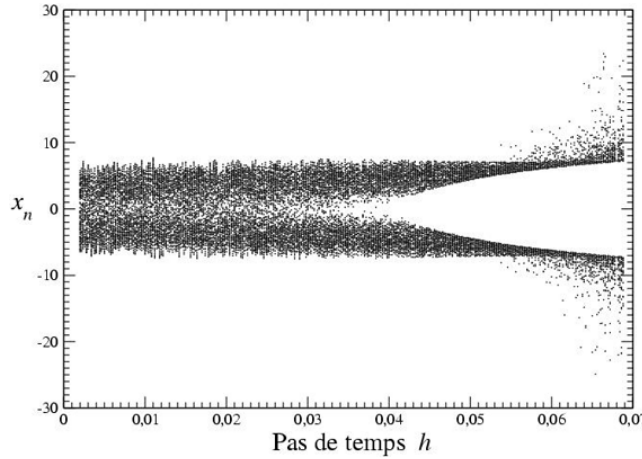


FIG. 1 – Diagramme de bifurcations de la discrétisation (6) du système de Lorenz avec  $(R, \sigma, b) = (28, 10, 8/3)$ .

à partir de la variable  $z$  du système de Lorenz révèle des fréquences jusqu'à  $f_{\max}=12.5$  Hz. Selon le critère de Nyquist, toute l'information requise pour une description correcte de la dynamique peut être récupérée tant que le pas de l'échantillonnage est plus petit que  $T_N = \frac{1}{2f_{\max}} \approx 0.040$  s. C'est exactement la valeur pour laquelle l'attracteur solution de la discrétisation (6) ne correspond plus exactement à une solution pouvant être observée sur le système de Lorenz original, même avec modifications de ses paramètres. En effet, les réinjections d'une "aile" à l'autre (Fig. 2) ne suivent plus exactement les solutions du système original. En fait, seulement des portions bien définies de l'espace des phases sont déformées sous l'effet du pas de temps. Ceci résulte de la grande plage de vitesses qui peuvent être observées au sein de l'espace des phases du système de Lorenz. Par exemple, autour du point singulier de type col — situé à l'origine — les dérivées sont plutôt petites et, même pour des pas de temps  $h \approx 0.071$  s, l'attracteur est encore décrit de manière plutôt lisse (Fig. 2). Cependant lorsque la trajectoire visite la variété stable de l'un des points singuliers col-foyer, la trajectoire à l'allure d'une ligne brisée, signature de vitesse beaucoup plus importante. Ainsi, la topologie de l'attracteur est affectée dans une région bien définie du portrait de phase, tandis qu'ailleurs la dynamique est préservée. Les instabilités numériques résultent par conséquent d'un manque local de définition de la dynamique. Un tel phénomène n'a pas été identifié au sein des deux systèmes précédemment étudiés [3, 5] pour lesquels la dynamique est plus homogène.

## 2 Schéma de Monaco et Normand-Cyrot

Considérons un système dynamique  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  où  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur constitué des variables dynamiques et  $\mathbf{f}$  les fonctions définissant le champ de vecteurs. L'objectif est d'obtenir une discrétisation de ce système à l'aide du schéma introduit par Monaco et

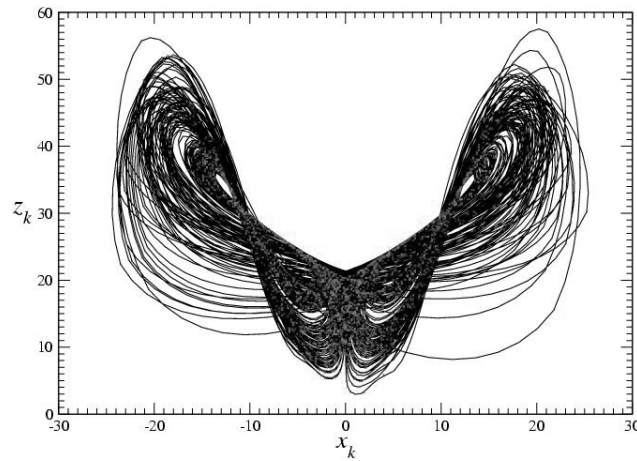


FIG. 2 – *Attracteur chaotique solution de la discrétisation du système de Lorenz à l'aide du schéma non standard de Mickens avec  $(R, \sigma, b) = (28, 10, 8/3)$ . Le pas de temps est  $h = 0.071$  s. Les données sont interpolées de manière à avoir une meilleure représentation de la structure topologique de la dynamique.*

Normand-Cyrot sur la base d'un développement de Lie des équations comme suit :

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \sum_{n=1}^{\eta} \frac{h^n}{n!} \mathcal{L}_{\mathbf{f}}^n(\mathbf{x}_k) \quad (7)$$

où  $\eta$  est l'ordre du développement. Les dérivées de Lie sont données par

$$\mathcal{L}_{\mathbf{f}}^n(\mathbf{x}_k) = \mathcal{L}_{\mathbf{f}}\left(\mathcal{L}_{\mathbf{f}}^{n-1}(\mathbf{x}_k)\right) \quad (8)$$

Lorsque la série est tronquée au premier ordre, la discrétisation est celle qui peut être obtenue à l'aide d'un schéma d'Euler. La discrétisation au second ordre du système de Lorenz s'écrit :

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + h(-\sigma x_k + \sigma y_k) + \frac{h^2}{2} [-\sigma^2(y - x) + \sigma(x(R - z) - y)] \\ y_{k+1} = y_k + h(Rx_k - y_k - x_k z_k) + \frac{h^2}{2} [(R - z)(\sigma y - x(\sigma + 1)) + y - x(xy - bz)] \\ z_{k+1} = z_k + h(x_k y_k - bz_k) + \frac{h^2}{2} [-(\sigma + 1 + b)xy + x^2(R - z) + \sigma y^2 + b^2 z] \end{cases}$$

Cette discrétisation peut être itérée avec un pas de temps jusqu'à  $h = 0.064$  s. Pour cette valeur, l'attracteur chaotique n'est plus équivalent à l'attracteur de Lorenz original [7] (Fig. 3). Des instabilités numériques apparaissent déjà. Utiliser la discrétisation du troisième ordre permet d'augmenter le pas de temps jusqu'à 0.083 s, ce qui correspond environ à deux fois le temps associé au critère de Nyquist. Au delà de  $h = 0.083$  s, le comportement asymptotique s'installe sur l'un des points singuliers nœud-foyer stable. Ceci signifie que cette valeur du pas de temps induit un déplacement en un point de l'espace des paramètres où la bifurcation de Hopf sous-critique n'a pas encore déstabilisé les points singuliers. Pour  $h = 0.065$  s, qui correspond à une valeur supérieure au temps associé



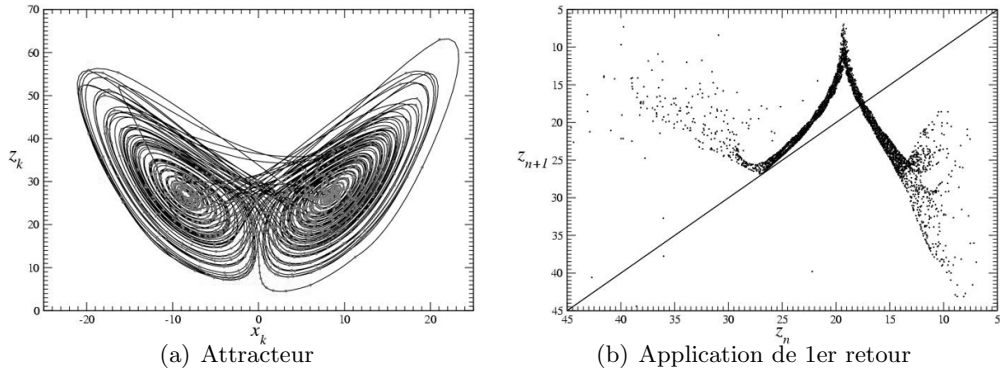


FIG. 3 – Comportement chaotique solution de la discrétisation du second ordre construite à l'aide du schéma de Monaco et Normand-Cyrot's avec  $(R, \sigma, b) = (28, 10, 8/3)$ . Le pas de discrétisation est  $h = 0.064$  s. Les données sont interpolées.

au critère de Nyquist, l'attracteur chaotique ressemble toujours à l'attracteur de Lorenz habituel (Fig. 4a). Ceci semble en contradiction avec notre conjecture concernant l'apparition des instabilités numérique au delà du critère de Nyquist. Toutefois, une application de premier retour (Fig. 4b) révèle une structure fallacieuse qui se superpose à la structure de l'application de Lorenz habituelle. Néanmoins, l'utilisation de la discrétisation du troisième ordre permet de réduire les effets des instabilités numériques (comparées à celles observées sur la discrétisation du deuxième ordre, Fig. 3). Utiliser des discrétisation d'ordre

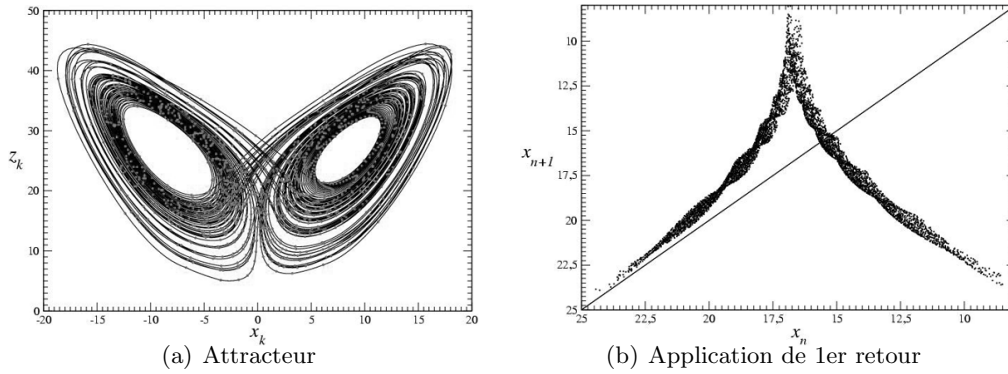


FIG. 4 – Comportement chaotique solution de la discrétisation du troisième ordre construite à l'aide du schéma de Monaco et Normand-Cyrot's avec  $(R, \sigma, b) = (28, 10, 8/3)$ . Le pas de discrétisation est  $h = 0.065$  s. Les données sont interpolées.

supérieur aide à améliorer la plage sur laquelle le pas de temps peut être varié. Dans le cas de la discrétisation du quatrième ordre, le pas de temps peut être augmenté jusqu'à  $h = 0.102$  s. L'attracteur observé pour  $h = 0.065$  s ne présente aucune différence avec celui obtenu avec la discrétisation du troisième ordre. Lorsque le pas de temps est augmenté au delà de cette valeur, un comportement chaotique est encore observé et non le point singulier nœud-foyer stable comme pour la discrétisation du troisième ordre. Toutefois, la structure topologique est déformée de manière plutôt évidente [7]. Comme cela était observé pour les discrétisations d'ordre inférieur, lorsque le pas de temps est plus grand que le temps associé au critère de Nyquist, la dynamique de la discrétisation présente des

propriétés fallacieuses. Pour la valeur  $h = 0.102$  s, un tore bouclant sept fois sur lui-même peut être observé. Ce comportement n'est assurément jamais observé sur le système de Lorenz.

### 3 Conclusion

Plusieurs discrétisation du système de Lorenz ont été proposées. Les équations obtenues avec le schéma non standard de Mickens ont une structure algébriques qui n'est pas très compliquée. Elles fournissent des solutions du système original (modulo un déplacement dans l'espace des paramètres) lorsque le pas de temps reste inférieur au temps associé au critère de Nyquist. Néanmoins, le déplacement dans l'espace des paramètres est relativement sensible à la valeur du pas de temps.

La discrétisation du premier ordre construite à l'aide du schéma non standard de Monaco et Normand-Cyrot correspond au schéma d'Euler et n'est pas très robuste face à une augmentation du pas de temps. La plus grande valeur permettant une intégration est très inférieure au temps associé au critère de Nyquist. La discrétisation du deuxième ordre permet d'atteindre cette valeur seuil mais des instabilités numériques affectent de manière significative le portrait de phase. La discrétisation du troisième ordre améliore la robustesse face à une augmentation du pas de temps : elle semble le meilleur compromis. La discrétisation du quatrième ordre n'apporte aucune amélioration significative dans la mesure où les différences sont observées dans la plage réservées aux instabilités numériques.

### Références

- [1] G. Gouesbet & C. Letellier, *Global vector field reconstruction by using a multivariate polynomial  $L_2$ -approximation on nets*, Phys. Rev. E, **49** (6), 4955-4972 (1994).
- [2] S. A. Billings, S. Chen & J. M. Korenberg, *Identification of MIMO nonlinear systems using a forward-regression orthogonal estimation*, Int. J. Contr., **49** (6), 2157-2189 (1989).
- [3] C. Letellier, S. Elaydi, L. A. Aguirre & Aziz Alaoui, *Difference equations versus differential equations, a possible equivalence for the Rössler system?* Physica D, à paraître.
- [4] R. E. Mickens, *Nonstandard finite difference models of differential equations*, World Scientific (1994).
- [5] E. A. Mendes & C. Letellier, *Displacement in the parameter space versus spurious solution of discretization with large time step*, J. Phys. A, to be published.
- [6] R. E. Mickens, *Nonstandard finite difference schemes for differential equations*, J. Diff. Equ. Appl., **8** (9), 823-947 (2002).
- [7] C. Letellier & E. A. Mendes, *Robust discretizations versus increase of the time step for the Lorenz system*, Chaos, à paraître.

## Analyse de séries temporelles produites par des lasers en régime chaotique

A. Locquet, L. Larger, X. Bavard et J.-P. Goedgebuer

*Georgia Tech Lorraine-CNRS Telecom, UMR CNRS 6603, 2-3 rue Marconi  
57070 Metz, France  
alocquet@georgiatech-metz.fr*

### Résumé

Nous analysons les séries temporelles produites par un laser chaotique muni d'une rétroaction optoélectronique retardée. Nous montrons que ce système peut produire un chaos de très grande dimension.

## 1 Introduction

Les travaux fondateurs de Pecora et Carroll [1] ont montré que la synchronisation d'oscillateurs pouvait être étendue aux systèmes chaotiques. Cette découverte a ouvert la voie aux recherches sur les communications chaotiques. Dans ce type de système de communication, l'émetteur et le récepteur sont deux systèmes chaotiques synchronisés. Une des principales applications de la synchronisation du chaos est le masquage d'information. On exploite l'apparence aléatoire du chaos pour cacher une information utile, et la propriété de synchronisation pour récupérer cette information au récepteur [2].

Les systèmes chaotiques à délai sont particulièrement prometteurs à cause de la grande complexité de leur dynamique. Une grande complexité du chaos est une condition nécessaire à un masquage chaotique efficace. Bien que des études théoriques prédisent que les systèmes à délai peuvent présenter des chaos de grande dimension [3, 7], peu de travaux ont, à notre connaissance, abordé la détermination expérimentale de la dimension dans le cas de systèmes très hyperchaotiques. Nous avons procédé à l'étude de la dimension du chaos produit par des systèmes chaotiques à délai, utilisés pour du cryptage chaotique, à partir de la seule connaissance de séries temporelles expérimentales. Dans le cas de systèmes de très grande dimension, les techniques classiques d'analyse de séries temporelles ne sont pas applicables à cause des temps de calcul irréalistes qu'elles nécessiteraient. C'est pourquoi nous avons utilisé une technique spécifique des systèmes à délai qui permet d'éviter de recourir à un plongement complet de l'espace des phases. Malgré la très grande dimensionnalité du chaos étudié, nous réalisons une grande partie des calculs dans un espace de faible dimension.

Nous montrons expérimentalement que la dimension du chaos produit par l'émetteur chaotique à délai utilisé dans [2] est très élevée (nous pouvons facilement obtenir des dimensions de l'ordre de plusieurs centaines). De plus, nous montrons que le mode d'évolution de la dimension en fonction de la force de la rétroaction utilisée dans cet émetteur est en accord avec les prédictions théoriques.

## 2 Systèmes chaotiques à délai

Les systèmes chaotiques à délai ont suscité un grand intérêt dans la communauté scientifique à cause de la grande complexité des dynamiques qu'ils produisent. Un des premiers systèmes étudiés a été celui de Mackey et Glass [4] qui modélise la production de globules rouges. Un exemple célèbre dans le monde de l'optique est le système d'Ikeda [5] qui est constitué par une cavité optique en anneau contenant un diélectrique non-linéaire. Ces systèmes peuvent en général être modélisés par un système d'équations différentielles non-linéaires à retard:

$$\frac{dx(t)}{dt} = F(x(t), x(t - \tau)) , \quad (1)$$

où  $x$  est un vecteur,  $F$  une fonction vectorielle non linéaire et  $\tau$  un retard temporel. Ce type de système dynamique possède un espace des phases de dimension infinie. Ceci peut se comprendre en remarquant que l'intégration de l'équation (1) requiert de préciser la valeur de  $x$  sur un intervalle temporel de longueur  $\tau$ . Goedgebuer, Larger et Porte [2] ont proposé d'utiliser un système optoélectronique à délai dans le contexte d'une communication chaotique sécurisée. L'émetteur est une diode laser DBR soumise à une rétroaction sur l'électrode de commande de la fréquence. La non-linéarité est réalisée dans le domaine de l'optique par une lame biréfringente placée entre deux polariseurs croisés. Etant donné que le signal utile est masqué par le chaos généré par l'émetteur, une condition nécessaire pour un cryptage efficace de l'information est une grande complexité du chaos généré par l'émetteur. Un concept particulièrement utile pour quantifier cette dimension est celui de spectre de Lyapunov. L'existence d'un seul exposant de Lyapunov positif suffit à qualifier un système de chaotique. Il existe aussi des systèmes dits hyperchaotiques qui possèdent au moins deux exposants positifs. Comme les systèmes à délai possèdent un espace des phases de dimension infinie, ils ont le potentiel pour présenter un grand nombre d'exposants de Lyapunov positifs. Farmer [3] a prédit théoriquement cette grande dimensionnalité des systèmes à délai ainsi que la variation la dimension avec certains paramètres caractéristiques. Nous nous proposons de vérifier expérimentalement certaines de ces prédictions, en utilisant des séries temporelles produites par le système décrit dans la référence [2].

## 3 Spectre de Lyapunov

Un des objectifs principaux de notre travail est de déterminer le spectre de Lyapunov à partir de séries temporelles expérimentales produites par un émetteur chaotique à délai. Le spectre de Lyapunov [6] correspond à l'ensemble des taux moyens de contraction ou d'étirement de petites perturbations dans les différentes directions de l'espace des phases. Dans le cas d'un espace des phases de dimension  $N$ , le spectre de Lyapunov sera noté  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N\}$ , où  $\lambda_i$  représente un exposant de Lyapunov. Ces exposants sont rangés par ordre décroissant, c'est-à-dire que

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N . \quad (2)$$

Le spectre de Lyapunov est particulièrement intéressant parce que sa connaissance nous permet aussi de déterminer une dimension de l'attracteur ainsi que l'entropie du signal

chaotique. La dimension  $D$ , dite de Lyapunov, est donnée par la formule suivante:

$$D = k + \frac{\sum_{i=1}^k \lambda_i}{|\lambda_{k+1}|} , \quad (3)$$

où  $\sum_{i=1}^k \lambda_i \geq 0$  et  $\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i \leq 0$ . L'entropie  $S$  de Kolmogorov-Sinai est donnée par l'identité de Pesin:

$$S = \sum_{i|\lambda_i > 0} \lambda_i . \quad (4)$$

## 4 Analyse de séries temporelles

### 4.1 Spécificité des systèmes à délai

En général, l'analyse de séries temporelles commence par un plongement de l'espace des phases. L'objectif de cette opération est de reconstruire l'espace des phases à partir de la mesure d'une partie seulement des variables de cet espace. La technique de reconstruction la plus utilisée est la méthode des délais qui associe à une variable mesurée  $x(t)$ , le vecteur des variables retardées  $(x(t), x(t - \delta), x(t - 2\delta), \dots, x(t - m\delta))$ , où  $\delta$  représente un décalage temporel convenablement choisi. Le nombre  $m$  de variables retardées croît avec la dimension de l'attracteur du système étudié.

Notre étude consiste à analyser des séries temporelles produites par des systèmes à délai de grande dimension. L'application directe de la reconstruction de l'espace des phases par la méthode des délais conduirait à travailler dans un espace reconstitué de très grande dimension (par exemple dimension de l'ordre de plusieurs centaines). Les temps de calcul correspondants seraient prohibitifs. C'est pour cette raison qu'ont été développées des techniques d'analyse spécifiques aux systèmes à délai [8, 9, 10, 11].

### 4.2 Modèle dynamique du système chaotique étudié

Les séries temporelles que nous avons étudiées correspondent à du chaos en fréquence produit par un laser DBR [2] dont le comportement peut être décrit par l'équation différentielle à délai suivante:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{\beta}{T} \sin^2[x(t - \tau)] - \frac{x(t)}{T} , \quad (5)$$

où  $x$  est la longueur d'onde du laser,  $T$  le temps de réponse du système,  $\tau$  le délai et  $\beta$  la force de la non linéarité. L'idée maîtresse des méthodes d'analyse des séries temporelles produites par des systèmes à délai part du constat suivant: bien que l'espace des phases soit de dimension infinie, la projection d'une trajectoire de l'espace des phases sur l'espace tridimensionnel  $(dx(t)/dt, x(t), x(t - \tau))$  réside sur une variété d'ordre 2. C'est en travaillant dans cet espace de faible dimension que l'on va pouvoir analyser des séries temporelles même de très grande dimension. Remarquons qu'en pratique on ne dispose que d'une suite de valeurs  $(x_i)$  qui correspond aux valeurs de  $x(t)$  aux différents instants de mesure. L'espace discret tridimensionnel dans lequel nous allons travailler est  $(x_{i+1}, x_i, x_{i-\tau})$ . Remarquons que nous utilisons la lettre  $\tau$  pour représenter à la fois la valeur du délai et l'indice correspondant à ce délai.

### 4.3 Analyse de séries temporelles expérimentales

Dans cette partie, nous allons décrire brièvement quelques principes d'analyse des systèmes chaotiques à délai. A partir de la série expérimentale  $(x_i)$ , et étant donné la forme de l'équation (5), on peut réaliser l'approximation linéaire locale:

$$x_{i+1} = a_i + b_i x_i + c_i x_{i-\tau^*} , \quad (6)$$

où  $\tau^*$  correspond à un retard temporel. Il est clair que l'équation (5) ne définit une contrainte entre  $x_{i+1}$ ,  $x_i$  et  $x_{i-\tau}$  que dans le cas où  $\tau^* = \tau$ , et que l'approximation n'est justifiée que dans ce cas. De plus, rappelons que la valeur du délai  $\tau$  est supposée inconnue puisque l'on ne connaît que la série temporelle. Cependant, l'approximation linéaire locale définie en (6) nous donne aussi une façon de déterminer le délai  $\tau$ . En effet, la valeur correcte du délai correspond à un minimum de l'erreur d'approximation en fonction de  $\tau^*$ . La figure 1 représente cette erreur d'approximation, relative à la totalité d'une série temporelle produite par le générateur de chaos en longueur d'onde, pour un délai  $\tau = 522 \mu\text{s}$ . On remarque un minimum très marqué pour une valeur de  $\tau^*$  égale à  $\tau$ .

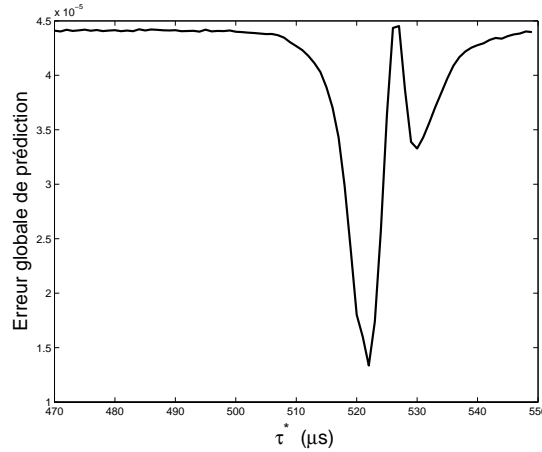


FIG. 1 – Evolution de l'erreur de prédiction globale en fonction de  $\tau^*$

L'approximation linéaire locale donnée par l'équation (6) nous permet aussi de déterminer le spectre de Lyapunov. Par souci de brièveté, nous n'allons donner que quelques éléments de la procédure de détermination des exposants de Lyapunov. Nous renvoyons le lecteur à la référence [6] pour plus de détails. L'élément le plus crucial du calcul des exposants de Lyapunov est la détermination, en tout point de l'espace des phases, de la matrice jacobienne de l'application qui associe, à un vecteur de l'espace des phases à un temps donné, un vecteur de cet espace à un temps ultérieur. Ceci correspond à la recherche, en tout point de la trajectoire, de la matrice jacobienne de l'application suivante:

$$\phi_i : z_i = (x_i, x_{i-1}, \dots, x_{i-\tau}) \mapsto z_{i+1} = (x_{i+1}, x_i, \dots, x_{i-\tau+1}) . \quad (7)$$

On trouve aisément que les éléments de la  $i^{eme}$  matrice jacobienne sont donnés par

$$J_{kl}^i = \left( \frac{\partial z_{i+1}}{\partial z_i} \right)_{kl} = \begin{cases} \frac{dx_{i+1}}{dz_l} & \text{si } k = 1 \\ \delta_{k,l+1} & \text{si } k > 1 \end{cases} . \quad (8)$$

Les éléments de la matrice peuvent s'obtenir à partir des approximations linéaires locales définies par l'équation (6). Une fois les matrices jacobienues connues, on peut calculer le spectre de Lyapunov en utilisant les méthodes standard définies dans la littérature [6]. La dimension de Lyapunov s'obtient ensuite aisément de la manière décrite dans le chapitre 3. La courbe en tirets de la figure 2 représente le résultat du calcul de la dimension à partir

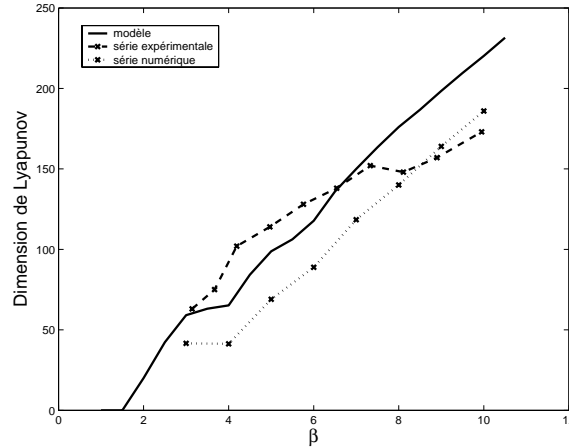


FIG. 2 – Dimension de Lyapunov en fonction de la force de la non-linéarité  $\beta$ . Trait plein: à partir du modèle, trait pointillé: à partir d'une série temporelle générée numériquement, trait plein interrompu: à partir d'une série temporelle expérimentale

de séries temporelles expérimentales, pour différentes valeurs de  $\beta$ . Pour valider nos résultats, nous avons aussi représenté sur la même figure le résultat de deux autres calculs de dimension. La courbe en pointillés correspond à l'application des techniques décrites dans cet article à des séries temporelles générées numériquement. La courbe en trait plein représente la dimension calculée à partir du modèle dynamique du système (equation 5), en procédant de la façon décrite par Farmer [3]. Les trois courbes ne coïncident pas parfaitement mais on peut tout de même constater une tendance à la variation linéaire de la dimension avec le paramètre  $\beta$ , comme cela a été prévu dans la référence [7]. Les raisons des écarts entre les trois courbes de la figure 2 sont en cours d'étude. On peut citer l'imperfection du modèle dynamique, la présence de bruit dans le système expérimental et la difficulté de déterminer les valeurs exactes des paramètres du modèle qui correspondent aux conditions expérimentales. Enfin, l'examen de la figure 2 nous permet aussi de conclure que le cryptosystème étudié permet bien de produire un chaos de très grande dimensionnalité.

## 5 Conclusion

Nous avons procédé à l'analyse de séries temporelles produites par un générateur optoélectronique de chaos en longueur d'onde. Nous avons pu déterminer des valeurs de dimension du chaos généré en bon accord avec les prédictions théoriques. Nous avons aussi pu vérifier, à partir de données expérimentales, que nous pouvons aisément générer un chaos de très grande dimensionnalité, ce qui est de bonne augure pour le niveau de sécurité des communications chaotiques utilisant ce type de générateur.

## Références

- [1] L. M. Pecora and T. L. Carroll, *Synchronization in chaotic systems*, Phys. Rev. Lett., **64**, 821 (1990).
- [2] J. P. Goedgebuer, L. Larger, and H. Porte, *Optical cryptosystem based on synchronization of hyperchaos generated by a delayed feedback tunable laser diode*, Phys. Rev. Lett., **80**, 2249 (1998).
- [3] J. D. Farmer, *Chaotic attractors of an infinite-dimensional dynamical system*, Physica D, **4**, 366 (1982).
- [4] M. C. Mackey and L. Glass, *Oscillation and chaos in physiological control systems*, Science, **197**, 287 (1977).
- [5] K. Ikeda, K. Matsumoto, *High-dimensional chaotic behavior in systems with time delay feedback*, Physica D, **29**, 223 (1987).
- [6] H. Kantz and T. Schreiber, *Nonlinear time series analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, (1997) .
- [7] B. Dorizzi, B. Grammaticos, M. Le Berre, Y. Pomeau, *Statistics and dimension of chaos in delay differential equations*, Phys. Rev. A, **35**, 328 (1987).
- [8] M. J. Bunner, M. Popp, Th. Meyer, A. Kittel and J. Parisi, *Tool to recover scalar time-delay systems from experimental time series*, Phys. Rev. E, **54**, 3082 (1996).
- [9] R. Hegger, M. J. Bunner, H. Kantz, A. Giaquinta, *Identifying and modeling delay feedback systems*, Phys. Rev. Lett., **81**, 558 (1998).
- [10] M. J. Bunner, M. Ciofini, A. Giaquinta, R. Hegger, H. Kantz, R. Meucci, and A. Politi, *Reconstruction of systems with delayed feedback I. Theory*, The European Physical Journal D, **10**, 165 (2000)
- [11] M. J. Bunner, M. Ciofini, A. Giaquinta, R. Hegger, H. Kantz, R. Meucci, and A. Politi, *Reconstruction of systems with delayed feedback II. Applications*, The European Physical Journal D, **10**, 177 (2000)



## Modélisation de l'impact d'un vaccin vivant atténué sur la dynamique de la transmission du virus de l'immunodéficience humaine.

Jean-Marc Malasoma et Marie-Aurélié Boiron  
*Laboratoire Géomatériaux, DGCB URA CNRS 1652*  
*ENTPE, 69518 Vaulx-en-Velin CEDEX*  
malasoma@entpe.fr

### Résumé

Nous proposons une étude analytique rigoureuse d'un modèle décrivant la dynamique de la transmission du VIH au sein d'une population constituée de cinq groupes d'individus dont certains ont reçu un vaccin vivant atténué. Nous démontrons l'existence de deux types d'équilibres de populations. Le premier équilibre, qui existe toujours, ne met en jeu que des populations susceptibles d'être contaminées, ou bien contaminées par le virus vivant atténué mais pas par le virus sauvage. L'autre type d'équilibre, au contraire, met en jeu des populations contaminées par le virus sauvage. Nous montrons que ce second type d'équilibre de populations, ne peut exister que lorsque les paramètres du système vérifient certaines conditions, que nous établissons analytiquement. Nous proposons également une étude analytique, complétée par des résultats de simulations numériques, de la stabilité de ces équilibres lorsque l'on fait varier certains paramètres du modèle en particulier celui lié à la vaccination.

## 1 Introduction

Dès l'identification du virus de l'immunodéficience humaine (VIH) en 1983, certains prédisaient qu'un vaccin serait mis au point rapidement, mais cette quête s'est révélée beaucoup plus difficile que prévu. La plupart des vaccins antiviraux efficaces sont des vaccins vivants atténués. Dans le cas du VIH, l'instabilité génétique du virus et sa persistance après la primo-infection chez la presque totalité des sujets séropositifs fait de la vaccination un problème très difficile.

En raison du nombre croissant de vaccins anti-VIH préventifs testés depuis 1987, un certain nombre de modèles mathématiques déterministes ont été développés afin d'évaluer l'impact de ces vaccins anti-VIH sur la transmission du virus.

## 2 Le modèle de Blower et Al.

Dans cet article, nous proposons une étude analytique rigoureuse du modèle développé par Blower et ses collaborateurs en 2001. Il décrit la dynamique de la transmission du VIH au sein d'une population constituée de cinq groupes d'individus dont certains ont reçu un vaccin vivant atténué. Ces cinq groupes sont constitués respectivement d'individus :

- non vaccinés, susceptibles d'être contaminés par le VIH
- non vaccinés, contaminés par le VIH sauvage

- vaccinés donc contaminés par le virus atténué du vaccin mais non contaminés par le virus sauvage
- contaminés doublement par le virus sauvage et celui atténué du vaccin
- ayant le SIDA

Il s'agit d'un modèle déterministe, constitué de cinq équations différentielles non linéaires

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{X} & = & (1-p)\Pi - \mu X - \frac{c\beta_v XY_v + c\beta_w X(Y_w + Y_{vw})}{X + Y_v + Y_w + Y_{vw}} & (1.a) \\ \dot{Y}_v & = & p\Pi - (\mu + \nu_v)Y_v + \frac{c\beta_v XY_v - (1-\psi)c\beta_w Y_v(Y_w + Y_{vw})}{X + Y_v + Y_w + Y_{vw}} & (1.b) \\ \dot{Y}_w & = & -(\mu + \nu_w)Y_w + \frac{c\beta_w X(Y_w + Y_{vw})}{X + Y_v + Y_w + Y_{vw}} & (1.c) \\ \dot{Y}_{vw} & = & -(\mu + \nu_{vw})Y_{vw} + \frac{c\beta_w(1-\psi)Y_v(Y_w + Y_{vw})}{X + Y_v + Y_w + Y_{vw}} & (1.d) \\ \dot{A} & = & \nu_v Y_v + \nu_w Y_w + \nu_{vw} Y_{vw} - A(\mu + \mu_A) & (1.e) \end{array} \right.$$

et mettant en jeu les paramètres suivants  $P = (\pi, p, \mu, c, \beta_v, \beta_w, \psi, \nu_v, \nu_w, \nu_{vw})$  :

Signification des paramètres		Domaine
$\pi$	Taux d'accroissement de la population saine	$0 < \pi < \infty$
$p$	Proportion d'individus vaccinés	$0 < p < 1$
$\mu$	Taux de cessation naturelle de l'activité sexuelle	$0 < \mu < 1$
$c$	Nombre de partenaires sexuels	$c \geq 4$
$\beta_v$	Taux de transmission du virus atténué (vaccin)	$0 < \beta_v < 1$
$\beta_w$	Taux de transmission du virus sauvage	$0 < \beta_w < 1$
$\psi$	Degré de protection contre le virus sauvage	$0 < \psi < 1$
$\nu_v$	Taux de mortalité due à l'infection par le virus atténué	$0 < \nu_v < 1$
$\nu_w$	Taux de mortalité due à l'infection par le virus sauvage	$0 < \nu_w < 1$
$\nu_{vw}$	Taux de mortalité due à une double infection	$0 < \nu_{vw} < 1$

### 3 Existence et stabilité d'équilibre de populations

Dans cette section, nous démontrons l'existence de deux types d'équilibre de populations. Commençons par remarquer que si un équilibre existe, alors les équations 1.a et 1.b, permettant de calculer cet équilibre, imposent des populations susceptibles d'être contaminées et des populations contaminées par le virus vivant atténué mais pas par le virus sauvage non nulles, c'est-à-dire que l'on a la relation  $X Y_v \neq 0$ . De plus, les équations 1.c et 1.d impliquent alors que les populations  $Y_w$  et  $Y_{vw}$  soient nulles ou différentes de zéro simultanément. Il en résulte qu'il ne peut exister que deux types d'équilibre :

- non contaminé par le VIH sauvage :  $E_0 = (X, Y_v, 0, 0, A)$
- contaminé par le VIH sauvage :  $E_w = (X, Y_v, Y_w, Y_{vw}, A)$  et  $Y_w Y_{vw} \neq 0$

Il est clair qu'avec l'équation 1.e nous obtenons évidemment la relation :

$$A = \frac{\nu_v Y_v + \nu_w Y_w + \nu_{vw} Y_{vw}}{\mu + \mu_A}$$

Il reste donc à déterminer les quatre variables positives  $X$ ,  $Y_v$ ,  $Y_w$  et  $Y_{vw}$ . Remarquons qu'en vertu de la relation précédente, la population  $A$  est automatiquement aussi positive.

### 3.1 Existence et stabilité de $E_0$

Commençons par considérer le cas d'un équilibre non contaminé par le VIH sauvage. Dans ces conditions,  $Y_w = Y_{vw} = 0$  et en additionnant 1.a et 1.b, on obtient :

$$Y_v = \frac{\Pi - \mu X}{\mu + \nu_v}$$

Notons que cette solution n'est acceptable que si  $X \leq \Pi/\mu$ .

En reportant l'expression de  $Y_v$  dans 1.a ou 1.b, on montre alors que  $X$  est solution de l'équation algébrique suivante :

$$\mu(c\beta_v - \nu_v)X^2 + \Pi[(1-p)\nu_v - \mu - c\beta_v]X + (1-p)\Pi^2 = 0 \quad (2)$$

Si  $\nu_v = c\beta_v$  alors  $X = \frac{(1-p)\Pi}{\mu + p\nu_v}$  par conséquent  $Y_v = \frac{p\Pi(\mu + \nu_v)}{(\mu + p\nu_v)^2}$  et ces deux variables sont bien positives.

Si au contraire,  $\nu_v \neq c\beta_v$ ,  $X$  est solution du trinôme du second degré écrit en 2. Son discriminant  $\Delta$  est lui-même un trinôme du second degré en  $c$  :

$$\Delta = \beta_v^2 \pi^2 c^2 + 2\pi^2 \beta_v (\nu_v p - \nu_v - \mu + 2\mu p)c + \pi^2 (-\nu_v + \nu_v p - \mu)^2$$

On montre que  $\Delta$  est toujours positif car son discriminant  $\delta$  est égal à  $\delta = 16p\pi^4 \mu \beta_v^2 (\mu + \nu_v)(p-1) < 0$ . Il en résulte que (2) admet toujours deux racines réelles  $X_-$  et  $X_+$ . Si  $c\beta_v < \nu_v$ , alors on montre que  $X_- < 0 < X_+ < \Pi/\mu$  et seule la solution  $X_+$  conduit à un équilibre du système. Si au contraire,  $c\beta_v > \nu_v$ , on montre que  $0 < X_- < \Pi/\mu < X_+$  et cette fois seule la solution  $X_-$  conduit à un équilibre du système.

Nous venons donc de prouver qu'il existe toujours, quelles que soient les valeurs des paramètres du modèle, un unique équilibre de populations sans contamination par le VIH sauvage. Il reste à en étudier la stabilité en fonction des paramètres du modèle.

Compte tenu de la relation  $Y_w = Y_{vw} = 0$ , la matrice jacobienne du système évaluée à l'équilibre possède la structure suivante :

$$J_0 = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} & J_{14} & 0 \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} & J_{24} & 0 \\ 0 & 0 & J_{33} & J_{34} & 0 \\ 0 & 0 & J_{43} & J_{44} & 0 \\ 0 & \nu_v & \nu_w & \nu_w & -(\mu + \mu_A) \end{pmatrix}$$

Cette matrice possède, par conséquent, toujours au moins une valeur propre négative  $\lambda_1 = -(\mu + \mu_A)$ . De plus, la structure triangulaire par blocs de la sous matrice principale d'ordre 4 implique que les quatre autres valeurs propres sont racines de deux polynômes de degré deux.

Le premier  $P_1(\lambda) = (J_{11} - \lambda)(J_{22} - \lambda) - J_{12}J_{21}$  admet un discriminant  $\delta_1$  qui après quelques manipulations algébriques prend la forme suivante :

$$\delta_1 = [c\beta_w(X + (\psi - 1)Y_v) - (\nu_w\nu_v)(X + Y_v)]^2 + 4c^2\beta_w^2(-\psi)XY_v$$

Ce discriminant étant clairement positif,  $P_1$  admet toujours deux racines réelles  $\lambda_2$  et  $\lambda_3$ .

Le second polynôme  $P_2(\lambda) = (J_{33} - \lambda)(J_{44} - \lambda) - J_{34}J_{43}$  admet un discriminant  $\delta_2$  qui, après quelques transformations, prend la forme :

$$\delta_2 = (c\beta_v - \nu_v)(X + Y_v)^2[c\beta_v(X - Y_v)^2 - \nu_v(X + Y_v)^2]$$

Le signe de ce déterminant n'est pas constant : si  $c\beta_v \leq \nu_v$  on montre facilement que  $\delta_2 > 0$  et par conséquent  $P_2$  admet deux racines réelles. Au contraire, si  $c\beta_v > \nu_v$ , les racines  $\lambda_4$  et  $\lambda_5$  de  $P_2$  peuvent être soit réelles soit complexes conjuguées l'une de l'autre.

Bien que l'on dispose des expressions analytiques des valeurs propres réelles  $\lambda_2$  et  $\lambda_3$  ainsi que des valeurs propres (en général complexes)  $\lambda_4$  et  $\lambda_5$ , l'étude de la stabilité de  $E_0$  en fonction des paramètres de contrôle du système est fort complexe. Des simulations numériques ont montré que cet équilibre pouvait aussi bien être asymptotiquement stable qu'instable.

### 3.2 Existence et stabilité de $E_w$

La détermination des équilibres avec contamination par le VIH sauvage c'est-à-dire avec  $Y_w Y_{vw} \neq 0$ , nécessite de mettre en oeuvre une démarche plus subtile. Afin de simplifier l'analyse, nous suposerons dans cet article, que l'on a la relation  $\nu_w = \nu_{vw}$  c'est-à-dire que les taux de mortalité par contamination par VIH sauvage seul ou par les VIH sauvage et affaibli sont les mêmes. Cette hypothèse simplificatrice permet un calcul analytique de ce deuxième type d'équilibre.

Commençons par introduire une variable intermédiaire positive

$$Z = Y_w + Y_{vw}$$

L'équation 1.d permet alors de calculer  $Y_{vw}$  en fonction de  $X$ ,  $Y_v$  et  $Z$  :

$$Y_{vw} = \frac{c\beta_w(1 - \psi)ZY_v}{(\mu + \nu_w)(X + Z + Y_v)}$$

Compte tenu de ce résultat et de l'équation obtenue en sommant 1.a, 1.b, 1.c et 1.d, l'expression de  $Z$  en fonction de  $X$  et  $Y_v$  est la suivante :

$$Z = \frac{\Pi - \mu X - (\mu + \nu_v)Y_v}{\mu + \nu_w}$$

Il reste à déterminer les expressions de  $X$  et  $Y_v$ . Ces deux variables sont solutions de 1.a et de l'équation résultant de la somme de 1.c et 1.d. Cette dernière s'écrit :

$$\Pi + (-c\beta_w + \nu_w)X + (\nu_w - \nu_v - c\beta_w(1 - \psi))Y_v = 0 \quad (3)$$

Plusieurs cas sont alors à envisager.

- $\nu_w - \nu_v - c\beta_w(1 - \psi) = 0$

Si  $c\beta_w - \nu_w = 0$  alors le point fixe recherché ici n'existe pas.

Si  $c\beta_w - \nu_w \neq 0$  nous calculons  $X$  de la façon suivante :

$$X = \frac{\Pi}{\beta_w c\psi - \nu_v}$$

Après substitution de cette expression dans l'équation 1.a,  $Y_v$  doit vérifier l'égalité suivante :

$$A_{Y_v} Y_v = \Pi p \beta_w$$

où

$$A_{Y_v} = \beta_w (c \beta_w \psi (1 - \psi) (1 - p) + \psi (\mu + \nu_v) + p \nu_v (1 - \psi)) - \beta_v (\mu + d + c \beta_w (1 - \psi))$$

Si  $A_{Y_v} = 0$  alors il n'y a pas de point fixe.

Sinon  $Y_v$  se calcule de la façon suivante :

$$Y_v = \frac{\Pi p \beta_w}{A_{Y_v}}$$

Remarquons ici que les grandeurs  $X$ ,  $Y_v$ ,  $Y_w$  et  $Y_{vw}$  sont positives puisque ce sont des populations. Ainsi pour qu'un tel équilibre soit admissible biologiquement, il faudra nécessairement imposer  $\beta_w c \psi - \nu_v > 0$  et  $A_{Y_v} > 0$ . Cette dernière condition se traduit par l'inégalité suivante :

$$\beta_v < \frac{\beta_w (c \beta_w \psi (1 - \psi) (1 - p) + \psi (\mu + \nu_v) + p \nu_v (1 - \psi))}{(\mu + d + c \beta_w (1 - \psi))}$$

A l'aide de simulations numériques, nous montrons qu'il est possible de choisir des valeurs pour les huit paramètres encore libres de façon à satisfaire les deux conditions ci dessus et conduisant à un équilibre dont les composantes sont toutes positives.

- $\nu_w - \nu_v - c \beta_w (1 - \psi) \neq 0$

Dans ce cas, à partir de 3 nous exprimons  $Y_v$  en fonction de  $X$  par la relation :

$$Y_v = \frac{\Pi + (\nu_w - c \beta_w) X}{\nu_v - \nu_w + c \beta_w (1 - \psi)} \quad (4)$$

La substitution de cette expression dans l'équation 1.a permet d'établir que  $X$  est solution d'un trinôme du second degré :

$$A_P X^2 + B_P X + C_P = 0$$

Afin d'étudier le nombre de solutions  $X$  et leur signe, nous calculons le discriminant  $\Delta_w$  qui est lui même un trinôme du second degré en  $c$  :  $\Delta_w = \beta_w^4 (1 - \psi)^2 c^2 + B_w c + C_w$  avec un coefficient de  $c^2$  strictement positif.

Afin de connaître le signe de  $\Delta_w$ , nous écrivons le discriminant de ce trinôme du second degré en  $c$  :

$$\delta_w = 16p(1 - p)\Pi^4 \beta_w^4 (1 - \psi)^2 (\mu + \nu_w) (\beta_w \psi - \beta_v) [\beta_v (\mu + \nu_w) - \beta_w (\nu_v + \mu \psi)]$$

Remarquons alors que le signe de  $\delta_w$  n'est pas constant. Si  $\delta_w < 0$  alors  $\Delta_w > 0$  et il existe deux solutions  $X$ . Sinon  $\delta_w \geq 0$  implique que suivant les valeurs des paramètres,  $\Delta_w$  est tantôt positif tantôt négatif ce qui correspond à deux ou aucune solutions  $X$ .

Ici, les solutions  $X$  sont recherchées avec comme seule contrainte que les valeurs soient réelles. Il faut ensuite ajouter le fait que toutes les composantes du point fixe sont positives. Ainsi, suivant les valeurs choisies pour les paramètres du système, le nombre des points fixes de type  $E_w$  varie entre 0 et 2.

Nous utilisons la même méthode que dans la section 3.1 pour l'analyse de la stabilité : il s'agit d'évaluer la jacobienne au point d'équilibre puis d'étudier le signe de ses valeurs propres réelles et des parties réelles des valeurs propres complexes.

Deux formes de bifurcation en fonction d'un paramètre de contrôle ont été déterminées numériquement : dans un premier cas, deux points d'équilibre de type  $E_w$  naissent par noeud col : l'un est stable alors que le deuxième est instable. Ces deux points d'équilibre avec contamination coexistent avec un point d'équilibre sans contamination lui-même stable. Le deuxième type de bifurcation exhibé est une bifurcation transcritique : le point d'équilibre sans contamination initialement stable perd sa stabilité, dès lors apparaît un point d'équilibre avec contamination stable. Il faut remarquer que le point d'équilibre  $E_w$  est censé être instable avant la bifurcation mais dans le cas présent, il n'existe pas car une de ses composantes est négative. En revanche, le point d'équilibre est admissible et stable dès que toutes ses composantes sont positives.

## 4 Conclusions et Perspectives

Nous avons menée une étude analytique d'un modèle décrivant la dynamique de la transmission du VIH au sein d'une population constituée de cinq groupes. Cette étude montre l'existence, pour toutes les valeurs admissibles des paramètres, d'un équilibre de populations sans contamination par le virus sauvage. Cet équilibre peut être asymptotiquement stable mais aussi instable. Nous montrons également que suivant les valeurs choisies des paramètres, un autre type d'équilibre mettant en jeu cette fois des populations contaminées par le VIH sauvage peut exister et parfois même deux équilibres de ce dernier type existent. La stabilité de ces équilibres de populations lorsqu'ils existent, a été menée à l'aide de simulations numériques.

Le nombre élevé de paramètres confère une grande richesse au modèle. Il est légitime de se demander si des bifurcations fourches ou même de Hopf pourraient se produire en choisissant de manière adéquate les valeurs des paramètres. L'étude effectuée n'a porté que sur les positions d'équilibre, reste à examiner si des régimes périodiques peuvent exister en naissant soit par noeud-col, soit suite à une bifurcation de Hopf d'un point d'équilibre.

## Références

- [1] S. M. Blower, K. Koelle, D. Kirschner, J. Mills, *Live attenuated HIV vaccines: predicting the tradeoff between efficacy and safety*, Proc. Nat. Acad. Sci., **98**(6), 3618-3623 (2001).

## Etude expérimentale de la diffusion dans un système granulaire cisailé

G. Marty, O. Dauchot

*Groupe Instabilité et Turbulence, CEA/DSM/DRECAM/SPEC,  
F-91191 Gif sur Yvette Cedex, France  
gmarty@cea.fr*

### Résumé

Cette étude porte sur les propriétés de diffusion et de mobilité au sein d'un échantillon bidimensionnel de grains cisailé. Il s'agit de tester l'existence d'une relation de fluctuation-dissipation dans un matériau granulaire et ainsi de mettre en évidence une éventuelle température effective. Les premières mesures de diffusion, effectuées dans une cellule de cisaillement à volume constant, montre une dynamique de "cages", similaire à ce qui est observé dans le cas des systèmes vitreux. L'étude statistique des propriétés de diffusion d'une part montre un comportement sous-diffusif sur l'échelle de temps de l'expérience, d'autre part souligne le caractère non trivial de la nature des "cages" observées.

## 1 Introduction

La matière granulaire dense constitue un modèle expérimental riche pour l'étude des systèmes désordonnés hors équilibre [1, 2]. Elle offre la possibilité d'avoir accès relativement aisément non seulement à ses propriétés macroscopiques, c'est-à-dire à l'échelle de l'échantillon, mais également aux phénomènes physiques à l'échelle d'une particule. Cependant, les matériaux granulaires présentent une différence notable avec les systèmes désordonnés hors équilibre habituellement étudiés tels que les verres : alors que l'agitation thermique contrôle la dynamique rapide des systèmes vitreux, elle est totalement inefficace dans une assemblée de particules dépassant les quelques microns. L'énergie, dissipée par friction entre grains, doit par conséquent être injectée en permanence par l'intermédiaire d'un forçage extérieur (vibration, cisaillement, etc.).

Pour autant, une propriété essentielle des systèmes vitreux est l'existence d'une dynamique lente, qui se superpose à la dynamique rapide (thermique), et qui correspond à une relaxation structurale dont on se fait l'image de réarrangements de "cages" de voisins emprisonnant une particule aux temps courts. Cette dynamique n'est plus régie par la température ambiante  $T$ , mais il a été montré que l'on pouvait lui associer une température effective,  $T_{eff}$  [3, 4]. Une étape importante dans l'établissement d'une analogie matière granulaire/systèmes vitreux consiste donc à essayer d'identifier une telle température dans un milieu granulaire.

Pour cela, nous nous appuyons sur une généralisation de la relation de fluctuation-dissipation, qui relie corrélations temporelles et réponse linéaire à une faible contrainte extérieure, en faisant intervenir le coefficient  $T_{eff}$  [3, 4]. Dans le cas présent, il s'agit de comparer les propriétés de diffusion des grains ( $\langle |x(t) - x(0)|^2 \rangle$ ) à leur mobilité ( $\frac{\langle [x(t) - x(0)] \rangle}{f}$ , où  $f$  est la force exercée sur le grain dont on étudie la mobilité) [1, 5], afin de tester l'existence d'une relation du type :

$$\langle |x(t) - x(0)|^2 \rangle = 2T_{eff} \frac{\langle [x(t) - x(0)] \rangle}{f} \quad (1)$$

Plusieurs études sur les matériaux granulaires ont proposé des analogies avec les systèmes vitreux. En particulier, la compaction lente d'un matériau granulaire sous vibration (P. Philippe [6]) ou sous cisaillement (O. Pouliquen [7]) peut se comparer aux propriétés de vieillissement des systèmes vitreux. Le but de l'expérience présentée ici est de simplifier la dynamique en se plaçant en régime stationnaire (non vieillissant), et de pouvoir accéder à la dynamique individuelle des particules (systèmes bidimensionnel).

Après avoir décrit le dispositif expérimental, nous présentons les premiers résultats obtenus sur les propriétés de diffusion au sein de l'échantillon granulaire étudié.

## 2 Dispositif expérimental

L'échantillon est constitué d'une assemblée bidisperse en égale proportion d'environ 6000 cylindres métalliques de hauteur  $5\text{mm}$  et de diamètres  $4$  et  $5\text{mm}$ . L'échantillon est spatialement désordonné et aucun effet de ségrégation à l'échelle de temps des expériences n'a été observé. L'empilement est horizontal, de manière à s'affranchir des effets de la gravité, répartition inhomogène des contraintes et phénomènes de compaction.

La cellule de cisaillement, présentée sur la figure 1, est un parallélogramme déformable dont une des bases de longueur  $L = 325\text{mm}$  est fixe, tandis que l'autre est animée d'un mouvement de translation oscillante,  $\Delta L = h \tan \theta$ , où  $h = 345\text{mm}$  est la hauteur du parallélogramme. Cette hauteur est maintenue constante, la longueur des bras s'ajustant au fur et à mesure que  $\theta$  varie entre  $\pm\theta_{max}$ . Le mouvement est quasistatique et  $\theta_{max}$ , égal ici à  $1^\circ$ ,  $5^\circ$  ou  $10^\circ$ , est l'unique paramètre de contrôle. La déformation imposée à l'échantillon est donc un cisaillement simple à fraction volumique constante  $\phi = 0.86$ .

Au cours d'une expérience, l'échantillon est soumis à 10000 cycles de cisaillement. A chaque passage par la position initiale  $\theta = 0$ , une image est acquise, sur laquelle 500 grains de  $5\text{mm}$  préalablement marqués sont repérés.

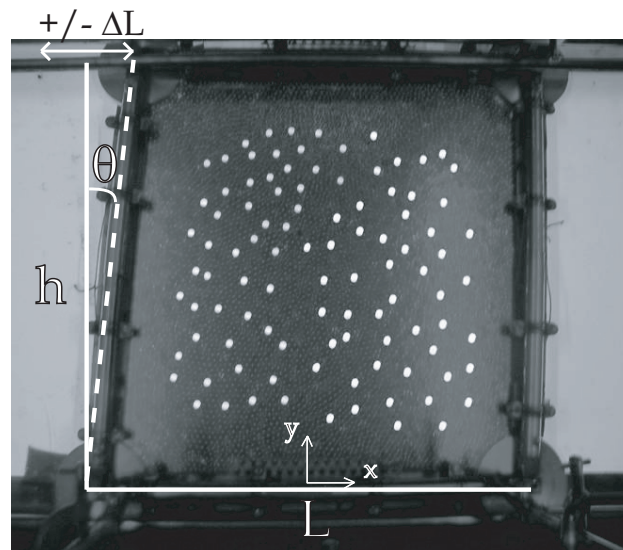


FIG. 1 – *Dispositif expérimental: cellule de cisaillement simple cyclique à volume constant ( $h = \text{cste}$ ). Les points blancs sont les traceurs suivis au cours de l'expérience.*



### 3 Résultats

Les trajectoires individuelles des traceurs (figure 2) présentent une dynamique intermittente composée d'une phase où la trajectoire semble confinée interrompue par de brusques excursions. Ces structures sont très similaires à celles observées par Weeks et Weitz dans les verres colloïdaux [8]. On les nomme communément "cages", l'image que l'on se fait étant celle d'un blocage de la dynamique dû à un piégeage des grains par ses voisins, piégeage dont le grain se libère à l'occasion de réarrangement collectifs.

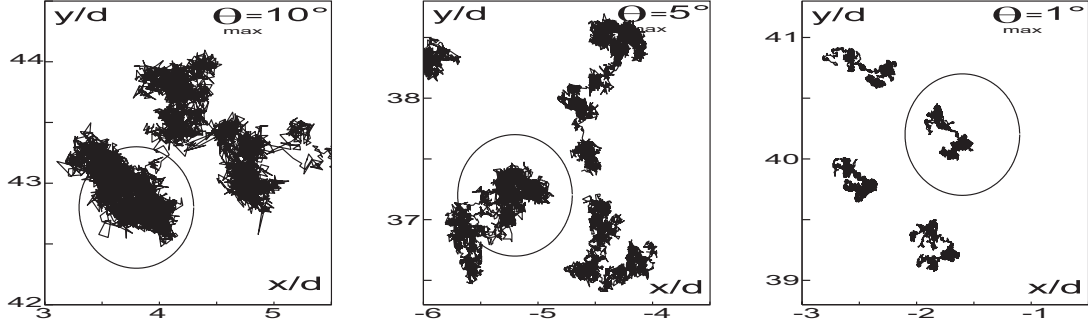


FIG. 2 – Exemples de trajectoires observées pour des angles de cisaillement maximum  $\theta_{max} = 10^\circ$ ,  $5^\circ$  et  $1^\circ$ . Les axes sont gradués en diamètre de grains, et le cercle représente la taille d'un grain.

Les trajectoires obtenues pour  $\theta_{max} = 10^\circ$  présentent typiquement 2 à 4 cages, dont la taille est typiquement celle d'un grain. Ce résultat s'accorderait bien avec l'image évoquée ci-dessus d'un grain piégé par ses voisins. Cependant, on observe que le déplacement cumulé sur les 10000 cycles est d'autant plus faible que  $\theta_{max}$  est petit : de 2 – 3 diamètres de grain pour  $\theta_{max} = 10^\circ$  à moins d'un diamètre pour  $\theta_{max} = 1^\circ$ . De même, le déplacement moyen sur un cycle est proportionnel à  $\theta_{max}$ . Or, l'observation des trajectoires tant pour  $\theta_{max} = 5^\circ$  que pour  $\theta_{max} = 1^\circ$  laissent penser que la structure en cages persiste à ces plus petites échelles. Auquel cas la nature physique de ces "cages" devient moins claire.

Afin de préciser la nature du mouvement pour les différents  $\theta_{max}$ , on étudie la statistique des déplacements à  $N$  pas :  $\Delta\vec{r}(t, \tau) = \vec{r}(t + \tau) - \vec{r}(t)$ , où le temps est compté en nombre de cycles. L'étude des distributions de probabilité de  $\Delta\vec{r}(t, \tau)$  à  $\tau$  fixé, réalisées à différents instants de la dynamique a permis de vérifier la stationnarité de celle-ci, comme on pouvait le penser pour un cisaillement à volume constant en l'absence d'effet de la gravité. Par ailleurs, l'étude des corrélations temporelles révèle que les déplacements à un pas sont anticorrélés sur un cycle, puis parfaitement décorrélés.

La figure 3 représente les distributions de probabilité de la composante  $x$  des déplacements à  $N$  pas  $\Delta X(\tau)$  pour les différents  $\theta_{max}$  et aux différentes échelles de temps  $\tau = 1, 10, 100$  et 1000 cycles. (La composante  $y$  des déplacements présente exactement la même statistique.) On observe que pour les trois  $\theta_{max}$  étudiés, les distributions présentent une allure très similaire. Les queues de distributions plus larges que pour la gaussienne indiquent un excès de grands déplacements. Ces distributions caractéristiques d'une dynamique intermittente peuvent s'interpréter comme la signature de la présence de cages (alternance piégeage dans une cage / sauts entre cages). Elles confirment donc l'observation visuelle des trajectoires, qui nous avait conduit à inférer la présence de cages de taille bien inférieure

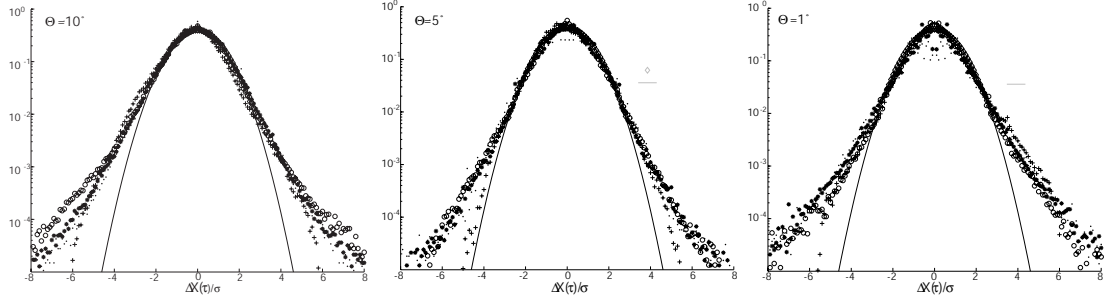


FIG. 3 – Distribution de probabilité des  $\Delta X(\tau)$  centrés réduits, pour respectivement  $\theta_{max} = 10^\circ, 5^\circ, 1^\circ$ , aux temps  $\tau = 1$  ( $\cdot$ ), 10 ( $*$ ), 100 ( $\circ$ ), 1000 ( $+$ ). La courbe en trait plein est la gaussienne théorique.

à celle du grain et ainsi à poser la question de la nature physique de ces cages.

La figure 4 présente pour les trois  $\theta_{max}$  étudié le déplacement quadratique moyen en fonction du temps  $\sqrt{\langle \Delta X^2(\tau) \rangle}$ . A titre de comparaison, et pour établir une borne supérieure de la limite de convergence de l'estimateur statistique, on a aussi représenté le déplacement quadratique moyen obtenu dans le cas d'une marche aléatoire gaussienne delta-corrélée de 10000 pas et de 500 marcheurs indépendants: en tout état de cause, on ne peut estimer les propriétés de diffusion au sein de l'échantillon au delà de  $\tau = 5000$ ; Qui plus est la présence de corrélation entre les traceurs ne peut que contribuer à rabaisser cette borne.

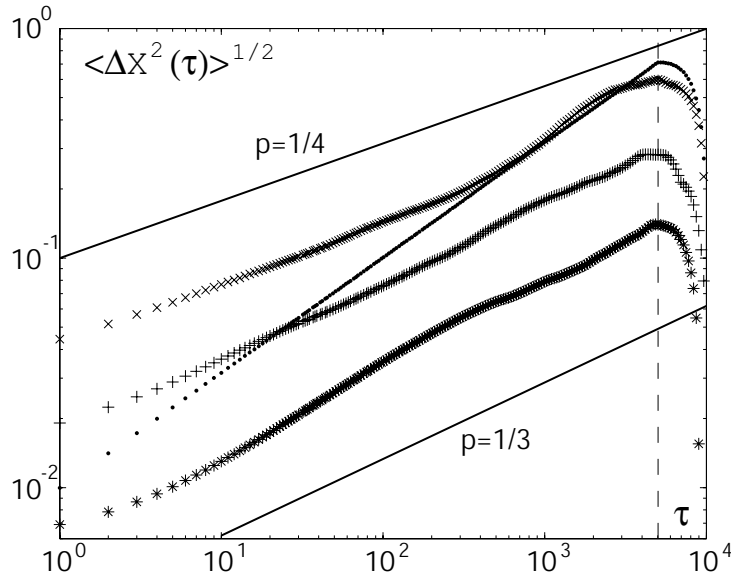


FIG. 4 – Déplacement quadratique moyen  $\sqrt{\langle \Delta X^2(\tau) \rangle}$  pour  $\theta_{max} = 1^\circ$  ( $*$ ),  $5^\circ$  ( $+$ ) et  $10^\circ$  ( $\times$ ) ainsi que pour une marche aléatoire gaussienne delta-corrélée de 10000 pas et de 500 marcheurs indépendants ( $\bullet$ ). La ligne verticale à  $t = 5000$  représente la limite au-delà de laquelle même pour cette marche idéale, l'échantillonnage statistique est insuffisant.

Quoiqu'il en soit, pour les trois amplitudes de cisaillement, on observe un comporte-

ment nettement sous-diffusif jusqu'à  $\tau \simeq 500$ . Pour  $\theta_{max}$  égal à  $1^\circ$  et  $5^\circ$ , ce comportement sous-diffusif se maintient sur toute la gamme d'échelles de temps considérée. Dans le cas de  $\theta_{max} = 10^\circ$ , on observe au contraire un retour à un comportement diffusif usuel dès que  $\tau > 500$ . On note également l'augmentation du coefficient de diffusion avec  $\theta_{max}$ , qui traduit l'accroissement de la taille des pas avec  $\theta_{max}$ .

Ces observations s'accordent bien avec l'image d'un piègeage des grains au sein de cages, pour les trois amplitudes de cisaillement étudiées. Le comportement diffusif à temps long observé dans le cas  $\theta_{max} = 10^\circ$  indiquerait alors que pour la plus grande amplitude de cisaillement, la dynamique de dépiégeage est suffisamment efficace sur les échelles de temps considérées pour rétablir une dynamique diffusive. Cette dernière observation nécessiterait cependant d'être confirmée par des expériences à temps plus long, afin de s'assurer qu'il ne s'agit pas d'un biais statistique.

## 4 Discussion

Les systèmes granulaires impliquent en général beaucoup de grains. Il est donc tentant de les décrire par une approche de type thermodynamique. Malheureusement leur dynamique est intrinsèquement dissipative et hors équilibre. En conséquence de quoi, aucun ensemble statistique invariant sous leur dynamique n'a encore été proposé, même s'il a été suggéré que les systèmes granulaires pouvaient obéir à une mécanique statistique propre. Nous avons présenté ici les premiers résultats concernant les propriétés de diffusion au sein d'un système granulaire bidimensionnel désordonné soumis à un cisaillement cyclique. Il s'agit d'une première étape dans la recherche d'une relation fluctuation-dissipation généralisée en vue d'établir un lien avec la thermodynamique usuelle [9].

Les trajectoires des grains présentent des structures originales de type "cages". L'étude statistique des déplacements a permis de montrer que ces cages existent bien en deça de la taille des grains. Leur présence est attestée par les queues larges des distributions des déplacements, qui traduisent une dynamique intermittente, ainsi que par le caractère sous-diffusif observé sur le déplacement quadratique moyen. Cela pose la question de la nature physique des cages elles-mêmes. En effet, l'image simple d'une particule piégée par ses voisines qui s'échappe ponctuellement en se faufilant entre deux d'entre elles ne peut rendre compte de la persistance des cages à des échelles bien inférieures à la taille d'un grain dans les expériences à faible amplitude de cisaillement. Il pourrait s'agir par exemple de réarrangements complexes impliquant plus de grains que les seuls voisins.

Weeks et Weitz [8] ont observé des structures très similaires dans un système colloïdal au voisinage de la transition vitreuse. Aux temps très court, la dynamique purement thermique est diffusive. Ce régime est suivi par un régime sous-diffusif, qui coïncide avec l'observation des "cages". A temps plus long la dynamique redevient diffusive. Par comparaison, il n'existe pas dans le cas présent de régime diffusif à temps très court. Ceci est en accord avec l'absence d'agitation thermique au sein d'un système granulaire. Pour ce qui est des temps long, il est possible que pour l'amplitude de cisaillement maximale  $\theta_{max} = 10^\circ$ , nous ayons observé le retour au régime diffusif pour  $\tau > 500$ .

O. Pouliquen et al. [7] ont observé les mêmes structures en cage dans le cas d'un milieu granulaire. Les auteurs ont par ailleurs établi la relation de proportionnalité entre la taille moyenne des pas et l'amplitude du cisaillement, que nous avons retrouvée dans le cas présent. Cependant, en présence de gravité, l'échantillon se compacte et la dynamique, instationnaire, ne permet pas l'analyse des propriétés de diffusion. Les auteurs attribuent d'ailleurs la dynamique lente de compaction aux réarrangements inter-cages. Dans la me-

sure où le même type de dynamique structurale est observée dans l'expérience présente, alors qu'elle est réalisée à volume constant et sans effet de la gravité, la question se pose de savoir si les cages interviennent bien dans une dynamique lente et collective du matériau, et le cas échéant quelle est la nature de cette dynamique dans un cas sans compaction comme celui-ci.

A court terme, l'étude de trajectoires plus longues, notamment dans le cas des amplitudes de cisaillement faibles devrait permettre de lever le doute sur la présence d'un régime diffusif à temps long. Les corrélations spatiales et spatio-temporelle pourraient nous renseigner sur la nature physique des cages. De ce point de vue, il sera intéressant de comparer nos observations avec les nombreux travaux sur les hétérogénéités dynamiques dans les verres [10]. Ensuite, l'étude de la mobilité permettra de sonder l'existence d'une relation fluctuations-dissipation généralisée. Enfin, à plus long terme, des expériences non plus à volume constant, mais à contrainte constante permettront d'étudier le régime vieillissant et les nombreux effets qui sont susceptibles de l'accompagner si on en croît les observations faites dans les verres.

## Références

- [1] J. Kurchan, *Dense granular matter as athermal glasses*, Adv. in Compl. Syst., **4**, 363 (2002).
- [2] H.M. Jaeger, S.R. Nagel, *Physics of the granular state* Science, **255**, 1523 (1992).
- [3] L. Cugliandolo, J. Kurchan, L. Peliti, *Energy flow, partial equilibration, and effective temperatures in systems with slow dynamics*, Phys. Rev. E, **55**, 3898 (1997).
- [4] L. Cugliandolo, *Effective temperatures out of equilibrium*, Trends in theoretical physics, Eds H. Falomir et al, Am. Inst. Phys. Proceedings of the 1998 Buenos Aires meeting
- [5] H.A. Makse, J. Kurchan, *Testing the thermodynamics approach to dense granular matter with a numerical model of a decisive experiment*, Nature, **415**, 614 (2002).
- [6] P. Philippe, D. Bideau, *Compaction dynamics of a granular medium under vertical tapping*, Europhysics Letters, **60**, 677 (2002).
- [7] O. Pouliquen, M. Belzons, M. Nicolas, *Fluctuating particle motion during shear induced granular compaction*, Phys. Rev. Lett., **91**, 014301 (2003).
- [8] E.R. Weeks, D.A. Weitz, *Properties of cage rearrangements observed near the colloidal glass transition*, Phys. Rev. Lett, **89**, 095704 (2002).
- [9] S. F. Edwards, in *Granular Matter: An Interdisciplinary Approach*, edited by A. Mehta (Springer-Verlag, New York, 1994), and references therein.
- [10] L. Berthier, *Time and length scales in supercooled liquids*, Phys. Rev. E, **69**, 020201 (2004).

## Un modèle d'applications couplées (CMN) pour la dynamique des réseaux de régulation génétique.

R. Coutinho<sup>1</sup>, B. Fernandez<sup>2</sup>, R. Lima<sup>2</sup> et A. Meyroneinc<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Departamento de Matemática do Instituto Superior Técnico da Universidade Técnica de Lisboa, Av. Rovisco Pais, 1049-001 Lisboa, Portugal*

<sup>2</sup>*Centre de Physique Théorique (FRUMAM),  
CNRS, Luminy Case 907, 13288 Marseille CEDEX 09, France  
meyroneinc@cpt.univ-mrs.fr*

### Résumé

Nous proposons un modèle d'applications couplées (Coupled Map Network<sup>1</sup>) pour la dynamique de réseaux de régulation d'expression génique. Le modèle se veut pertinent pour la dynamique déterministe et non-linéaire de grandeurs semi-macroscopiques (concentrations de protéines par exemple) sans considération explicite de structure spatiale sous-jacente. Nous présentons pour un type particulier de réseau, les circuits, un certain nombre de résultats en accord à la fois avec l'expérience, et avec ceux d'autres modèles (équations différentielles ordinaires, formalismes logiques). Nous illustrons également par un exemple de circuit une des originalités des résultats de notre modèle.

## 1 Introduction

A la suite du séquençage des génomes, la compréhension des mécanismes de régulation de l'expression de l'information contenue dans le génome, lors du développement, constitue un des problèmes majeurs de la Génétique moderne [6]. Cette compréhension passe par la mise en place et l'étude de réseaux de régulation génétique, à la fois sur le plan expérimental qu'au niveau théorique.

La réalisation expérimentale de petits réseaux synthétiques (de 1 à 3 gènes) de régulation génétique, ainsi que l'étude qualitative de leur dynamique d'expression [1] [2] [3], ont récemment démontré la faisabilité d'une approche simple, mais réaliste, de cette régulation. En effet, la fabrication de ces réseaux biologiques a mis en évidence des mécanismes simples (activation, inhibition) mais néanmoins fondamentaux de la régulation [4]. En outre, la compréhension de leur dynamique est prépondérante dans une approche modulaire, qui consiste à considérer un (grand) réseau comme un assemblage de plusieurs sous-réseaux inter-connectés, plus ou moins autonomes et plus ou moins actifs dans la dynamique globale du système.

Il existe actuellement pour la modélisation des réseaux de régulation génétique un certain nombre d'approches. Elles se situent à divers niveaux d'abstraction des systèmes biologiques, et sont principalement différenciées par des considérations sur la taille du réseau (petit ou grand nombre de gènes), sur leur structure spatiale et sur leur caractéristique temporelle (discrete ou continue) [5].

Les modèles que nous considérons ici présentent une formulation à temps discret et espace de phase continu de la dynamique de réseau de régulation. Analysant leur dynamique, notamment dans le cas particulier des circuits, nous retrouvons des résultats

---

1. Nous marquons la différence avec les "Coupled Map Lattices" pour lesquels il existe des symétries de l'espace physique ayant des conséquences sur la dynamique (invariances par translation, etc) et qui n'existent pas, à priori, dans les réseaux que nous considérons.

expérimentaux, ou encore ceux obtenus par d'autres modèles. En particulier, suivant le signe du circuit, la dynamique a des points fixes (stables) si le circuit est positif, et n'a pas de points fixes stables si le circuit est négatif. Les paramètres étant fixés, ces points peuvent être uniques (cas monostable) ou multiples (cas bistable, multistationarité).

En outre, nous démontrons que, suivant les valeurs des paramètres, un circuit positif peut avoir des orbites périodiques. Cette existence est reconnue comme une conséquence des délais, dus à la formulation "temps discret" du modèle. Ces délais sont généralement absents des modèles d'équation différentielles jusque là étudiées. Dans les circuits négatifs, les délais ont pour effet de modifier la périodicité des orbites en fonction des paramètres, voire de créer des orbites périodiques stables de périodes différentes (multistabilité d'orbites périodiques).

## 2 Le modèle.

Un réseau de régulation génétique est modélisé par un graphe orienté dont les sommets représentent les gènes (ou leurs produits d'expression: protéines, ARN, etc), et les flèches représentent leurs interactions. De plus, un signe est associé à chaque flèche qui vaut pour la nature de l'interaction (activatrice ou inhibitrice); le graphe orienté est donc signé.

Dans la formulation "temps discret" qui nous intéresse, la dynamique d'un réseau de régulation est générée par une suite d'itérations faisant intervenir les niveaux d'expression  $x_i^t \in \mathbb{R}$  de chaque gène: à partir du vecteur  $\{x_i^t\}$ , on génère le vecteur  $\{x_i^{t+1}\}$ . Cette application tient compte, d'une part de la dégradation, et d'autre part de l'ensemble des interactions, en chaque noeud. Par simplicité nous supposons la dégradation linéaire (avec un taux  $a \in [0, 1]$  indépendant du noeud), et les interactions pondérées ( $K_{ij} \in \mathbb{R}$ ), signées ( $s_{ij} \in \{-1, +1\}$ ), à seuils ( $T_{ij} \in \mathbb{R}$ ) et additives. Tenant compte de ces contraintes, la dynamique en chaque noeud  $i$  est définie par [7]:

$$x_i^{t+1} = a.x_i^t + \sum_{j \in I_i} K_{ij}.H(s_{ij}.(x_j^t - T_{ij})). \quad (1)$$

En plus des notations introduites précédemment, le symbole  $I_i$  désigne l'ensemble des noeuds qui ont une action sur  $i$  et le symbole  $H$  représente la fonction de Heaviside:  $H(y) = 1$  si  $y \geq 0$  et  $H(y) = 0$  si  $y < 0$ .

Modulo un changement affine de variables, on peut toujours supposer que les intensités  $K_{ij}$  sont toutes positives et normalisées de la façon suivante:  $a + \sum_{j \in I_i} K_{ij} = 1$ . Ces hypothèses assurent que l'attracteur de la dynamique donnée par (1) est contenu dans l'hypercube  $[0, 1]^n$  (ici  $n$  est le nombre de noeuds du réseau). En d'autres termes, modulo un transitoire, on peut toujours supposer que les variables  $x_i^t$  sont contenues dans  $[0, 1]$ , et justifier ainsi les termes de "concentration" ou de "densité".

**Orbites et codage.** Etant donné une orbite  $\{x_i^t\}$  (obtenue à partir d'une condition initiale  $\{x_i^0\}$  en itérant la relation (1)), la suite symbolique  $\{\theta_{ij}^t\}$ , où  $\theta_{ij}^t = H(s_{ij}.(x_j^t - T_{ij}))$ , indique les régions de l'espace de phase que l'orbite visite au cours du temps. (En effet  $\theta_{ij}^t = 0$  implique que  $x_j^t < T_{ij}$  si  $s_{ij} = +1$ , que  $x_j^t > T_{ij}$  si  $s_{ij} = -1$ , et de même pour  $\theta_{ij}^t = 1$ .) Cette suite symbolique est appelée code de l'orbite.

Inversement on peut démontrer [7] que toute suite symbolique satisfaisant une certaine condition, dite condition d'admissibilité, est le code d'une (unique) orbite dans l'attracteur. (Précisément, pour chaque suite symbolique  $\{\theta_{ij}^t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  qui satisfait la condition d'admissibilité, il existe une unique orbite globale  $\{x_i^t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ , voir [7] pour les détails.)

Ainsi l'étude de l'attracteur du système (1) se ramène à la recherche de suites symboliques qui sont admissibles. C'est en proposant des familles de suites symboliques et en étudiant leurs admissibilités en fonction des paramètres que nous avons étudié l'existence d'orbites périodiques dans des circuits.

La condition d'admissibilité n'est rien d'autre que la condition qui impose à chaque élément (vecteur) d'une suite temporelle (qui dépend de la suite symbolique) d'être, à chaque instant, dans la région de l'espace de phase imposée par la suite symbolique.

### 3 Propriétés caractéristiques de dynamique sur circuits.

A partir de maintenant, nous nous intéresserons principalement à la dynamique des circuits, c'est-à-dire des réseaux pour lesquels  $I_i = i-1 \bmod n$  pour tout  $i \in \{0, \dots, n-1\}$ , voir figure 1. Dans cette section, on s'intéresse aux propriétés générales pour des circuits de longueur quelconque.

Pour un tel circuit, la relation (1) devient

$$x_i^{t+1} = a.x_i^t + (1-a).H(s_{i-1}.(x_{i-1}^t - T_{i-1})) \quad i \in \{0, \dots, n-1\} \quad (2)$$

si on simplifie les notations, i.e  $s_{i-1}$  signifie  $s_{i(i-1 \bmod n)}$  et  $T_{i-1}$  signifie  $T_{i(i-1 \bmod n)}$ .

En conséquence, pour chaque  $i$ , la valeur  $x_i^{t+1}$  est l'image de  $x_i^t$  par une application affine de pente  $a$  et dont l'ordonnée à l'origine vaut 0 ou  $(1-a)$  suivant le signe de la quantité  $(s_{i-1}.(x_{i-1}^t - T_{i-1}))$ , cf. figure 1 (b). En d'autres termes la dynamique du système est donnée par une application affine par morceaux, et le nombre de ces morceaux est  $2^n$  (qui correspondent aux  $2^n$  choix de  $n$ -uplets de symboles possibles  $\{\theta_i\}$ ). Utilisant

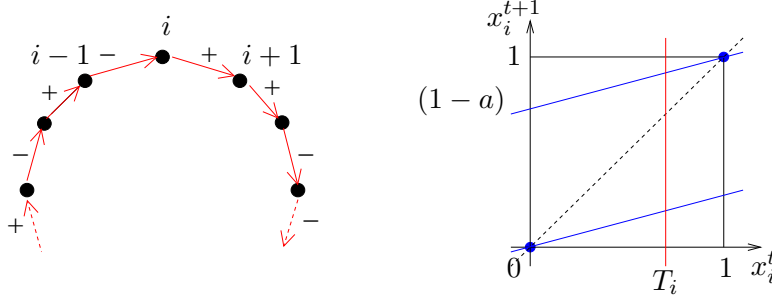


FIG. 1 – (a) Exemple de circuit. (b) Représentation graphique de la relation (2).

la relation (2), on déduit les propriétés générales suivantes de la dynamique de circuits de longueur quelconque [7].

En premier lieu, pour une longueur de circuit fixée, la qualité des interactions n'intervient que par le produit des signes  $s_i$ . En effet, l'énoncé suivant (valable pour n'importe quel réseau) implique que deux circuits de même longueur et de même produit de signes ont la même dynamique.

**Lemme 1** Soit  $R$  un réseau à  $n$  noeuds, avec pour caractéristiques  $\{s_{ij}\}$ ,  $\{T_{ij}\}$  et  $\{K_{ij}\}$ . Etant donné un noeud  $k$  de ce réseau, soit  $R'$  le réseau à  $n$  noeuds ayant pour caractéristiques

$$s'_{ij} = \begin{cases} s_{ij} & \text{si } j \in I_i \text{ et } j \neq k \\ -s_{ik} & \text{si } k \in I_i \text{ et } j = k \end{cases} \quad \text{et} \quad s'_{kj} = \begin{cases} -s_{kj} & \text{si } j \in I_k \text{ et } j \neq k \\ s_{kk} & \text{si } k \in I_k \text{ et } j = k \end{cases}$$

et

$$T'_{ij} = \begin{cases} T_{ij} & \text{si } j \in I_i \text{ et } j \neq k \\ 1 - T_{ik} & \text{si } k \in I_i \text{ et } j = k \end{cases}$$

et  $K'_{ij} = K_{ij}$  pour tout  $i, j$ .

Alors, la suite  $\{x_i^t\}$  est une orbite du système (1) associée à  $R$  (telle que  $x_j^t \neq T_{ij}$  pour tout  $i, j, t$ ) si et seulement si la suite  $\{x_i^t\}$  définie par:

$$x_i^t = \begin{cases} x_i^t & \text{si } i \neq k \\ 1 - x_k^t & \text{si } i = k \end{cases}$$

est une orbite du système associée à  $R'$  (telle que  $x_j^t \neq T'_{ij}$  pour tout  $i, j, t$ ).

On dira qu'un circuit est positif si le produit des  $s_i$  vaut 1, négatif si ce produit vaut  $-1$ . Le résultat suivant montre que le signe d'un circuit détermine l'existence et le nombre de points fixes.

**Théorème 1** *Supposons que le réseau soit un circuit, et que tous les seuils  $T_i$  appartiennent à l'intervalle  $(0, 1)$ . Alors:*

- si le circuit est négatif, le CMN (2) n'a pas de points fixes,
- si le circuit est positif, le CMN (2) a exactement deux points fixes; ces derniers sont stables.

Ainsi, aucun circuit négatif ne peut converger vers un état stationnaire, mais doit osciller autour d'un équilibre; un phénomène connu sous le nom d'homéostasie. Nous verrons dans la section suivante qu'un circuit positif peut posséder, en plus des deux points fixes stables, une orbite périodique stable.

Dans le théorème, l'hypothèse que tous les seuils appartiennent à l'intervalle  $[0, 1]$  est importante. Dans le cas contraire, on a l'énoncé suivant:

**Proposition 1** *Si le réseau est un circuit, si tous les seuils  $T_i \neq 0, 1$  et si au moins un des seuils  $T_i$  n'appartient pas à l'intervalle  $[0, 1]$ , alors l'attracteur global de la dynamique (2) est un point fixe situé sur l'un des sommet de  $[0, 1]^n$ .*

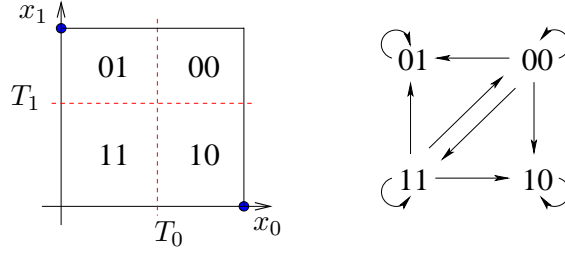
Autrement dit, si l'un des seuils n'appartient pas à l'intervalle  $[0, 1]$ , la “fonctionnalité” biologique du circuit, à savoir homéostasie dans un cas, et bistabilité dans l'autre, est détruite.

## 4 Le circuit positif à deux noeuds.

Comme annoncé précédemment, l'analyse de la dynamique consiste en l'étude de l'ensemble des suites symboliques qui satisfont la condition d'admissibilité. De telles études ont été menées dans les circuits et fournissent une description plus ou moins complète du système [7].

Dans cette section, nous présentons les résultats de l'étude du circuit positif à deux noeuds, i.e  $n = 2$  et  $s_0 = s_1 = -1$  dans la relation (2). Ce circuit, appelé “toggle-switch”, correspond au système synthétisé et étudié expérimentalement par Gardner & al. [2]. Dans ce cas, la dynamique (2) se réduit à une application affine par morceaux du carré  $[0, 1]^2$ , les morceaux correspondant aux atomes de la partition de la figure 2(a). En outre, ces



FIG. 2 – (a) Espace de phase et sa partition, (b) Graphe des codes  $\theta$  possibles.

atomes correspondent aux différentes valeurs des paires de symboles  $\theta_0\theta_1$ , soit 00, 01, 10 et 11. Etudiant la dynamique de cette application, on obtient que les suites symboliques admissibles (i.e les codes des orbites globales) sont des chemins infinis dans le graphe de la figure 2(b). On sait de plus que ces suites correspondent aux chemins infinis qui ne terminent pas par  $00^\infty$  ni par  $11^\infty$ . En d'autres termes, pour tout  $x^t$  dans l'atome correspondant à 00 ou à 11, il existe  $\tau > 0$  tel que  $x^{t+\tau}$  et  $x^t$  sont dans des atomes différents.

Une analyse plus fine de la dynamique [7], basée sur des résultats de dynamique d'applications contractantes du cercle, démontre que les seules suites admissibles sont de fait les suites suivantes:

- les suites constantes  $01^\infty$  et  $10^\infty$ . Ces suites sont les codes des points fixes stables (cf. Théorème 1). Les points fixes ont pour coordonnées  $(0,1)$  et  $(1,0)$  respectivement (cf. figure 2(a)).
- si les paramètres sont bien choisis, des suites telles que  $\theta_0^t = \theta_1^t = \theta^t$  pour tout  $t$ , et  $\{\theta^t\}$  est le code d'une rotation sur le cercle. Les orbites correspondantes sont alors données, modulo un changement de variable, par une rotation d'angle  $\nu$ , appelé nombre de rotation.<sup>2</sup> Ces orbites sont périodiques si le nombre de rotation est rationnel, quasi-périodiques sinon.

Ainsi, en plus des solutions stationnaires mises en évidence par le modèle différentiel proposé par Gardner & *al.* [2], le système à temps discret présente, dans certaines régions des paramètres, des oscillations permanentes. Comme annoncé dans la section 2, ces oscillations sont imputables aux délais, et absentes des équations différentielles ordinaires.

Les régions des paramètres d'existence de ces oscillations sont explicitement connues, voir figure 3. Sur cette figure, on a représenté, en niveau de gris, pour une valeur de  $a$  fixée, les régions des paramètres  $T_0$  et  $T_1$  d'existence d'oscillations de nombre de rotation  $\nu$ . Ces régions sont des carrés autour de la diagonale principale, ayant une structure fractal. En particulier, la fonction qui associe à un point de la diagonale  $T_0 = T_1 = T$ , le nombre de rotation de l'oscillation, soit  $\nu(T)$ , est une fonction décroissante et continue, en forme d'escalier du diable.

## 5 Conclusion.

Cet article présente une modélisation à temps discret, c'est-à-dire tenant compte des effets de retards, de la dynamique de réseaux de régulation d'expression géniques. Nous

2. Précisément ces orbites ont pour expression  $x_1^t = x_2^t = \phi(\nu t + \alpha)$ , où  $\alpha$  est arbitraire et où le nombre de rotation  $\nu$  est unique et complètement déterminé par les paramètres. De plus, le changement de variable  $\phi$  est un endomorphisme du cercle qui préserve l'orientation.

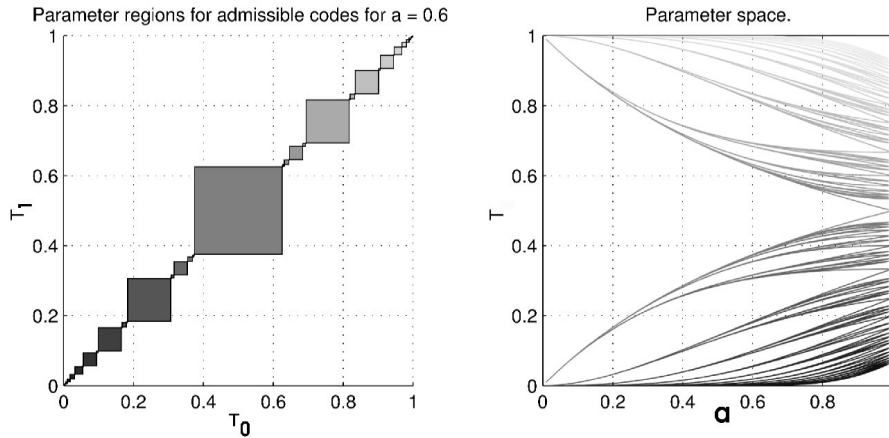


FIG. 3 – (a) Régions des paramètres  $T_0$  et  $T_1$  d'existence d'oscillations de nombre de rotation  $\nu(T_0, T_1)$  pour ' $a = 0.6$ '. (b) Régions des paramètres  $T_0 = T_1 = T$  et  $a$  d'existence d'oscillations de nombre de rotation  $\nu(a, T)$ .

avons montré pour un exemple simple de circuit, que ces effets peuvent créer des oscillations permanentes là où les modèles sans délais ne présentent que des solutions stationnaires. Ces résultats rappellent les différences de comportement qu'implique une discrétisation du temps dans les modèles logistiques de populations, voire par exemple [8].

L'hypothèse d'une dynamique affine par morceaux, combinée à des méthodes de dynamique symbolique, permet de caractériser exactement les domaines d'existence d'orbites dans l'attracteur (points fixes, oscillations), voire de caractériser entièrement l'attracteur pour des réseaux simples comme le circuit positif à deux noeuds.

En outre, ces techniques permettent de démontrer la dépendance continue des caractéristiques de ces orbites (nombre de rotation), en fonction des paramètres. Ceci signifie qu'une petite erreur dans le choix des paramètres a une faible influence sur le comportement asymptotique du système. Cette propriété est non négligeable si on pense aux imprécisions de mesures dans les expériences biologiques.

## Références

- [1] M.B Elowitz and S. Leibler, *A synthetic oscillatory network of transcriptional regulators*, NATURE, **403**, 335-338, 2000.
- [2] T.S. Gardner, C.R. Cantor and J.J. Collins, *Construction of a genetic toggle switch in Escherichia coli*, NATURE, **403**, 339-342, 2000.
- [3] A. Becskei and L. Serrano, *Engineering stability in gene networks by autoregulation*, NATURE, **405**, 590-593, 2000.
- [4] R. Thomas, *Kinetic Logic: A Boolean Approach to the Analysis of Complex Regulatory Systems*, "Lecture note in Biomathematics, Springer-Verlag, Berlin, **29**, 1979.
- [5] H. de Jong, *Modeling and Simulation of Genetic Regulatory Systems: A literature Review*, Journal of Computational Biology, **9**, 1, 2002.
- [6] B. Jacq et D. Thieffry, *Modéliser les réseaux de gènes*, BIOFUTUR, **206**, 2000.
- [7] R. Coutinho, B. Fernandez, R. Lima and A. Meyroneinc, *Modelling the dynamics of genetic regulatory networks via real mappings*, in preparation.
- [8] R. L. Devaney, *An introduction to chaotic dynamical systems*, Benjamin/Cummings, 1986.

## Identification de troubles du rythme cardiaque par dynamique symbolique sur intervalles RR chez le rat sain et insuffisant cardiaque

J.-P. Morin<sup>†</sup>, S. Lorient<sup>†</sup>, E. Roulin<sup>‡</sup> et C. Letellier<sup>‡</sup>

<sup>†</sup>*Inserm U644 Université de Rouen*

<sup>‡</sup>*CORIA UMR 6614 - Université de Rouen*

[jp.morin@univ-rouen.fr](mailto:jp.morin@univ-rouen.fr)

### Résumé

Les développements récents des technologies d'acquisition des électrocardiogrammes (ECG) tant chez l'homme que chez l'animal de laboratoire ont confronté chercheurs et cliniciens aux problèmes de l'analyse quantitative automatisée de l'ECG. L'extraction d'informations pertinentes reste une approche difficile qui fait le plus souvent appel à des méthodes statistiques évaluant la variabilité du rythme cardiaque et à une lecture humaine de ces enregistrements. Ces méthodes sont peu adaptées à l'identification et à la quantification automatiques de troubles du rythme tels que les extrasystoles, les épisodes de tachycardie ou de bradycardie susceptibles de survenir lors de certaines pathologies telles que l'insuffisance cardiaque aiguë ou chronique.

Récemment, une approche basée sur la détection de la forme de l'onde du complexe ECG a permis de progresser dans l'analyse des ECG par identification morphologique de certaines anomalies du tracé. Bien que très efficace pour la détection de troubles bien identifiés et enregistrés dans la bibliothèque du logiciel, la limitation de cette approche réside dans le caractère polymorphe des extrasystoles et de certaines arythmies. La méthodologie rapportée ici consiste à utiliser une détection des complexes QRS à l'aide d'une dynamique symbolique appliquée aux intervalles RR. La probabilité d'apparition des séquences de 5 symboles est étudiée et révèle l'occurrence préférentielle de certaines séquences qui vont qualitativement et quantitativement varier en fonction de l'état physiologique, pathologique ou de stimuli externes.

## 1 Introduction

Les troubles de la régularité du rythme cardiaque sont appelés arythmies. Ces phénomènes variés sont fréquents : plus de 2 millions d'américains sont sujets à la fibrillation auriculaire par exemple. Des troubles tels que la fibrillation ventriculaire peuvent conduire à la mort subite. La détection de patients à risque représente donc une étape importante dans la prévention de ce type de pathologies. La variabilité physiologique du rythme cardiaque est partiellement contrôlée par le système nerveux autonome. Les fluctuations du rythme cardiaque peuvent être étudiées par analyse spectrale de séries d'intervalles RR (intervalles entre deux battements consécutifs). Cependant, ce type d'analyse n'est que partiellement efficace puisque l'analyse par transformées de Fourier requiert des séries équidistantes : les arythmies devront donc être éliminées des séries de façon à ne pas conduire à l'élargissement voire à la disparition des bandes au sein du spectre. Il est donc important de pouvoir identifier les arythmies et leur nature, de manière à pouvoir influencer sur les technologies de contrôle du rythme cardiaque telles que les pacemakers ou les défibrillateurs. Il apparaît donc pertinent de développer des stratégies d'analyse de battement à battement, pour lesquelles la théorie des systèmes dynamiques nonlinéaires apporte

Nous montrons que cette approche est particulièrement efficace pour l'identification et la qualification des arythmies.

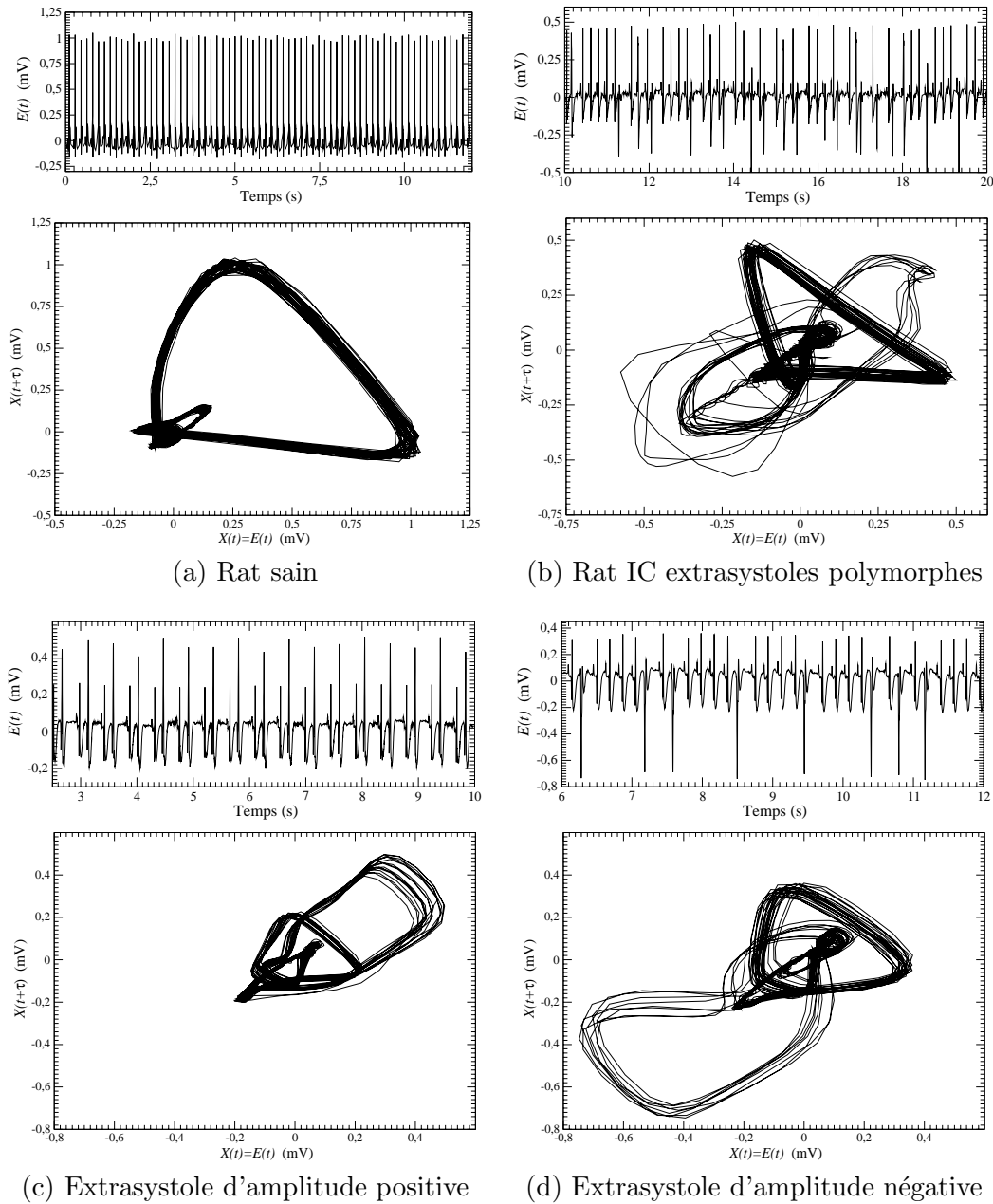


FIG. 1 – Exemples d'électrocardiogrammes et de portraits de phase pour différents rats.

## 2 Acquisition des données électrophysiologiques

Des rats Wistar males sont utilisés pour cette étude. Ils ont libre accès à la nourriture et à l'eau de boisson. Ils sont soumis à une photopériode de 12 heures par 24 heures. Une pathologie cardiaque chronique est induite par la réalisation d'un infarctus obtenu après ligature de l'artère coronaire descendante gauche selon la technique de Pfeffer *et al* [1]. Les rats sont considérés comme insuffisants cardiaques deux mois après la réalisation de la ligature.

des outils intéressants. La dynamique symbolique appliquée dans ce travail convertit une série temporelle en une séquence de symboles qui décrit les propriétés de la dynamique.

L'enregistrement de l'électrocardiogramme est effectué par télémétrie chez l'animal éveillé libre de ses mouvements. Les rats sont implantés avec un capteur émetteur Physiotel TA-F40 (Data Sciences International) dont les électrodes sont placées en dérivation D2. Les ondes ECG sont enregistrées à l'aide du système ART-Gold (Data Sciences International) avec une fréquence d'acquisition de 1000 Hertz, ce qui permet d'assurer un traitement optimal des données. Les ondes ECG sont analysées à l'aide du logiciel ECG-Auto (EMKA) qui permet de générer les séries temporelles de RR qui serviront de base à l'analyse décrite. Deux techniques seront utilisées pour la génération des séries temporelles, l'une par détection de pics et l'autre par la détection de formes d'ondes.

### 3 Electrocardiogrammes et portraits de phase

D'après les travaux initiaux de Poincaré [2], il apparaît qu'un système dynamique nonlinéaire peut être étudié avec succès en représentant une trajectoire décrivant son évolution dans l'espace de phase  $\mathbb{R}^m(\mathbf{x})$  : c'est le portrait de phase qui peut être reconstruit à partir d'une série temporelle d'un simple scalaire en utilisant les coordonnées décalées  $\{x(t), x(t + \tau), x(t + 2\tau), \dots, x(t + (d - 1)\tau)\}$  où  $\tau$  est le décalage.

Quatre portraits de phase différents sont représentés Figs. 1 : en (a), l'exemple d'un portrait de phase d'électrocardiogramme sinusal obtenu à partir d'un rat sain, en (b) un portrait de phase d'électrocardiogramme arythmique obtenu à partir d'un rat insuffisant cardiaque, en (c) et (d) des portraits de phase d'électrocardiogrammes arythmiques obtenus à partir de rats insuffisants cardiaques avec des extrasystoles d'amplitude négative en (c) et positive en (d).

Typiquement, pour l'électrocardiogramme sinusal, l'onde P classiquement de faible amplitude correspond à la boucle de plus petite taille, le complexe QRS présente une forme globalement triangulaire résultant du décalage. La superposition ou non de l'ensemble des ondes représente la variabilité de l'amplitude des ondes de battement à battement. Enfin, l'amplitude du portrait de phase est plus marquée chez le rat sain que chez le rat insuffisant cardiaque, ce qui reflète la moindre amplitude du courant de dépolarisation ventriculaire observée chez le rat insuffisant cardiaque par rapport au rat sain. En ce qui concerne les électrocardiogrammes arythmiques, il apparaît une déformation marquée du portrait de phase dont l'aspect permettra d'approcher la nature positive ou négative de l'onde ainsi que l'amplitude du phénomène. La lecture du portrait de phase permettra donc de visualiser la survenue d'événements polymorphes non sinusaux. On notera ici que le caractère temporel devient implicite compte tenu du mode de représentation, ce qui ne permet pas la visualisation de la périodicité des battements. Ce mode de représentation ne renseignera donc pas sur les modifications de fréquence telles que tachycardie ou bradycardie (à moins qu'elles ne soient associées à des modifications de la forme de l'onde).

### 4 Electrocardiogrammes et applications de premier retour

Un événement arythmique est associé à un changement brutal de fréquence instantanée : sur l'application de premier retour, ceci correspond nécessairement à des points éloignés de la bissectrice. Comme le montrent les deux applications de premier retour (Fig. 2), le rat sain sinusal montre une distribution très proche de la bissectrice, alors que le rat

insuffisant cardiaque arythmique montre une distribution asymétrique avec des <<foyers de points>> s'écartant nettement de la bissectrice. Les trois troubles instantanés les plus fréquemment observables sont la bradycardie (Fig. 3a), la tachycardie (Fig. 3b) et l'extrasystole (Fig. 3c), dont la localisation sur l'application de premier retour est clairement identifiée. Ces <<chemins>> typiques sur l'application de premier retour nous ont naturellement conduits à décrire la dynamique cardiaque à l'aide d'une dynamique symbolique qui nous sert à convertir la série temporelle des intervalles RR en une nouvelle série temporelle construite sur 3 ou 4 symboles. Cette transformation nous donne un outil d'analyse complémentaire à l'analyse des portraits de phase pour l'étude de phénomènes récurrents et de leur périodicité.

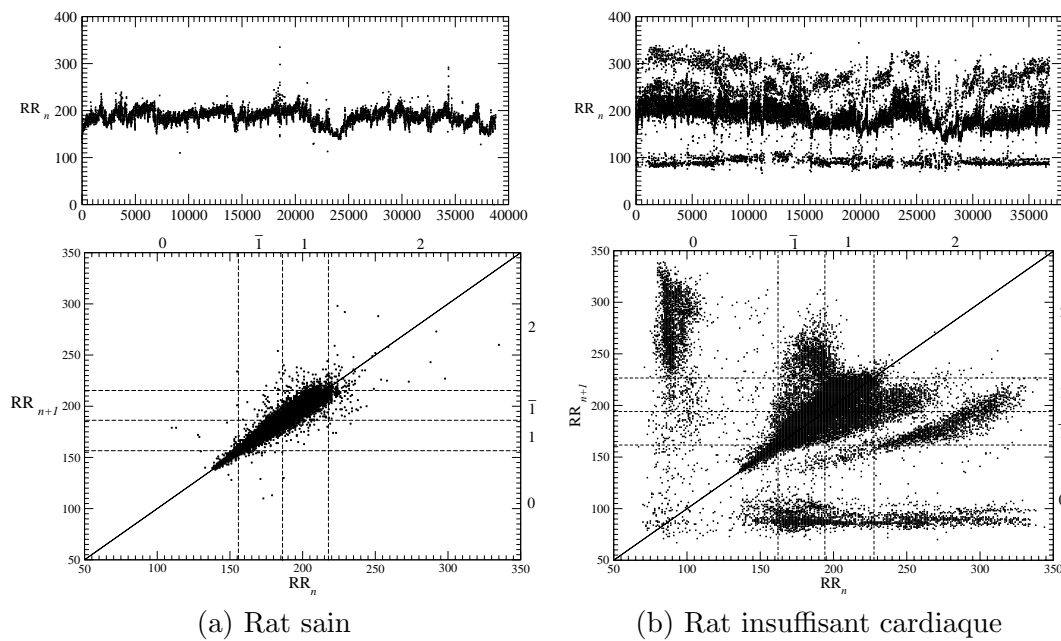


FIG. 2 – Evolution temporelle des intervalles  $RR$  et applications de premier retour. La partition de l'intervalle se fait selon quatre symboles  $0, \bar{1}, 1$  et  $2$ .

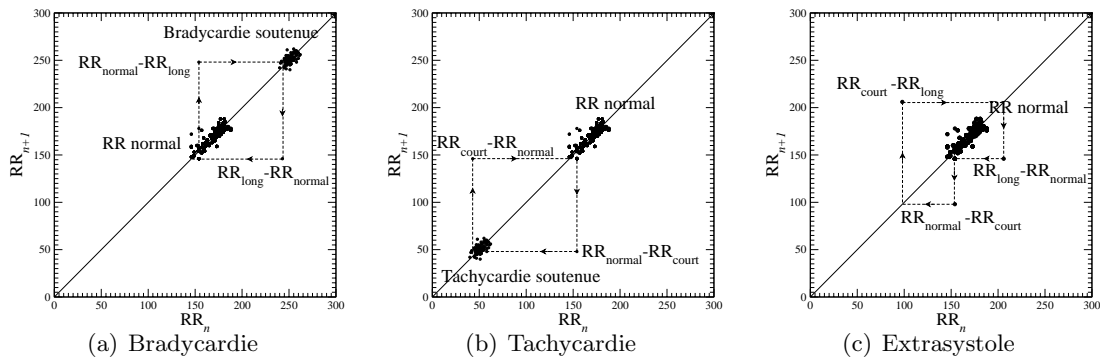


FIG. 3 – Localisation type des arythmies les plus fréquentes sur une application de premier retour construite à partir des intervalles  $RR$ .

## 5 Electrocardiogramme et dynamique symbolique

La première étape de cette approche est de définir une partition acceptable permettant de définir les différents symboles. En présence de dynamiques sous-jacentes à des processus du vivant, il n’y a pas de critères clairs *a priori* pour choisir une telle partition. Dans une étude chez l’homme [3], quatre symboles sont utilisés pour traiter les intervalles RR. Pour la majorité des cas rencontrés ici, trois symboles (0, 1 et 2) peuvent suffire. Cependant, pour affiner notre stratégie, nous avons divisé le symbole médian (1) en deux sous symboles  $\bar{1}$  et 1. De manière à étudier des processus dynamiques sur des durées relativement longues, de longues séquences devraient être étudiées. Cependant, en pratique des séquences de longueurs supérieures à 10 deviennent fastidieuses à interpréter et nous avons choisi compte tenu du type d’évènements observés de travailler avec des séquences de 5 symboles successifs, soit  $4^5 = 256$  combinaisons possibles.

Pour déterminer le positionnement des limites de la partition, nous avons tout d’abord réalisé un filtrage de l’application de premier retour, de façon à extraire la structure principale du diagramme. Il apparaît tout d’abord un nuage elliptique centré sur la bissectrice qui correspond à la variabilité sinusale, une fine queue est identifiée en direction des RR courts. Le seuil entre cette queue et l’ellipse sinusale est déterminé pour une épaisseur de 5 ms. Enfin, deux îlots de points sont identifiés l’un au dessus de l’ellipse, l’autre au dessous de l’ellipse. Ces îlots sont associés aux complexes prématures, c’est-à-dire aux extrasystoles. Dans les cas décrits, il y a absence de bradycardie soutenue, le seuil supérieur correspondra donc aux limites supérieures de l’ellipse sinusale. Enfin, le symbole 1 sera découpé en deux portions équidistantes comme cela est le cas pour les applications présentées Figs. 2.

## 6 Comparaison rats sains, rats insuffisants cardiaques

Le tableau ci dessous rapporte les données comparatives calculées à partir de rats sains et de rats insuffisants cardiaques. Il apparaît clairement que les paramètres statistiques classiques ( $\overline{RR}$ ) ne sont pas discriminants alors que les paramètres basés sur la dynamique symbolique permettent de séparer les animaux sains des animaux insuffisants cardiaques.

De même, les histogrammes de probabilité de visite des séquences sont très différents entre les rats sains et les rats insuffisants cardiaques. Il apparaît clairement que les séquences incluant le motif “1021”, qui correspondent aux motifs d’extrasystoles, sont très rarement visitées chez les rats sains et beaucoup plus visitées chez les rats insuffisants cardiaques.

Une analyse plus fine des histogrammes de visite de séquence permet de quantifier d’autres troubles arythmiques tels que la tachycardie ventriculaire non soutenue ou la bigéminie, démontrant ainsi tout l’intérêt et la puissance de cette approche de l’identification et de la quantification des arythmies cardiaques par dynamique symbolique. Cette approche symbolique devrait ouvrir pour le clinicien des horizons intéressants pour la discrimination de sujets sains, et pathologiques ainsi que l’identification du degré de développement de certaines pathologies comportant des troubles du rythme cardiaque. A plus long terme, il sera intéressant d’appliquer ce type de méthode pour tenter d’analyser si certaines séquences pourraient être identifiées comme précurseur du déclenchement de troubles du rythme.

TAB. 1 – Caractéristiques de l'évolution des intervalles  $RR$  chez des rats sains et des rats insuffisants cardiaques. Les valeurs moyennes,  $\overline{RR}$ , la partition  $\rho_1$  entre 0 et 1,  $\rho_2$  entre 1 et 2 sont reportées. L'entropie de Shannon  $S_n = -\sum_{i=1}^N P_n \log P_n$  est également calculée pour les séquences sur trois symboles  $\{0, 1, 2\}$ , quatre  $\{0, \overline{1}, 1, 2\}$  et deux  $\{\overline{1}, 1\}$ .

Rats	$\overline{RR}$	$\rho_1$	$\rho_2$	$S_{\{0,1,2\}}^5$	$N_{P/\emptyset}$	$S_{\{0,\overline{1},1,2\}}^4$	$N_{P/\emptyset}$	$S_{\{\overline{1},1\}}^8$
Rats sains								
H <sub>1</sub>	$0.168 \pm 0.015$	0.141	0.200	0.28	0.73	1.61	0.79	1.50
H <sub>2</sub>	$0.171 \pm 0.025$	0.159	0.225	0.79	0.75	1.82	0.76	1.75
H <sub>3</sub>	$0.186 \pm 0.015$	0.162	0.216	0.47	0.70	1.88	0.68	1.67
H <sub>4</sub>	$0.181 \pm 0.011$	0.161	0.215	0.25	0.76	1.53	0.78	1.41
Rats insuffisants cardiaques								
C <sub>1</sub>	$0.187 \pm 0.044$	0.161	0.227	2.93	0.22	3.65	0.12	1.91
C <sub>2</sub>	$0.204 \pm 0.033$	0.168	0.238	2.32	0.50	3.40	0.29	2.05
C <sub>3</sub>	$0.189 \pm 0.021$	0.165	0.215	2.18	0.54	3.66	0.38	2.52
C <sub>4</sub>	$0.193 \pm 0.025$	0.176	0.232	1.11	0.45	2.60	0.33	2.13
C <sub>5</sub>	$0.193 \pm 0.020$	0.171	0.225	1.44	0.45	2.95	0.25	2.100
C <sub>6</sub>	$0.205 \pm 0.020$	0.174	0.226	1.79	0.28	2.90	0.19	1.69
C <sub>7</sub>	$0.200 \pm 0.016$	0.178	0.230	2.02	0.60	2.66	0.28	2.05

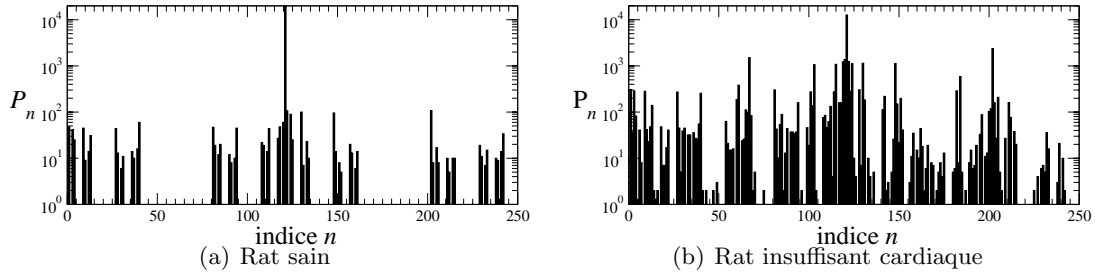


FIG. 4 – Densité de probabilité des séquences réalisées par les intervalles  $RR$  d'un rat sain (a) et d'un rat insuffisant cardiaque (b).

## Références

- [1] M. Pfeffer, J. Pfeffer, M. Fishbein, P. Fletcher, J. Sparado, R. Kloner & E. Braunwald, *Myocardial infarct size and ventricular functions in rats*, Circulation Research, **44**, 503-512 (1979).
- [2] H. Poincaré, *Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle*, Journal de Mathématiques, 3<sup>e</sup> série, **7**, 375-422 (1881).
- [3] J. Kurth, A. Voss, P. Saparin, A. Witt, H. J. Kleiner & N. Wessel, *Quantitative analysis of heart rate variability*, Chaos, **5** (1), 88-94 (1995).



## Etude de la transition 3D-2D des écoulements turbulents en rotation

C. Morize, F. Moisy, M. Rabaud

*Laboratoire FAST, Bât. 502, 91405 Orsay Cedex*

`morize@fast.u-psud.fr`

### Résumé

La transition entre la turbulence tridimensionnelle et la turbulence bidimensionnelle sous l'effet d'une rotation est étudiée expérimentalement. L'écoulement turbulent est généré par la translation d'une grille dans une cuve remplie d'eau, et un système de vélocimétrie par images de particules est utilisé pour mesurer les champs de vitesse instantanés dans le repère tournant. Le spectre d'énergie des fluctuations spatiales de vitesse  $E(k)$ , à faible vitesse angulaire, mesuré dans le plan normal à l'axe de rotation, présente une loi d'échelle en  $k^{-5/3}$ , en accord avec la théorie de Kolmogorov pour les écoulements 3D homogène. Cependant lorsque l'effet de la rotation augmente, nous observons que le spectre d'énergie passe à une loi en  $k^{-2}$ , propre aux écoulements dominés par la rotation.

## 1 Introduction

Les propriétés statistiques des écoulements turbulents en présence de rotation ont une grande importance en géophysique. En effet, les écoulements atmosphériques et océaniques sont turbulents à grande échelle et, observés par rapport à la surface de la Terre, ils s'effectuent dans un repère tournant à vitesse angulaire  $\Omega$ . Ces écoulements sont caractérisés par un petit nombre de Rossby et sont fortement influencés par la rotation. La rotation, dans la limite de nombre de Rossby très petit, tend à bidimensionnaliser les écoulements en inhibant les variations de vitesse selon l'axe parallèle à l'axe de rotation (théorème de Taylor-Proudman). Qu'en est-il des écoulements turbulents en présence d'une forte rotation? Il semble qu'à nombre de Rossby infiniment petit, l'écoulement initialement 3D, caractérisé par une cascade directe d'énergie, se bidimensionnalise en donnant naissance à une cascade inverse d'énergie et à une cascade d'entrophie, comme le prévoit la théorie de la turbulence 2D. Cependant, la transition d'un régime à l'autre est encore mal comprise. En effet, comment l'influence de la force de Coriolis, à vitesse angulaire modérée, se manifeste et comment elle modifie les descriptions usuelles de la cascade directe d'énergie et de la loi de puissance des spectres d'énergie des écoulements 3D? L'objectif de cette expérience consiste justement à caractériser un régime intermédiaire entre des écoulements 3D et 2D.

## 2 Dispositif expérimental

Le dispositif expérimental que nous utilisons, inspiré de celui utilisé par Hopfinger et al. (1982) [1], est présenté sur la figure 1(a). Il se compose d'une cuve de section carrée (35 cm de côté) et de 55 cm de hauteur, disposée sur une plaque tournant à vitesse angulaire  $\Omega$ , qui peut être ajustée entre 0 et  $4.8 \text{ rad.s}^{-1}$ . Un plafond est placé sous la surface libre de façon à éviter que les ondes de surface n'affectent l'écoulement et pour éliminer les

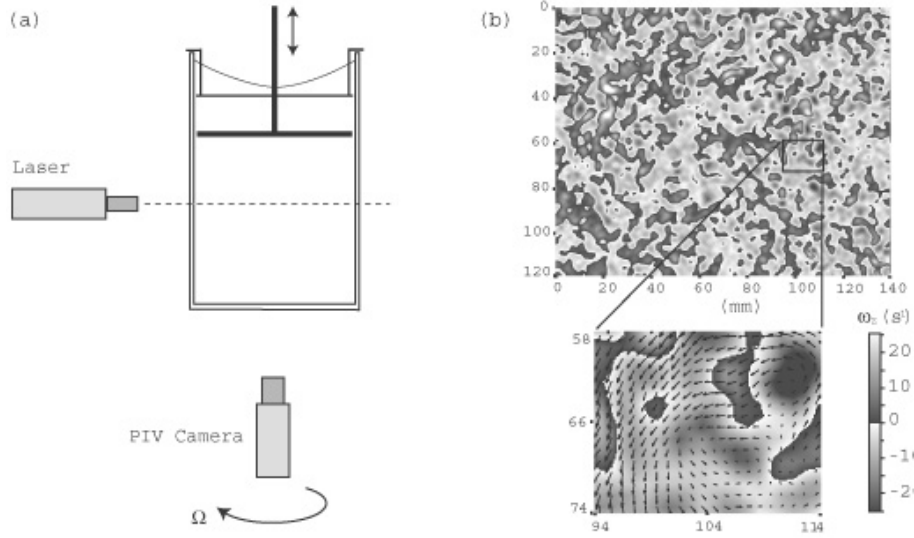


FIG. 1 – (a) Schéma du dispositif expérimental. (b) Exemple d'un champ de vorticité  $\omega_z$  obtenu par PIV.

variations de hauteur du fluide, dues à la surface parabolioïde. L'écoulement turbulent est généré par la translation verticale rapide d'une grille sur toute la hauteur de la cuve. La turbulence de grille est fréquemment utilisée parce qu'elle a la particularité de produire des écoulements turbulents approximativement homogènes et isotropes. La grille que nous utilisons a une solidité de 45% et est caractérisée par une maille  $M = 39$  mm avec des barreaux de 1 cm de largeur. La dimension  $M$  de la maille de la grille détermine l'échelle d'injection de l'énergie, de nombre d'onde  $k_i = 2\pi/M$ . Les fluctuations de vitesse que nous obtenons sont de l'ordre de  $u' \simeq 0.2$  m/s lorsque l'on impose une vitesse de grille d'environ 1 m/s.

Les mesures sont effectuées au moyen d'un système de vélocimétrie par images de particules (PIV), permettant d'accéder au champ de vitesse instantané dans le plan horizontal  $(x, y)$  normal à l'axe de rotation. L'écoulement estensemencé de billes de verre sphériques, de diamètre moyen  $11 \mu\text{m}$  et de densité  $\rho = 1.1 \text{ g.cm}^{-3}$ . Nous utilisons un double laser pulsé qui produit une nappe horizontale afin d'illuminer les particules. L'acquisition des images est réalisée à l'aide d'une caméra CCD double frame de résolution  $1280 \times 1024$  pixels. La caméra est placée dans le référentiel tournant avec la cuve. En revanche, pour des raisons de place, le laser reste fixe dans le référentiel du laboratoire.

La translation de la grille est assurée par un moteur et est synchronisée avec l'acquisition des images. Nous sommes donc en mesure de générer des écoulements de turbulence forcée statistiquement stationnaire dans des conditions contrôlées et reproductibles. De ce fait, nous pouvons assurer la convergence et la stabilité de nos résultats en faisant des moyennes d'ensemble de plusieurs expériences statistiquement indépendantes.

Les champs de vitesse instantanés sont caractérisés par deux nombres sans dimension : le nombre de Reynolds,  $Re = u'M/\nu$ , et le nombre de Rossby,  $Ro = u'/2\Omega M$ , basés sur les fluctuations de vitesse  $u'$  et sur la maille de la grille  $M$ . Le nombre de Rossby compare les

effets inertiels à la force de Coriolis, c'est à dire que plus le nombre de Rossby sera petit, plus l'importance de la rotation sera grande. Typiquement, nous obtenons des nombres de Reynolds entre 400 et 5000, tandis que le nombre de Rossby balaie la gamme 0.02 - 6.

### 3 Mesures du déclin de l'énergie

L'écoulement turbulent est généré, dans le sillage de la grille, par l'interaction de plusieurs jets, de la taille caractéristique d'une maille  $M$ . Cependant, dans les expériences réalisées en soufflerie, il a été montré qu'il est nécessaire de se placer à une certaine distance en aval de la grille afin que le régime d'écoulement homogène et isotrope s'établisse, c'est à dire lorsque les jets ont tous interagi les uns avec les autres. Nous étudions donc, dans un premier temps, le déclin de l'énergie, afin de déterminer le temps après le passage de la grille à partir duquel notre écoulement entre dans un régime de turbulence en déclin homogène et isotrope.

Dans notre expérience, il ne s'agit pas de se placer à une distance  $x$  en aval de la grille, mais plutôt d'attendre un certain temps  $t$  après son passage. Les fluctuations RMS de vitesse, à un instant  $t$ , s'expriment généralement [3] sous la forme :

$$\left(\frac{u'}{V_g}\right)^2 = \Lambda \left(\frac{tV_g}{M}\right)^{-2n}, \quad (1)$$

où  $V_g$  est la vitesse de la grille,  $n > 0$  est l'exposant de déclin et  $\Lambda$  est une constante qui dépend de la géométrie de la grille.

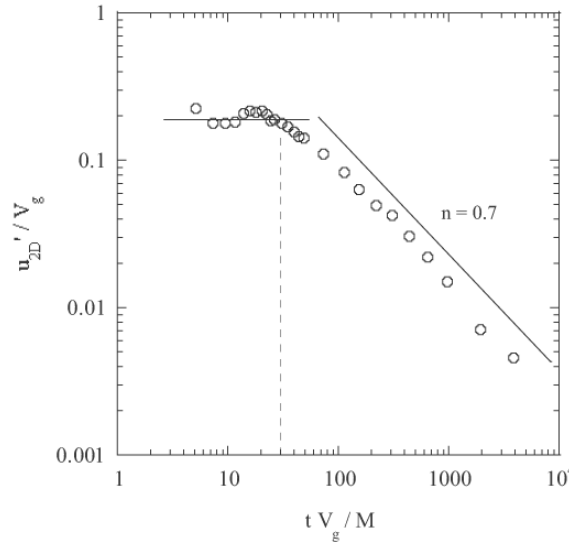


FIG. 2 – Variation des fluctuations de vitesse  $u'/V_g$  dans le plan  $(x,y)$ , pour un écoulement turbulent en absence de rotation, en fonction du temps adimensionné  $tV_g/M$ . Chaque point a été moyenné à partir de 20 à 50 champs de vitesse.

La figure 2 présente le déclin des fluctuations de vitesse au cours du temps adimensionné  $tV_g/M$ . On remarque que les fluctuations de vitesse, mesurées dans le plan  $(x,y)$ , restent approximativement constantes jusqu'à un temps caractéristique de l'ordre

de  $\sim 30M/V_g$ . A partir de ce temps adimensionné, on observe un déclin des fluctuations de vitesse, en loi de puissance, avec un exposant  $n \simeq 0.7$ . Cette valeur est comparable, mais légèrement supérieure, aux valeurs obtenues dans les expériences de soufflerie [3], où  $n$  vaut entre 0.5 et 0.65. La relative petite taille de notre cuve peut probablement expliquer que la dissipation d'énergie y soit légèrement plus rapide.

Dans la suite, nous attendrons un certain temps équivalent au déplacement de 30 mailles, de sorte que l'acquisition des données s'effectue au début du régime de déclin homogène.

## 4 Spectres d'énergie

La figure 3 présente deux spectres d'énergie des fluctuations spatiales de vitesse, mesurés dans le plan horizontal  $(x, y)$  à partir des champs de vitesse obtenus par PIV. Les deux spectres ont été calculés à partir d'écoulements turbulents en présence d'une faible rotation,  $\Omega = 0.6 \text{ rad.s}^{-1}$ , et en présence d'une forte rotation,  $\Omega = 4.5 \text{ rad.s}^{-1}$ . Chaque spectre est calculé comme la moyenne des composantes  $x$  et  $y$  des spectres 1D longitudinaux  $E_x(k_x)$  et  $E_y(k_y)$ . Il est important de préciser que ces deux spectres ont été obtenu en moyennant 50 spectres individuels. Le spectre de la figure 3 (a) a été obtenu à partir d'un écoulement caractérisé par un nombre de Reynolds  $Re \simeq 1700$  et un nombre de Rossby  $Ro \simeq 0.94$ . On remarque, bien que le nombre de Rossby soit de l'ordre de l'unité, que le spectre a une loi de puissance en  $k^{-5/3}$ , en accord avec la théorie de Kolmogorov pour les écoulements tridimensionnels. Le spectre de la figure 3 (b) est obtenu dans les mêmes conditions expérimentales que le premier, avec une vitesse de rotation beaucoup plus importante ( $Ro \simeq 0.13$ ). On remarque que ce spectre semble présenter deux régimes, caractérisés par deux lois d'échelle, la première en  $k^{-2}$  aux grandes échelles et la deuxième en  $k^{-5/3}$  aux petites échelles, séparés par une échelle de transition  $k_c$ .

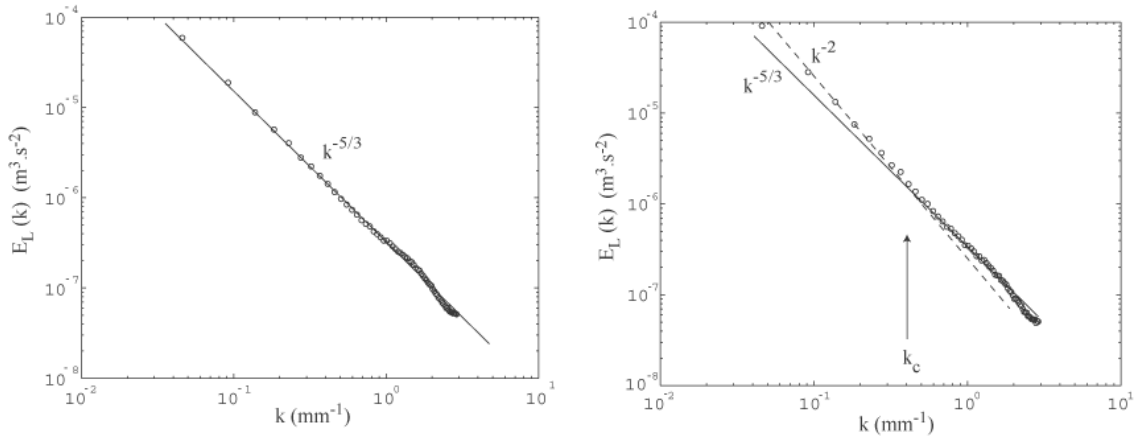


FIG. 3 – Spectres d'énergie dans le plan horizontal. (a) Faible rotation  $\Omega = 0.6 \text{ rad.s}^{-1}$  ( $Ro \simeq 0.94$  et  $Re \simeq 1700$ ), présentant une pente en  $k^{-5/3}$ . (b) Forte rotation  $\Omega = 4.5 \text{ rad.s}^{-1}$  ( $Ro \simeq 0.13$  et  $Re \simeq 1700$ ) présentant simultanément un régime en  $k^{-2}$  et un régime en  $k^{-5/3}$ . Le trait plein sur ces deux spectres a une pente en  $k^{-5/3}$ , en accord avec la théorie de Kolmogorov, et le trait en pointillé a une pente en  $k^{-2}$ .

Ce nouveau régime en  $k^{-2}$  a été prédit par des arguments phénoménologiques par Zhou (1995) [4], et repose sur l'idée que pour des échelles  $r$  suffisamment grandes, l'écoulement est dominé par la rotation. En effet, lorsque l'on rajoute de la rotation à un écoulement tridimensionnel, il apparaît une échelle  $r_c$ , pour laquelle le nombre de Rossby local est égal à l'unité, c'est à dire que la vorticité des structures, à cette taille, est égale à la vorticité ambiante du système,  $\omega_{r_c} \sim 2\Omega$ . Cette échelle  $r_c$  est une échelle de transition entre un régime, aux grandes échelles, dominé par la rotation et caractérisé par un nombre de Rossby inférieur à l'unité, et un régime tridimensionnel aux petites échelles, caractérisé par un nombre de Rossby supérieur à 1. Zhou [4] a alors fait l'hypothèse, pour le régime dominé par la rotation, que les transferts d'énergie se font sur un temps caractéristique de rotation  $\Omega^{-1}$ , plutôt que sur le temps de retournement  $\tau_r \sim r/u'_r$ , et en a déduit que le spectre d'énergie présente une loi de puissance en  $k^{-2}$ .

Sur le spectre de la figure 3 (b), la rotation affecte donc uniquement les grandes échelles de l'écoulement, telles que  $r > r_c = 2\pi/k_c \simeq 16$  mm, tandis que les petites échelles sont essentiellement tridimensionnelles. On peut donc s'attendre à ce que la rotation domine toutes les échelles du régime inertiel lorsque l'échelle de transition  $r_c \lesssim 20\eta$ , où  $20\eta$  est l'échelle d'apparition du régime dissipatif et  $\eta$  est l'échelle de Kolmogorov, c'est à dire lorsque le nombre de Rossby vérifie  $Ro \lesssim Re^{-1/2}$ . Pour des nombres de Reynolds de  $\sim 1700$ , il faudrait atteindre des nombres de Rossby de l'ordre de 0.02 pour obtenir un spectre dominé par la rotation et caractérisé par une loi de puissance en  $k^{-2}$  sur tout le domaine inertiel. Cependant, notre dispositif expérimental ne nous permet pas d'atteindre des nombres de Rossby si petits pour de tels nombres de Reynolds, c'est pourquoi seul un régime mixte  $k^{-2} - k^{-5/3}$  a pu être observé.

## 5 Conclusion

Notre expérience nous a permis d'observer un régime intermédiaire entre écoulement 3D et 2D, pour lequel le spectre d'énergie présente simultanément les deux régimes : un régime aux grandes échelles dominé par la rotation ( $E(k) \sim k^{-2}$ ), coexistant avec un régime aux petites échelles similaire au cas 3D ( $E(k) \sim k^{-5/3}$ ). Il est à noter que la loi d'échelle en  $k^{-2}$  diffère de celles obtenues dans les régimes de cascade inverse d'énergie ( $E(k) \sim k^{-5/3}$ ) et de cascade d'énstrophie ( $E(k) \sim k^{-3}$ ) de la turbulence 2D. Il serait intéressant, par la suite, d'essayer de déterminer précisément la gamme de nombre de Rossby où un tel régime mixte est observable.

## Références

- [1] E. J. Hopfinger, F. K. Browand and Y. Gagne, *Turbulence and waves in a rotating tank*, J. Fluid Mech., **125**, 505 (1982).
- [2] C. N. Baroud, B. B. Plapp, Z.-S. She and H. L. Swinney, *Anomalous Self-Similarity in a Turbulent Rapidly Rotating Fluid*, Phys. Rev. Lett. **88**, 114501 (2002).
- [3] I. P. D. De Silva and H. J. S. Fernando, *Oscillating grids as a source of nearly isotropic turbulence*, Phys. Rev. Lett., **6**, (1994).
- [4] Y. Zhou, *A phenomenological treatment of rotating turbulence*, Phys. Fluids, **7**, 2092 (1995).



## Estimation de la rigidité de torsion de l'ADN

Sébastien Neukirch

*Institut de Mathématiques Bernoulli,  
École Polytechnique Fédérale de Lausanne,  
CH-1015 Lausanne, Suisse*

*et*

*Laboratoire de Physique Statistique,  
École Normale Supérieure,  
F-75231 Paris CEDEX 05, France.*

`sebastien.neukirch@lps.ens.fr`

### Résumé

Nous utilisons un modèle de tige élastique avec contact pour décrire les expériences d'étirement sous contrainte de torsion d'une molécule unique d'ADN. Ces expériences consistent à mesurer la distance bout à bout, notée  $z$ , de la molécule d'ADN en fonction du nombre  $n$  de tours de torsion qui lui est imposé. A fort sur-enroulement la courbe  $z(n)$  est une droite de pente négative : la distance entre les deux extrémités de la molécule décroît linéairement avec  $n$ . Ceci correspond à la formation d'une structure en plectonèmes : enroulement en hélice de la molécule sur elle-même. Notre modèle reproduit cette réponse de sur-enroulement et permet d'extraire des données expérimentales : (1) le rayon  $\rho$  de sur-enroulement (qui est supérieur ou égal au rayon cristallographique de l'ADN) et (2) la rigidité en torsion  $K_3$  de la molécule d'ADN. Il ressort que  $\rho$  dépend de la force d'étirement et de la nature de la solution tampon utilisée, alors que  $K_3$  décroît avec cette dernière.

## 1 Introduction

La molécule d'ADN est tout d'abord le porteur de nos caractères héréditaires et nombre de recherches en génétique ne prennent pas (encore ?) en compte ses propriétés mécaniques. Néanmoins lorsqu'il s'agit de comprendre comment un double brin d'ADN de presque deux mètres de long est saucissonné dans un noyau de  $10\ \mu m$  de rayon, il devient nécessaire de considérer ses propriétés physiques, en particulier le fait que la double hélice d'ADN est un filament élastique de grand rapport d'aspect qui peut s'enrouler sur lui-même ou autour d'autres structures (e.g. histones). De plus les propriétés élastiques de l'ADN jouent un rôle important dans la dynamique de divers processus cellulaires tels que la réplication ou la transcription. Bien que les caractéristiques principales de la molécule d'ADN aient été découvertes dans les années suivant l'établissement de la géométrie en double hélice, c'est seulement lors de la dernière décennie que quelques groupes dans le monde, au moyen de différentes micro-techniques, ont acquis la maîtrise nécessaire pour manipuler des molécules isolées.

Une première façon de manipuler une molécule unique d'ADN est d'attacher une bille de polystyrène à chacune de ses extrémités. Une des billes est maintenue par aspiration à l'embouchure d'une micro-pipette, tandis que l'autre est piégée dans un faisceau laser fortement localisé. A l'aide d'un dispositif piézo-électrique, on déplace la micro-pipette

tout en mesurant la force appliquée via le déplacement de la bille dans le piège optique. Cet appareillage est souvent appelé *pincettes optiques* [1].

Il apparaît évident que les propriétés mécaniques d'une molécule d'ADN dépendent de la séquence de paires de bases dont celle-ci est constituée. Cependant pour des assemblages comprenant plusieurs centaines de paires de bases, le comportement de la molécule en solution est décrit de manière satisfaisante par le modèle du ver [2]. Dans ce modèle, l'ADN est considéré comme un polymère semi-flexible doté d'une longueur de persistance en flexion notée  $A$ . Le long d'un polymère semi-flexible l'orientation relative moyenne de deux segments diminue exponentiellement avec la distance curviligne qui les sépare. La longueur de persistance est la longueur caractéristique de décroissance. Elle correspond au rapport entre la rigidité de courbure  $K_0$  du polymère (vu comme une tige élastique) et l'énergie thermique  $k_B T$ , ainsi  $K_0 = A k_B T$ . Une valeur couramment acceptée est  $A = 50 \text{ nm}$  en solution tampon physiologique. Une autre façon de micro-manipuler une molécule unique

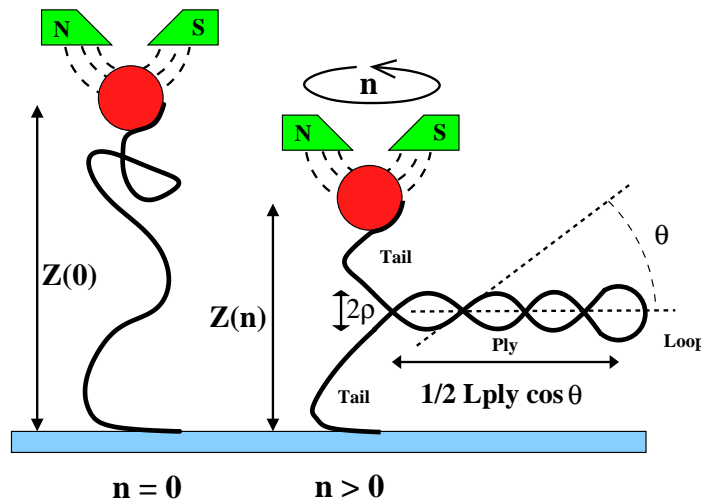


FIG. 1 – Principe de l'expérience d'étirement sous contrainte de torsion à l'aide d'un aimant.

d'ADN est d'utiliser une *pince magnétique* [3]. A l'aide de ligands chimiques, la molécule est alors "agrafée" sur une plaque de verre à un bout tandis que l'autre extrémité est "collée" à une bille paramagnétique. La bille est contrôlée par un aimant que l'on peut tourner pour introduire une contrainte de torsion dans le système. L'aimant exerce aussi une force verticale de tension sur la bille, force dont on règle l'intensité en changeant la distance aimant-bille. La distance séparant les deux extrémités de la molécule, l'*extension spatiale*, est mesurée grâce à un microscope qui en fait évalue la distance entre la bille et la plaque de verre. Les expériences, réalisées à force constante, consistent à graduellement tourner l'aimant autour d'un axe vertical tout en suivant l'extension spatiale  $Z$  de la molécule sous contrainte (voir fig. 1). La force est déduite du mouvement Brownien de la bille. On reporte sur un diagramme l'extension relative  $z = Z/L$  (où  $L$  est la longueur cristallographique de la molécule) en fonction du nombre de tours  $n$  imposés à l'aimant. Tant que l'on ne tourne pas l'aimant,  $n = 0$  (ce qui revient d'après l'équivalence des ensembles thermodynamiques, à n'imposer aucune contrainte de torsion) et l'ADN se comporte comme une chaîne semi-flexible, i.e. l'extension relative  $z$  est fonction de la



température, de la longueur de persistance  $A$  et de la force de tension appliquée  $f$  :

$$z(n=0) = 1 - \left( \frac{4k_B T}{A f} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (1)$$

voir par exemple [4]. On utilise cette relation pour extraire la longueur de persistance  $A$  des données expérimentales. Puis lorsqu'on augmente la rotation, l'extension  $z$  décroît avec le nombre de tours et finalement la molécule en vient à s'enrouler sur elle-même. L'axe de la double hélice décrit alors lui-même une (super-) hélice, on parle de sur-enroulement. Chaque demi pas d'hélice est appelé un *plectonème*. Plusieurs travaux ont décrit cette expérience, introduisant les concepts de modèle du ver avec torsion [5] ou de marche au hasard biaisée par la torsion [6] mais sans jamais prendre en compte réellement la possibilité de contact de la chaîne avec elle-même, ou alors en introduisant les plectonèmes de manière ad-hoc [4].

## 2 Modèle pour le sur-enroulement

Nous présentons ici un modèle élastique qui prend en compte la possibilité de contact de l'ADN, mais néglige les fluctuations thermiques. Nous insistons sur le fait que, dans le régime où les plectonèmes sont formés, toute la physique nécessaire pour décrire quantitativement le sur-enroulement semble être présente dans ce modèle élastique avec contact et à température nulle. Au vue de la géométrie des paires de bases de l'ADN, il semble que si l'on veut considérer cette molécule comme une tige élastique, la section de cette tige ne doit pas être prise symétrique, i.e. la tige à deux rigidités de courbure  $K_1$  et  $K_2$  différentes. Toutefois il a été montré que si l'on a affaire à une molécule d'ADN suffisamment longue (plusieurs dizaines de paires de bases), on peut utiliser un modèle effectif ne comprenant qu'une seule rigidité de courbure, celle-ci étant la moyenne harmonique de deux rigidités de départ [7] :  $K_0^{-1} = (K_1^{-1} + K_2^{-1})/2$ . Ainsi, afin de se concentrer sur le sur-enroulement, nous considérons ici le modèle de tige élastique le plus simple qui prenne en compte les effets de torsion et puisse avoir des déformations spatiales. Nous appuyant sur l'appellation classique d'*elastica* d'*Euler*, nous introduisons ici le terme d'*elastica de Kirchhoff* pour le présent modèle [8]. L'énergie de déformation élastique s'écrit :

$$E = \frac{1}{2} \int_0^L (K_0 \kappa^2(s) + K_3 \tau^2(s)) ds \quad (2)$$

où  $s$  est l'abscisse curviligne,  $\kappa(s)$  la courbure de la ligne centrale et  $\tau(s)$  la torsion du matériau (contenu dans la section d'abscisse  $s$ ) autour de la ligne centrale, différente de la torsion géométrique de Frenet qui elle est la simple torsion géométrique de la ligne centrale. Dans le cas d'un *elastica* de Kirchhoff  $\tau$  est une constante de  $s$ . Enfin  $K_0$  et  $K_3$  sont les rigidités de courbure et de torsion, respectivement. Les équations d'équilibre de Kirchhoff s'écrivent :

$$\mathbf{F}'(s) + \mathbf{p}(s) = \mathbf{0} \quad (3)$$

$$\mathbf{M}'(s) + \mathbf{R}'(s) \times \mathbf{F}(s) = \mathbf{0} \quad (4)$$

où  $\mathbf{F}(s)$  and  $\mathbf{M}(s)$  sont la force et le moment internes. La force externe par unité de longueur  $\mathbf{p}(s)$  permet d'introduire l'effet d'une répulsion électrostatique, de la pesanteur,

ou d'un contact de type cœur dur. La ligne centrale de la tige, notée  $\mathbf{R}(s)$ , a une tangente notée  $\mathbf{t}(s) = \mathbf{R}'(s)$ . Dans le cas d'un elastica de Kirchhoff, on peut montrer [9] que :

$$K_0 \mathbf{t}'(s) = \mathbf{M}(s) \times \mathbf{t}(s) \quad (5)$$

$$K_0 \mathbf{d}_1'(s) = (\mathbf{M}(s) - \tau(K_3 - K_0)\mathbf{t}(s)) \times \mathbf{d}_1(s) \quad (6)$$

où  $\mathbf{d}_1(s)$  est un vecteur de norme unité, appartenant à la section droite de la tige et permettant de suivre la torsion de cette section autour de la ligne centrale. Pour une molécule d'ADN, ce vecteur est généralement pris comme pointant continuellement vers le grand sillon. Pour les parties de la tige qui sont libres de contact et de tout autre

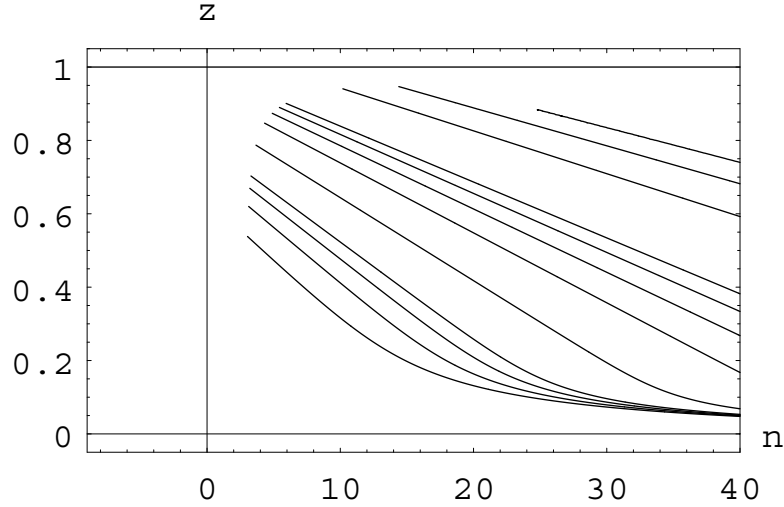


FIG. 2 – Résultats numériques : extension relative  $z$  en fonction du nombre de tours  $n$  pour différentes valeurs de la tension  $f$ , mais à rapport d'aspect fixé  $L = 3400\rho$ .

influence externe, on a  $\mathbf{p}(s) \equiv \mathbf{0}$  et le vecteur force est constant de  $s$ . On note  $\rho$  le rayon de la section circulaire de la tige. Dans le cas d'un contact reflexif, il y a deux points le long de celle-ci, disons d'abscisse curviligne  $s_1$  et  $s_2$ , qui sont à distance  $2\rho$  l'un de l'autre :  $|\mathbf{R}(s_1) - \mathbf{R}(s_2)| = 2\rho$ . Au point d'abscisse  $s_1$ , nous imposons un saut vectoriel pour la force  $\mathbf{F}(s)$  :

$$\mathbf{F}(s < s_1) = \mathbf{F}(s > s_1) + \frac{\Delta F_{12}}{2\rho} (\mathbf{R}(s_1) - \mathbf{R}(s_2)) \quad (7)$$

où  $\Delta F_{12}$  est un réel positif. Le même traitement est réalisé au point  $s_2$ , avec la même intensité  $\Delta F_{12}$  [9, 10]. Cela revient à introduire un delta de Dirac pour la force externe  $\mathbf{p}(s)$ . Dans le cas où le contact a lieu sur une partie continue de la tige,  $\mathbf{p}(s)$  est une fonction vectorielle dont l'intensité et la direction sont continûment variables. Nous ne considérons ici que des cas où le contact entre deux parties de la tige intervient en des points isolés ou le long de lignes droites. Ce modèle a déjà été utilisé [11, 12] et est longuement décrit dans [10].

A priori nous cherchons des configurations d'équilibre d'un elastica de Kirchhoff qui satisfont aux conditions de bords correspondant à l'expérience d'étirement avec pince magnétique. Cependant dans le cas d'une tige à grand rapport d'aspect ( $L \gg \rho$ ) soumise

à une forte rotation ( $n \gg 1$ ), les détails géométriques des conditions de bords importent peu. Nous choisissons donc des conditions d'ancrage fixe à bords alignés que nous avons déjà utilisées [9]. Nous isolons numériquement les configurations d'équilibre admissibles à l'aide de méthodes classiques de cheminement; tout d'abord en utilisant un algorithme "maison" construit sur une méthode de tir multiple, puis en faisant appel au code AUTO [13] qui discrétise le problème différentiel avec conditions de bords en suivant un schéma introduisant des polynômes de bas degré comme éléments finis. Différents types de solutions (droites, flambées, sur-enroulées) sont rencontrées. Nous commençons avec une tige droite sans rotation ( $n = 0$ ). Puis nous tournons (numériquement s'entend) la tige graduellement ( $n$  croît). Pour une certaine valeur critique de  $n$ , l'ensemble des solutions droites intersecte (dans l'espace des paramètres) la courbe correspondant aux configurations flambées. Si l'on suit cette nouvelle courbe, on en croise une troisième, cette fois correspondant à des configurations à un point de contact. Cette dernière courbe croisera, plus loin dans l'espace des paramètres, la courbe des configurations à deux points de contact. Nous avons trouvé des solutions allant jusqu'à trois points distincts de contact [9]. Finalement ces solutions bifurquent vers des solutions développant une ligne continue de contact, que nous appelons *configurations sur-enroulées*. Dans une telle solution, les parties en contact continu ont une forme hélicoïdale. Deux parties de la tige se font face et s'enroulent en hélice l'une autour de l'autre pour former une *paire torsadée*. Cette double hélice est définie par son rayon d'enroulement, qui est égal au rayon  $\rho$  de la section de la tige, et par un angle  $\theta$  (voir fig. 1). Chaque fois que l'on change le rapport d'aspect ( $L/\rho$ ) de la tige ou la force de tension appliquée  $f$ , la continuation numérique doit être complètement recommencée. Etant donné que nous négligeons les effets de fluctuation thermique, la première partie de notre courbe de réponse numérique (i.e. à faible  $n$ ) ne correspond pas à la courbe en chapeau trouvée expérimentalement. En revanche notre modèle reproduit précisément la partie de la courbe de réponse ( $n, z$ ) où l'extension relative  $z$  décroît linéairement avec le nombre de tours  $n$ . Il suffit pour cela de considérer le rayon  $\rho$  non pas comme le rayon cristallographique de l'ADN mais comme un rayon effectif de sur-enroulement incorporant les effets aussi bien de répulsion électrostatique qu'entropiques.

### 3 Une formule pour la réponse plectonémique

On vérifie numériquement que pour une courbe à  $f$  et  $L/\rho$  donnés, l'angle hélicoïdal  $\theta$  ne varie pas avec  $n$ . Nous avons conduit un nombre important de continuations numériques de façon à estimer la dépendance de l'angle hélicoïdal  $\theta$  par rapport aux paramètres libres  $f$ ,  $\rho$  (voir fig. 2). Puis nous avons fait varier continûment la force de tension  $f$  à rayon de sur-enroulement  $\rho$  fixé et ensuite nous avons fait varier  $\rho$  à  $f$  fixe. Enfin, en ajustant les résultats numériques (comme dans [14]) nous trouvons que  $\theta$  dépend de  $f$ ,  $\rho$  et  $K_0$  de la façon suivante :

$$f = \frac{K_0}{\rho^2} \phi_3(\theta) \text{ avec } \phi_3(\theta) = 1.65805 \theta^4. \quad (8)$$

En fittant les données expérimentales à  $n = 0$  avec la formule (1), on obtient que pour une solution tampon de phosphate à 10 mM, la rigidité de courbure vaut  $K_0 = 51 \text{ nm } k_B T$  alors que pour une solution tampon de phosphate à 150 mM et de magnésium à 5 mM, la rigidité de courbure vaut  $K_0 = 57 \text{ nm } k_B T$ . Si maintenant on utilise la formule (8) couplée à une décomposition du nombre d'enlacements de la molécule d'ADN en twist et vrillage (formule de Călugăreanu), on peut extraire le rayon effectif d'enroulement  $\rho$  et la rigidité de torsion  $K_3$  de chacune des courbes de réponse expérimentales [15]. On obtient, pour la solution

tampon de phosphate à 10 mM, une rigidité de torsion valant  $K_3 = (90 \pm 10) nm k_B T$ , et pour la solution tampon de phosphate à 150 mM et de magnésium à 5 mM, une rigidité de torsion valant  $K_3 = (60 \pm 2) nm k_B T$ . On voit ainsi que si la rigidité de courbure de l'ADN ne varie apparemment pas de manière importante avec le type et la concentration de la solution tampon qui la baigne, il apparaît que la rigidité de torsion, elle, y est sensible. Nous pouvons donc faire l'hypothèse que la contribution électrostatique à la rigidité de torsion est importante, contrairement à ce qui a été avancé [16].

Je remercie ici Gilles Charvin, Vincent Croquette et David Bensimon de m'avoir fourni des données expérimentales parfois non encore publiées.

## Références

- [1] Stephen R. Quake, Hazen Babcock, and Steven Chu. The dynamics of partially extended single molecules of DNA. *Nature*, 388:151–154, 1997.
- [2] O. Kratky and G. Porod. Röntgenuntersuchung geloster fadenmoleküle. *Rec. Trav. Chim.*, 68:1106–1123, 1949.
- [3] T. R. Strick, J.-F. Allemand, D. Bensimon, A. Bensimon, and V. Croquette. The elasticity of a single supercoiled DNA molecule. *Science*, 271:1835–1837, 1996.
- [4] J. F. Marko and E. D. Siggia. Statistical mechanics of supercoiled DNA. *Phys. Rev. E*, 52(3):2912–2938, 1995.
- [5] C. Bouchiat and M. Mézard. Elastic rod model of a supercoiled DNA molecule. *Eur. Phys. J. E.*, 2:377–402, 2000.
- [6] J. David Moroz and Philip Nelson. Torsional directed walks, entropic elasticity, and DNA twist stiffness. *PNAS*, 94:14418, 1997.
- [7] S. Kehrbaum and J. H. Maddocks. Effective properties of elastic rods with high intrinsic twist. In Michel Deville and Robert Owens, editors, *Proceedings of the 16th IMACS World Congress 2000*, 2000. ISBN 3-9522075-1-9.
- [8] Sébastien Neukirch and Michael E. Henderson. Classification of the spatial clamped elastica: symmetries and zoology of solutions. *Journal of Elasticity*, 68:95–121, 2002.
- [9] G. H. M van der Heijden, S. Neukirch, V. G. A. Goss, and J. M. T. Thompson. Instability and self-contact phenomena in the writhing of clamped rods. *Int. J. Mech. Sci.*, 45:161–196, 2003.
- [10] B. D. Coleman and D. Swigon. Theory of supercoiled elastic rings with self-contact and its application to DNA plasmids. *Journal of Elasticity*, 60:173–221, 2000.
- [11] D. M. Stump, W. B. Fraser, and K. E. Gates. The writhing of circular cross-section rods: undersea cables to DNA supercoils. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 454:2123–2156, 1998.
- [12] Zolt Gáspár and R. Németh. A special shape of a twisted ring. In *Proc. of 2nd European Conference on Computational Mechanics*, page 11, Cracow, Poland, June 26-29 2001. CD.
- [13] Eusebius Doedel, Herbert B. Keller, and Jean Pierre Kernevez. Numerical analysis and control of bifurcation problems (i) bifurcation in finite dimensions. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 1(3):493–520, 1991.
- [14] D. M. Stump and W. B. Fraser. Multiple solutions for writhed rods: implications for DNA supercoiling. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 456:455–467, 2000.
- [15] Sébastien Neukirch. Extracting DNA twist rigidity from experimental supercoiling data. arXiv: q-bio.BM/0402036, 2004.
- [16] Ramin Golestanian and Farshid Mohammad Rafiee. Electrostatic contribution to twist rigidity of DNA. arXiv: cond-mat/0305234, 2003.

## Cryptage par chaos en fréquence appliqué aux télécommunications hertziennes

A. Pallavisini, L. Larger, V. Udaltsov, J.-P. Goedgebuer

*GTL-CNRS Telecom*

*2-3 rue Marconi*

*57070 Metz*

apallavi@georgiatech-metz.fr

### Résumé

Un type courant de modulation en télécommunication hertzienne est la modulation de fréquence. Son principal avantage réside dans sa faible sensibilité par rapport aux bruits du canal hertzien, généralement constitué par l'espace libre. Ce type de canal est par contre très ouvert, et délicat à utiliser dans le cas de la transmission d'informations sensibles. Un système de cryptage par modulation chaotique de fréquence a été réalisé pour apporter une réponse à ce problème de confidentialité. La clé de cryptage est de type privée (ou secrète), elle correspond aux paramètres déterministes définissant le déterminisme de la dynamique chaotique, sans lequel le décryptage de l'information s'avère très difficile, voire impossible.

## 1 Introduction

Le cryptage par chaos en fréquence est un cryptage à clé secrète qui peut être modifiée et ainsi générer un chaos avec des caractéristiques différentes. L'émetteur et le récepteur conçus au laboratoire permettent de transmettre des informations cryptées par voie hertzienne [1]. Les systèmes d'émission et de réception sont des montages électroniques qui présentent une très bonne stabilité permettant ainsi une bonne synchronisation des signaux [2]. Pour pouvoir générer un chaos en fréquence, il est nécessaire d'avoir, en boucle fermée, une fonction non-linéaire, un retard, un processus dynamique limitant, une amplification, et bien sûr un procédé de conversion amplitude/fréquence [3]. Dans la suite, nous

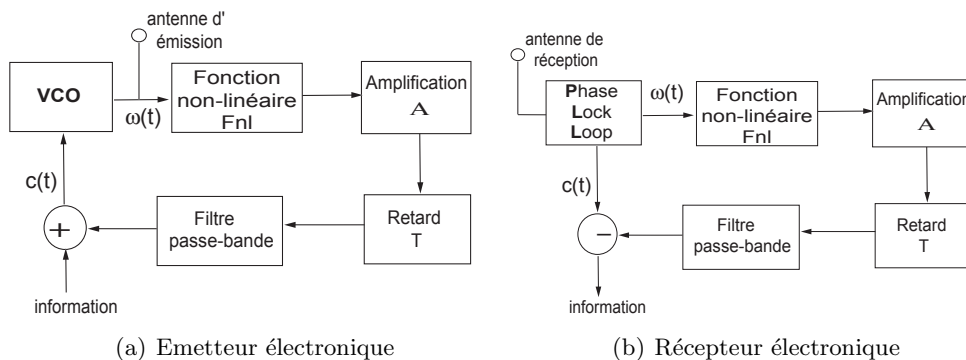


FIG. 1 – *Synoptique des systèmes d'émission et de réception*

allons détailler le principe de fonctionnement de l'émetteur et du récepteur afin d'établir le

modèle dynamique complet de chacun d'eux. Ce modèle sera exploité afin d'obtenir des simulations numériques du comportement de l'ensemble, comportement qui sera finalement comparé à celui observé expérimentalement.

## 2 Fonctionnement de l'oscillateur chaotique en fréquence

Les fonctions nécessaires dans l'oscillateur chaotique proposé (fig.1(a)) sont : le retard  $T$ , l'amplification  $A$ , la non-linéarité  $F_{NL}$ , la dynamique limitante, un oscillateur commandé en tension ( $VCO$ ). La dynamique limitante est réalisée par un filtre passe-bande qui va déterminer l'ordre de l'équation différentielle non linéaire à retard.

### 2.1 Oscillateur commandé en tension

Cette fonction va permettre de convertir le chaos en amplitude  $c(t)$  obtenu à la sortie du filtre passe-bande en un chaos en fréquence  $\omega(t)$ . La relation entre ces deux signaux est linéaire :

$$\omega(t) = \alpha_{vco}.c(t) + \omega_0 \quad (1)$$

$\alpha_{vco}$  (en  $Hz/V$ ) est la sensibilité de conversion,  $\omega_0$  est la fréquence angulaire centrale autour de laquelle le chaos en fréquence peut évoluer. Cette fréquence centrale influence un paramètre de phase, l'un des paramètres de la clé secrète du système.

### 2.2 Fonction non-linéaire

Le système chaotique possède une non-linéarité du type  $y = f(x)$ . Cette transformation non linéaire est effectuée entre le chaos en fréquence et le chaos en amplitude à partir de filtres résonants. Chaque pic de résonance est caractérisé par son facteur de qualité  $Q_i$ , son gain  $g_i$  et sa fréquence de résonance  $f_i$  :

$$F_{nl}[f(t)] = \left| \sum_{i=1}^3 \frac{g_i Q_i}{1 - jQ_i \left[ \frac{f(t)}{f_i} - \frac{f_i}{f(t)} \right]} \right| \quad (2)$$

Celle-ci est réalisée par trois filtres RLC résonants à trois fréquences angulaires différentes  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  et  $\omega_3$  (fig.2). Ces trois pics sont situés dans une bande de fréquence de 1  $MHz$ , équivalent à la largeur de modulation du  $VCO$ .

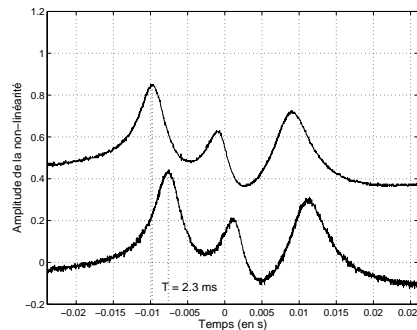


FIG. 2 – Non-linéarité et retard temporel

La dimension de l'attracteur caractérisant la "complexité" du signal chaotique transmis est liée en partie au nombre d'extrema de cette fonction non-linéaire.

### 2.3 Retard temporel

Ce retard est réalisé à l'aide d'une mémoire analogique CCD. La valeur de ce retard ( $T = 2.3 \text{ ms}$ ) est relativement importante. Typiquement, l'obtention d'un chaos de grande complexité est lié à l'inégalité suivante entre les paramètres temporels :

$$\frac{T}{\tau_1} \gg 1 \quad (3)$$

### 2.4 Dynamique limitante

Cette fonction est réalisée par un filtre passe-bande. Le but de celle-ci est de contrôler la vitesse des fluctuations du chaos. Le filtre effectivement utilisé est du second ordre, et est caractérisé par l'équation différentielle suivante entre son entrée  $e(t)$  et sa sortie  $s(t)$  :

$$\tau_1 \cdot \tau_2 \cdot \left[ \frac{d^2 s}{dt^2} \right] (t) + (\tau_1 + \tau_2) \left[ \frac{ds}{dt} \right] (t) + s(t) = \alpha \left[ \frac{de}{dt} \right] (t) \quad (4)$$

avec  $\alpha = \tau_1$  pour pouvoir normaliser le gain de la fonction de transfert dans la bande passante à 0 dB. Ce filtre peut en principe avoir d'autres caractéristiques : il peut être d'un ordre différent mais également d'un autre type (passe-bas).

### 2.5 Etude du système en boucle fermée

L'équation différentielle non linéaire à retard qui caractérise l'oscillateur chaotique est la suivante :

$$\tau_1 \cdot \tau_2 \cdot \left[ \frac{d^2 \omega}{dt^2} \right] (t) + (\tau_1 + \tau_2) \left[ \frac{d\omega}{dt} \right] (t) + \omega(t) = \tau_1 \cdot \beta \cdot F_{nl}[\omega(t - T) + \phi] \quad (5)$$

$\phi$  et  $\beta$  sont respectivement les valeurs normalisées du déphasage, de l'amplification ( $\beta = \alpha_{vco} \cdot A \cdot V_0$  avec  $V_0$  l'amplitude la non linéarité pour un gain nul et  $\phi \propto \omega_0$ ).

En fonction de la valeur de ces paramètres, les régimes dynamiques possibles sont très nombreux. Nous limiterons notre étude à quelques situations particulières, principalement celles correspondant aux régimes chaotiques utilisés pour réaliser l'application de cryptographie.

Le diagramme de bifurcation à la figure 3(a) représente la variable dynamique statistique  $\omega(t)$  en fonction du paramètre d'amplification normalisé  $\beta$ . La probabilité d'obtenir une valeur est matérialisée par des niveaux de gris de couleur foncée pour une valeur du signal très probable, et de couleur claire pour une valeur très improbable (barre d'état indexée au graphe). La représentation de la densité de probabilité permet d'apprécier les dédoublements de fréquence marquant les premières bifurcations des états stationnaire et périodique, ainsi que les régimes chaotiques obtenus lorsque  $\beta$  est suffisamment grand. Le calcul des exposants de Lyapunov permet de quantifier la dimension de l'attracteur étrange dans lequel le chaos évolue. Cet attracteur étrange s'observe dans un espace des phases du système reconstruit sur la figure 3(b), où l'on constate que la dimension 3 est largement insuffisante. Les exposants de Lyapunov indiquent le taux moyen de divergence

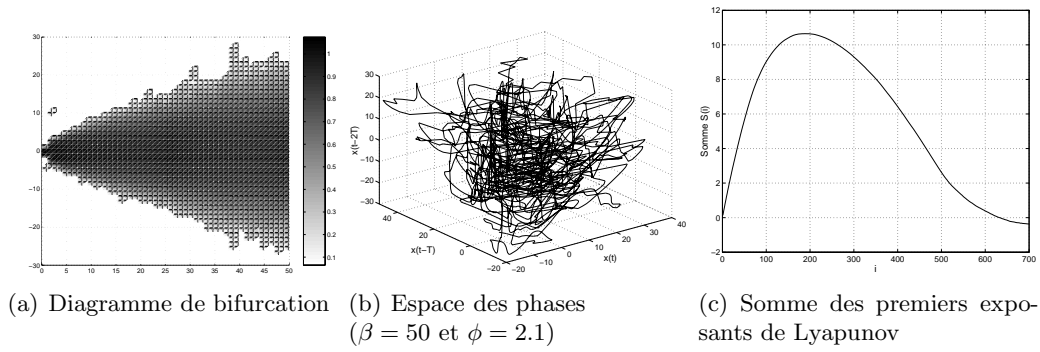


FIG. 3 – Diagramme de bifurcation, espace des phases et somme des premiers exposants de Lyapunov

tout au long de sa trajectoire sur l'attracteur chaotique. En effet, si certains de ces exposants sont positifs, il y a élongation et sensibilité aux conditions initiales et s'ils sont tous négatifs ou nuls, l'information sur les conditions initiales se perd et les trajectoires se rapprochent jusqu'à dégénérer en une seule trajectoire. La somme des premiers exposants (fig.3(c)) donne une information sur la dimension de l'attracteur observé dans l'espace des phases (dimension de Kaplan-Yorke) [5]. Pour les mêmes paramètres de déphasage et d'amplification, la dimension issue du calcul des exposants de Lyapunov est 632.

## 2.6 Résultats expérimentaux

La figure 4 montre les résultats expérimentaux obtenus pour caractériser l'oscillateur chaotique réalisé. L'évolution temporelle du chaos en amplitude (fig.4(a)) qui commande le VCO a une apparence stochastique, mais il s'agit bien d'un signal déterministe qui répond à l'équation (5). Le chaos engendré a donc un spectre plat dans la bande de fréquence balayée par l'oscillateur commandé en tension. Cette bande de modulation peut atteindre une valeur maximale  $f = 1 \text{ MHz}$ . Le diagramme de bifurcation expérimental

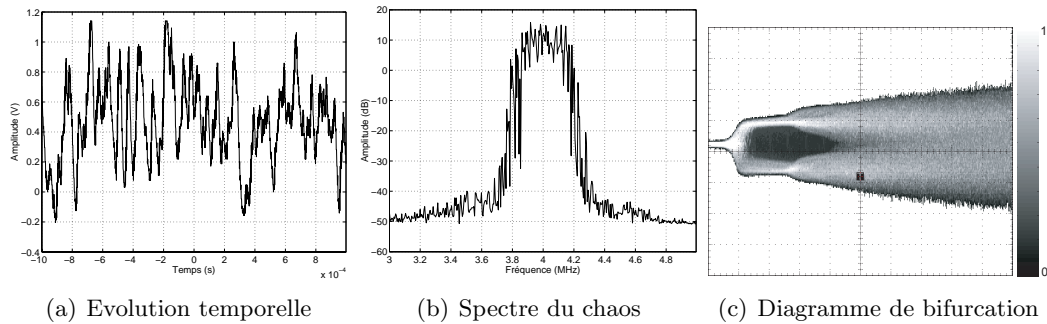


FIG. 4 – Caractérisation expérimentale du chaos généré

(fig.4(c)) montre l'état du système en fonction de l'évolution croissante du gain. Pour un gain nul ou très faible, le système se trouve dans un régime stationnaire, avant de traverser un régime périodique que l'on remarque sur le diagramme par les premiers dédoublements de fréquence. Le système traverse ensuite un régime critique avant d'arriver à un régime



chaotique. La densité de probabilité est traduite par le niveau de gris du diagramme.

### 3 Décryptage de l'information et résultats expérimentaux

Le synoptique du récepteur (fig.1(b)) utilise les mêmes fonctions que l'émetteur pour pouvoir reconstituer le signal chaotique sans information. Seule différence, ces fonctions sont utilisées en boucle ouverte et le *VCO* est remplacé par une boucle à verouillage de phase (*PLL*). Celle-ci a été conçue pour avoir une plage de maintien très large (indice de modulation proche de 0.25). La plage de maintien caractérise les variations de fréquences du signal reçu pour lesquelles la *PLL* reste synchroniser. Celle-ci sera donc capable de restituer, à partir du chaos en fréquence, le chaos en amplitude. Ce chaos en amplitude qui contient l'information sera directement envoyé sur le soustracteur à partir duquel le décodage est obtenu. Le chaos en fréquence va, quant à lui, subir les mêmes transformations qui constituent les clés de codage du système pour reformer le chaos sans information. La soustraction de ces deux signaux redonnera l'information décryptée.

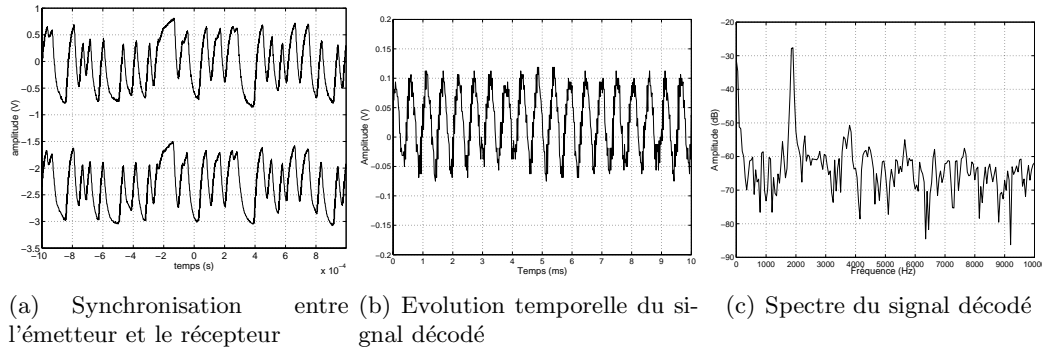


FIG. 5 – Signaux de décodage

La synchronisation entre l'émetteur et le récepteur en l'absence d'une information est représentée à la figure 5(a) par les deux évolutions temporelles respectivement prises avant la transmission et, à la sortie de la boucle ouverte du récepteur. Ensuite, l'évolution temporelle de l'information décryptée (fig.5(b)) est plus précisément définie par un rapport signal à bruit  $\alpha_i$  caractérisé par le spectre (fig.5(c)).

$$\alpha_i = 32 \text{ dB}$$

### 4 Conclusion

En vue de la miniaturisation, de l'optimisation et de l'adaptation aux systèmes de télécommunications actuelles, les systèmes électroniques de cryptage par chaos en fréquence sont amenés à jouer un rôle important dans les télécommunications hertziennes.

Le système de cryptage électronique présente une plus grande stabilité que les systèmes optiques. De ce fait, le système est moins sensible aux bruits extérieurs qui engendrent des problèmes supplémentaires de synchronisation.

Le système électronique de cryptage par chaos en fréquence lié aux différents types de modulation de fréquence donnent lieu à de nombreuses perspectives. En effet, la commande

des paramètres est relativement simple et permet d'effectuer un codage plus complexe par commutation de clé [6].

## Références

- [1] L.Larger, J.-P. Goedgebuer, V.S.Udaltsov and W.T.Rhodes, *Chaotic dynamics of oscillators based on circuits with VCO and nonlinear delayed feedback*, Electronics Letters (1999)
- [2] L.M. Pecorra and T.L. Carroll, *Driving systems with chaotic signals*, Physical Review A (1991)
- [3] L.Larger, J.-P.Goedgebuer, V.S.Udaltsov and W.T.Rhodes, *Radio transmission System using FM high dimensional chaotic oscillator*, Electronics letters (2001)
- [4] P.Bergé, Y.Pomeau and Ch.Vidal, *L'ordre dans le chaos vers une approche déterministe de la turbulence*, Hermann (1988)
- [5] J. Doyne Farmer, *Chaotic attractors of infinite-dimensional dynamical system*, Physica 4D (1982)
- [6] J.-B. Cuenot, *Système optoélectronique de communication sécurisé par chaos en longueur d'onde*, thèse (2001)

## Déstabilisation d'une nappe cylindrique verticale de fluide visqueux

Ch. Pirat, Ph. Maïssa, Ch. Mathis

*Institut du Non Linéaire de Nice*

*1361, Route des Lucioles, 06560 Sophia Antipolis*

Christophe.Pirat@inln.cnrs.fr

### Résumé

Nous présentons une expérience d'hydrodynamique au cours de laquelle un film fluide sous gravité déstabilisante et en géométrie annulaire forme une nappe cylindrique verticale. Le dispositif expérimental est dérivé de celui nous ayant permis de mener l'étude bidimensionnelle de la déstabilisation du film [1] et autorise le réglage du diamètre moyen et de la largeur de l'anneau.

Une huile de silicone passe en continu et de manière contrôlée à travers une grille plane et horizontale, laquelle joue le rôle d'un milieu poreux. A haut débit, le fluide forme une nappe qui peut être cylindrique ou non suivant la différence des pressions intérieure et extérieure. En jouant sur le débit et la géométrie, il est possible d'obtenir une déstabilisation de la nappe qui se traduit par une onde stationnaire ou progressive, immédiatement sous le plan de l'anneau, à l'origine de la nappe.

## 1 Introduction

Les instabilités des structures stationnaires périodiques ont fait l'objet de nombreuses études expérimentales dans les milieux dissipatifs hors d'équilibre unidimensionnels: écoulements de Couette-Taylor [2], de Rayleigh-Bénard [3], de Rayleigh-Taylor [4], solidification dirigée [5], instabilité de l'imprimeur [6].

De nombreux travaux ont été consacrés à l'étude de la formation et de la stabilité des nappes liquides depuis les premières investigations de Savart [7] et Boussinesq [8]. Taylor s'est tout particulièrement intéressé aux nappes annulaires (les "cloches" liquides) [9]. Plus récemment, Buckingham et Bush [10] se sont attachés à étudier les nappes à structure polyèdre obtenues par la brisure d'un jet vertical de liquide visqueux sur un impacteur circulaire horizontal. Brunet et al. ont par ailleurs étudié la forme native d'une cloche liquide annulaire produite par le débordement d'une coupelle circulaire [11].

Après avoir développé une version 2D de l'expérience de la gouttière, nous utilisons sensiblement le même appareillage pour mettre en évidence le comportement spatio-temporel de nappes en géométrie à dimensionnalité réduite. En effet, seul un anneau de diamètre et de largeur réglables est utilisé et ce dispositif permet d'étudier la déstabilisation, à sa naissance, d'une nappe de liquide dont l'embase peut se déplacer librement sur une surface à confinement variable. Nous observons ainsi les modes transverses d'oscillation de la nappe.

## 2 Le dispositif expérimental

L'appareillage est constitué d'une grille circulaire, jouant le rôle d'un filtre poreux, placée horizontalement dans le fond d'une chambre cylindrique (Fig. 1a). La zone d'écou-

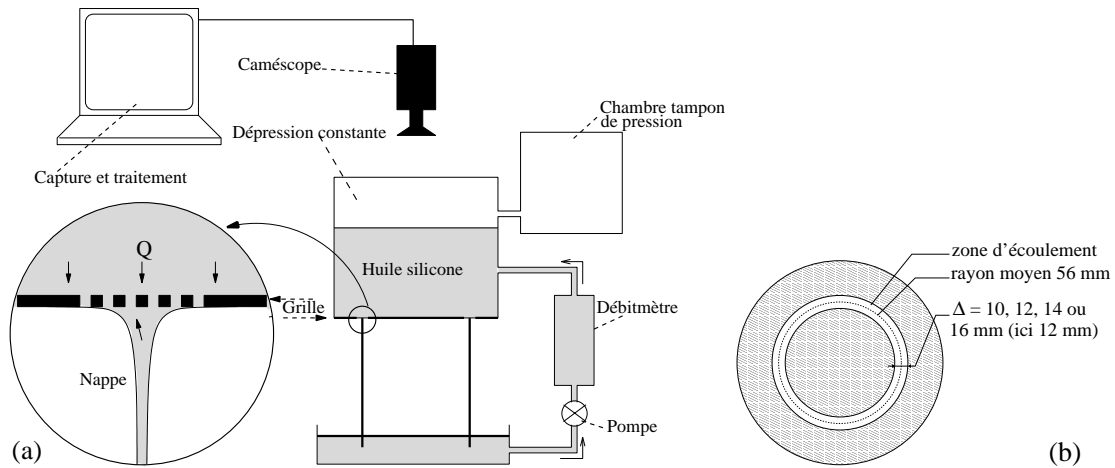


FIG. 1 – Schémas (a) du montage, (b) de la zone d'écoulement

lement annulaire est obtenue au moyen de caches placés sur la grille (Fig. 1b). Une hauteur d'huile de silicone est maintenue constante au dessus de la grille grâce à une dépression contrôlée. Sans alimentation, le système est à l'équilibre (la dépression compense la hauteur d'huile) et il n'y a pas d'écoulement. Quand le dispositif est alimenté, un flux s'amorce à travers la grille (formant un film sous celle-ci) en maintenant l'équilibre des pressions. On assure une bonne uniformité du débit  $D$  à travers toute la surface en imposant une hauteur d'huile suffisamment importante (de l'ordre d'une dizaine de centimètres) et en garantissant une arrivée homogène du fluide. Le débit  $D$  est mesuré avec un débitmètre à flotteur et contrôlé par une vanne. Comme dans le cas bidimensionnel, la grille en acier fait 1 mm d'épaisseur et est perforée suivant un motif hexagonal. Les trous circulaires et identiques espacés de 2 mm ont un diamètre de 1 mm. Le pas de la grille et la dimension des trous sont beaucoup plus petits que la longueur d'onde  $\lambda_m$  de l'instabilité de Rayleigh-Taylor: il n'y a pas de résonance entre l'écoulement et l'alignement des trous de la grille. L'expérience a été réalisée avec quatre largeurs d'anneau ( $\Delta$ ) différentes de 10, 12, 14, et 16 mm, pour un rayon moyen  $r = 56$  mm. Nous avons utilisé de l'huile silicone (Polydiméthylsiloxane) de tension de surface  $20.6 \text{ dyn.cm}^{-1}$  avec deux viscosités différentes: 50 et  $200 \text{ mm}^2\text{s}^{-1}$ . Cette huile est amenée à la chambre par deux pompes immergées et le débit est mesuré par un débitmètre à flotteur ShoRate GT 1000 avec flotteur 10-RV-64. L'observation se fait par une fenêtre en Plexiglas située au sommet de la chambre avec un caméscope numérique Thomson VMD 20 disposé à la verticale et relié à un ordinateur pour acquisition puis traitement. Un tube circulaire fluorescent est placé autour de la chambre. Le contour de la nappe est détecté grâce à la lumière réfractée à la naissance de l'écoulement, donc légèrement sous le niveau de la grille. (Fig. 2b).

### 3 Les différents régimes d'écoulement en géométrie annulaire

Le comportement du film alimenté présent sous la grille est analogue à celui observé à deux dimensions: lorsque le débit est proche de zéro, ce film se déstabilise sous l'effet de la gravité. L'action conjointe de la tension de surface caractérisant l'instabilité de Rayleigh-Taylor conduit à la formation de gouttes distantes de  $\lambda_m = 13.3 \text{ mm}$  sous sa

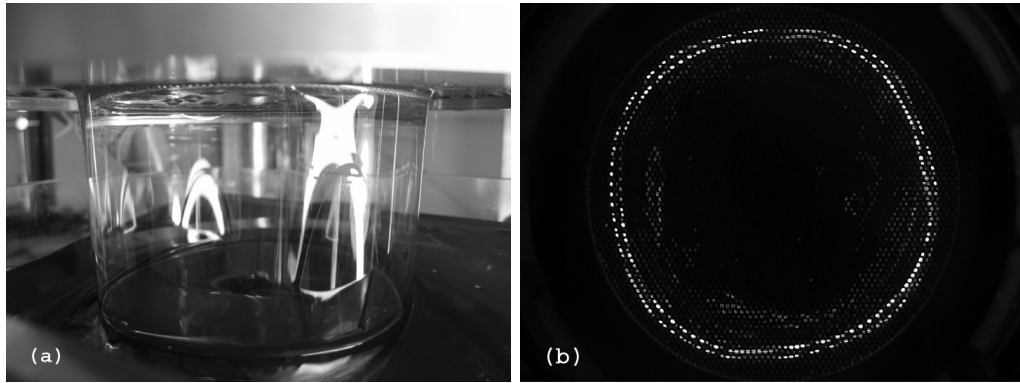


FIG. 2 – Nappe cylindrique d'huile vue: (a) par le côté, (b) par le haut, à travers les trous de la grille (viscosité  $50 \text{ mm}^2/\text{s}$ )

surface (Fig. 3a). Pour un débit plus élevé, apparaît le régime de colonnes de liquide (Fig. 3b), étudié antérieurement avec un autre dispositif expérimental [4]. Gouttes et colonnes peuvent coexister sur une certaine plage de débit. Pour un débit suffisamment important, on observe une transition brutale du régime de colonnes vers une nappe de liquide fermée et stationnaire. Celle-ci n'est jamais cylindrique mais tend à se refermer en aval de l'écoulement (cf [11] pour une étude détaillée des nappes de type "cloche").

### 3.1 Déstabilisation d'une nappe cylindrique

Dans le but de mener une étude systématique, nous rendons la nappe cylindrique en créant une surpression contrôlée à l'intérieur de celle-ci par injection d'air (Fig. 3c). Le scénario de déstabilisation suivant est observé quelles que soient les viscosités et les largeurs d'anneau. La possibilité que nous avons de modifier la largeur de l'anneau est l'une des originalités de ce dispositif expérimental.

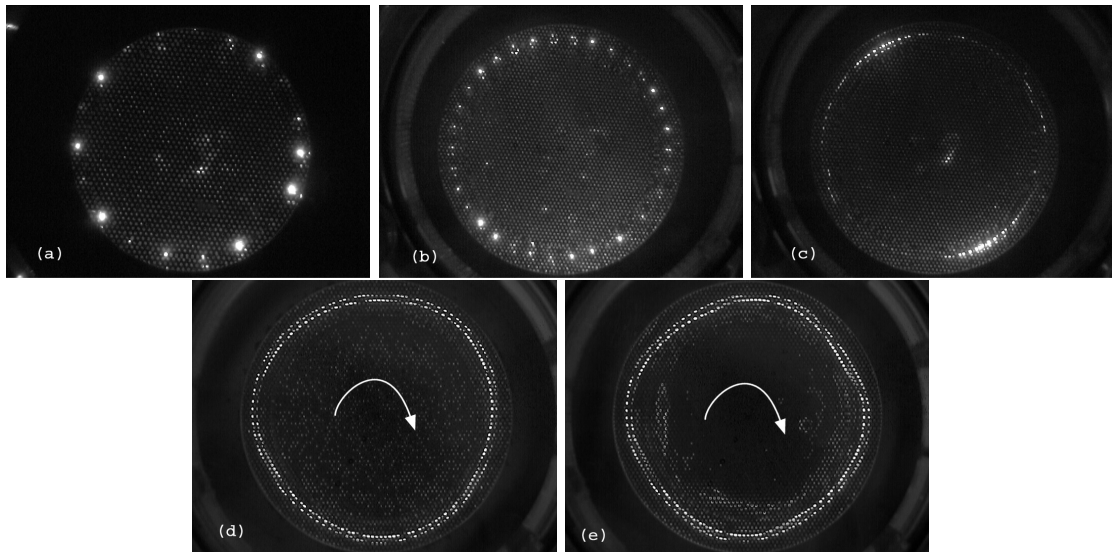


FIG. 3 – Pour un débit croissant (a) gouttes, (b) colonnes, (c) nappe cylindrique stationnaire, (d) nappe en rotation solide ( $N = 3$ ), (e) ( $N = 4$ )

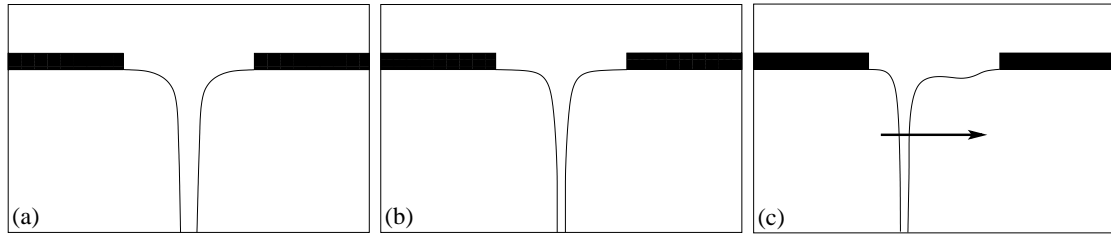


FIG. 4 – Vue en coupe de la nappe (a) le débit est supérieur à  $D_c$ , la nappe est épaisse et stationnaire, (b) une diminution du débit s'accompagne d'un amincissement de la nappe, (c) pour un débit inférieur à  $D_c$  l'embase de la nappe se déstabilise et oscille (viscosité  $200 \text{ mm}^2/\text{s}$ ).

On applique une diminution lente du débit en partant de la situation stationnaire (Fig. 4a). Celle-ci s'accompagne d'un amincissement de la nappe (Fig. 4b). Il existe un débit critique  $D_c$  pour lequel la nappe commence à osciller radialement (Fig. 4c) sous la forme d'une onde stationnaire résultat de la compétition visible entre une onde progressive droite et une onde progressive gauche. L'amplitude des oscillations augmente avec l'écart au seuil. Pour un débit toujours décroissant, une deuxième transition apparaît: le système sélectionne l'onde droite ou l'onde gauche de nombre d'onde  $\kappa$  qui apparaît comme un motif en "rotation solide" (Fig. 3d-e). Nous définissons un nombre d'onde normalisé  $N = \kappa.r$  qui correspond au "nombre de faces" de la structure observée.

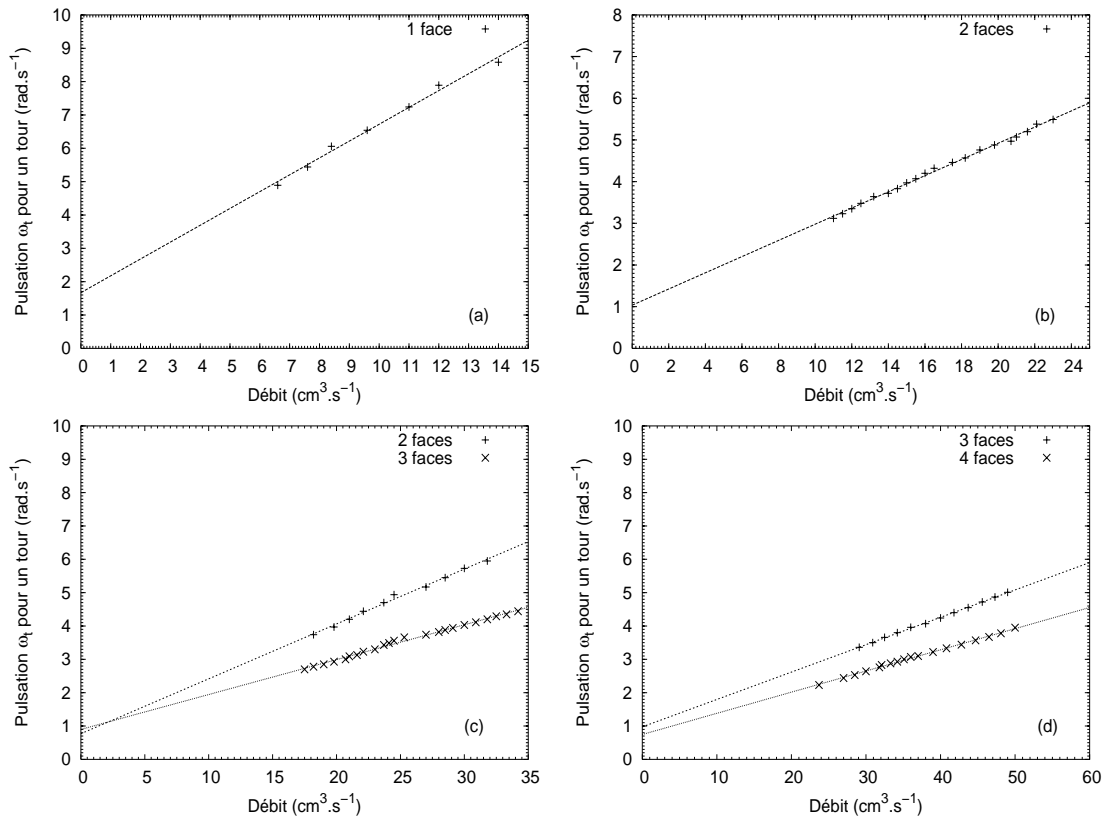


FIG. 5 – Pulsation pour un tour en fonction du débit: (a)  $\Delta = 10 \text{ mm}$ , (b)  $\Delta = 12 \text{ mm}$ , (c)  $\Delta = 14 \text{ mm}$ , (d)  $\Delta = 16 \text{ mm}$  (viscosité  $200 \text{ mm}^2/\text{s}$ )

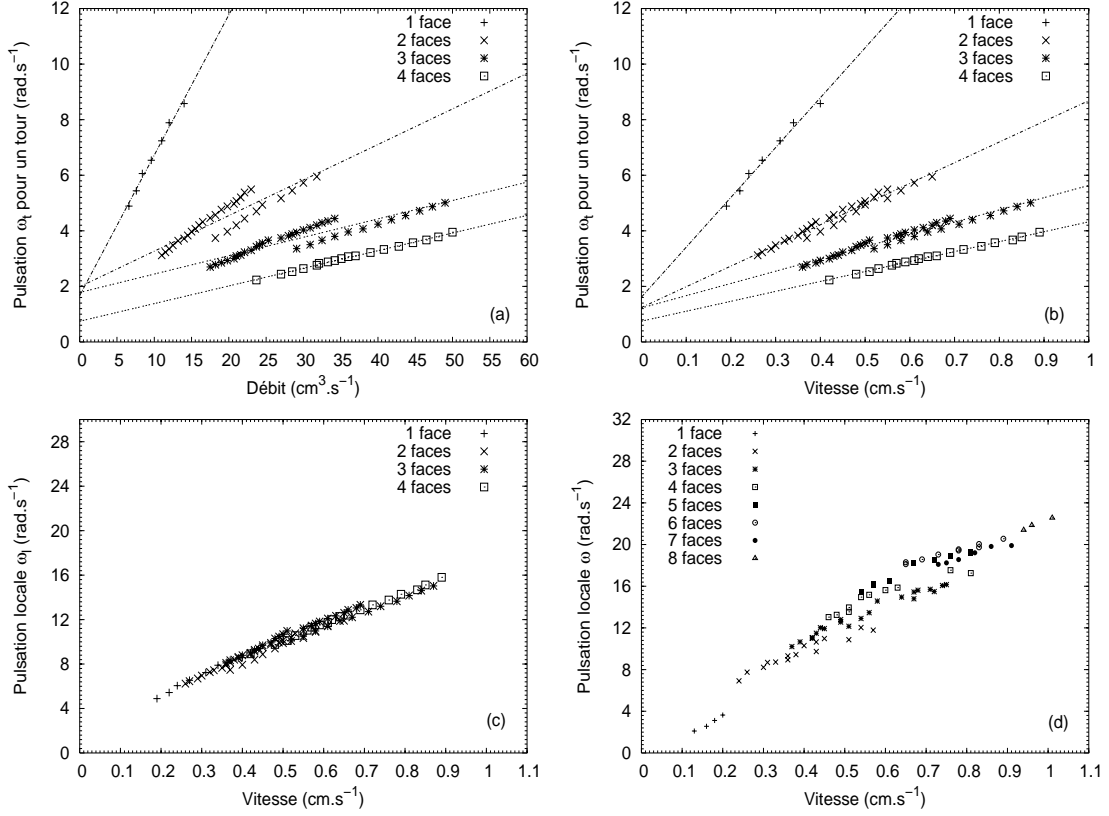


FIG. 6 — (a) Pulsation pour un tour en fonction du débit (viscosité  $200 \text{ mm}^2/\text{s}$ ), (b) Pulsation pour un tour en fonction du débit surfacique ( $200 \text{ mm}^2/\text{s}$ ), (c) Pulsation locale en fonction du débit surfacique ( $200 \text{ mm}^2/\text{s}$ ), (d) comme (c) pour une viscosité de  $50 \text{ mm}^2/\text{s}$ .

Remarque: Lorsque  $\Delta$  est trop petit (inférieur à  $10 \text{ mm}$ ), on n'observe jamais de déstabilisation de la nappe mais une transition brusque vers le régime de colonnes (ou de goutte à goutte si  $\Delta$  est très faible).

### 3.2 Résultats pour les nappes déstabilisées en rotation

Il est possible d'obtenir directement une nappe déstabilisée en rotation en imposant le débit qui sélectionne un nombre d'onde  $\kappa$ . Toutes valeurs de  $\Delta$  confondues, nous avons observé des valeurs de  $N$  comprises entre 1 et 8 pour une viscosité de  $50 \text{ mm}^2/\text{s}$  et entre 1 et 4 pour  $200 \text{ mm}^2/\text{s}$ . Lorsqu'une valeur de  $N$  est sélectionnée, cette solution persiste sur une certaine plage de débit et la pulsation pour un tour  $\omega_t$  est proportionnelle au débit (Fig. 5). Comme on peut le voir sur ces figures, il apparaît un "glissement" des valeurs de  $N$  permises par le système avec la valeur de  $\Delta$ . De plus, plusieurs solutions peuvent être obtenues pour une valeur du couple  $(\Delta, D)$  donnée.

La figure 6a rassemble les mesures pour les quatre valeurs de  $\Delta$ . On donne les résultats en fonction du débit par unité de surface (la vitesse moyenne de passage à travers la grille), ce qui a l'effet de rassembler les données par nombre d'onde normalisé  $N$ , et donc à considérer un anneau de largeur unitaire (Fig. 6b). Tous les résultats se rassemblent sur une même droite en considérant la pulsation locale  $\omega_l = \omega_t.N$  et le débit surfacique sur les figures 6c et 6d pour respectivement une viscosité de  $200 \text{ mm}^2/\text{s}$  ou  $50 \text{ mm}^2/\text{s}$ .

## 4 Conclusion

Deux résultats ressortent de cette étude préliminaire. Pour une valeur du nombre d'onde normalisé  $N$  donnée, la pulsation pour un tour  $\omega_t$  est proportionnelle au débit et au débit surfacique, donc en première approximation à l'épaisseur de la nappe. Et pour un débit surfacique donné, la pulsation locale  $\omega_l$  est inversement proportionnelle à la largeur de l'anneau ( $\Delta$ ).

## Références

- [1] Ch. Pirat, Ph. Maïssa, Ch. Mathis et L. Gil, Rencontre du Non Linéaire 2002, Paris, p 207. C. Pirat and L. Gil, *Wave vectors selection at the threshold of ageneric instability of a hexagonal stationary pattern*, Physica D **179**, 92 (2003). C. Pirat, C. Mathis, P. Maïssa and L. Gil, *Structurations of a continuously fed two-dimensionnal viscous film under a destabilizing gravitational force*, à paraître dans Phys. Rev. Lett. (2004).
- [2] C.D. Andereck, S.S. Liu and H.L. Swinney, J. Fluid Mech. **164**, 155 (1986).
- [3] S. Ciliberto and P. Bigazzi, Phys. Rev. Lett. **60**, 286 (1988) et M. Dubois, R. Da Silva, F. Daviaud, P. Bergé and A. Petrov, Europhys. Lett. **8**, 135 (1989).
- [4] F. Giorgiutti, A. Bleton, L. Limat, J.E. Westfreid, Phys. Rev. Lett. **74**, 538 (1995). C. Cournillon, L. Daudet, T. Podgorski and L. Limat, Phys. Rev. Lett. **80**, 2117 (1998). P. Brunet, J-M Flesselles et L. Limat, *Dérive et chaos spatio-temporel dans la fontaine circulaire*, Rencontre du non-linéaire 2000, Paris.
- [5] A.J. Simon, J. Bechhoeffer and A. Libchaber, Phys. Rev. Lett. **61**, 2574 (1988). M. Ginibre, S. Akamatsu and G. Faivre, Phys. Rev. E **56**, 56 (1997).
- [6] M. Rabaud, S. Michalland and Y. Couder, Phys. Rev. Lett. **64**, 184 (1990) et S. Michalland and R. Rabaud, Physica D **61**, 197 (1992).
- [7] F. Savart, Ann. de chim. **54**, 56 (1833).
- [8] J. Boussinesq, C.R. Acad. Sci., Paris **69**, 45 et 128 (1869).
- [9] G.I. Taylor, Proc. Phys. Soc. A **253**, 289 (1959).
- [10] R. Buckingham and J.W.M. Bush, Gallery of fluid motion, Phys. Fluids (2001).
- [11] P. Brunet, C. Clanet and L. Limat, *"Viscous liquid bells under a circular dish"*, July 2003, Submitted to Phys. Fluids.
- [12] S.P. Lin and G. Roberts, J. Fluid Mech. **104**, 111 (1981).



## Convection quasigéostrophique dans un cylindre annulaire tournant : étude systématique d'un modèle incluant des effets de courbure

E. Plaut<sup>1</sup> et F. H. Busse<sup>2</sup>

<sup>1</sup>LEMTA, INPL - UHP - CNRS, 2 avenue de la Forêt de Haye, F-54516 Vandoeuvre-lès-Nancy cedex

<sup>2</sup>Physikalisches Institut, Universität Bayreuth, D-95440 Bayreuth

emmanuel.plaut@ensem.inpl-nancy.fr

### Résumé

Un modèle simple car bidimensionnel de la convection quasigéostrophique dans un cylindre annulaire tournant est étudié dans le cas où les couvercles présentent une courbure. Des modes intérieurs spiraux sont obtenus à Prandtl élevé, tandis que des modes extérieurs éventuellement multicellulaires sont obtenus à Prandtl faible, en cohérence avec des modèles plus sophistiqués. Une analyse asymptotique permet d'identifier tous les modes extérieurs à des modes quasi-inertiels. Une analyse géométrique des mécanismes de création d'écoulements zonaux non linéaires est aussi présentée.

## 1 Introduction

Les écoulements de convection dans une coquille sphérique sont d'une importance capitale en géo- et astrophysique, puisqu'ils sont sans doute, dans le cas du noyau de la Terre par exemple, à l'origine de l'effet dynamo. Un modèle simplifié car bi-dimensionnel de ces phénomènes est constitué par le modèle de l'anneau cylindrique tournant reposant sur la quasigéostrophie des écoulements [1]. Dans sa version la plus simple, ce modèle ne prend en compte aucun effet de courbure, ni de l'anneau lui-même puisque une hypothèse de petit entrefer est posée, ni des couvercles confinant le fluide dans la direction axiale, puisque les intersections de ces couvercles avec les plans méridiens sont des segments. Ce modèle a fait depuis l'objet de nombreuses études [1]. Des modèles plus sophistiqués incluant divers effets de courbure ont aussi été introduits [2, 3, 4, 5]. Nous présentons ici la première étude systématique d'un modèle du type de celui de Busse et Hood [2], et analysons les effets de la courbure sur la forme des modes linéaires de convection. Ces effets sont qualitativement cohérents avec ce qui se passe dans une coquille sphérique, comme établi par [6, 7, 5]. De plus, la simplicité de notre modèle permet de montrer grâce à une théorie asymptotique que tous les modes "extérieurs" obtenus à faible nombre de Prandtl thermique  $P$  sont des modes *quasi-inertiels*, c'est-à-dire des modes non visqueux isothermes ("ondes inertielles") légèrement perturbés par les effets dissipatifs et de convection. Enfin une analyse des mécanismes géométriques contrôlant la forme des écoulements zonaux engendrés à l'ordre non linéaire quadratique est présentée.

## 2 Modèle gouvernant la dynamique d'ondes linéaires

Le modèle étudié [2], qui repose sur une approximation de petit entrefer permettant l'usage d'un système cartésien de coordonnées avec  $x$  dans la direction radiale et  $y$  dans la direction azimuthale, correspond au système présenté figure 1a dans sa version réalisable en laboratoire (une version "géophysique" peut aussi être définie). La formulation adimensionnelle utilisée est basée sur l'inter-rayon  $d$ , le temps de diffusion visqueuse et  $P(T_{ext} - T_{int})$  pour l'unité de température. Un point important est que les couvercles

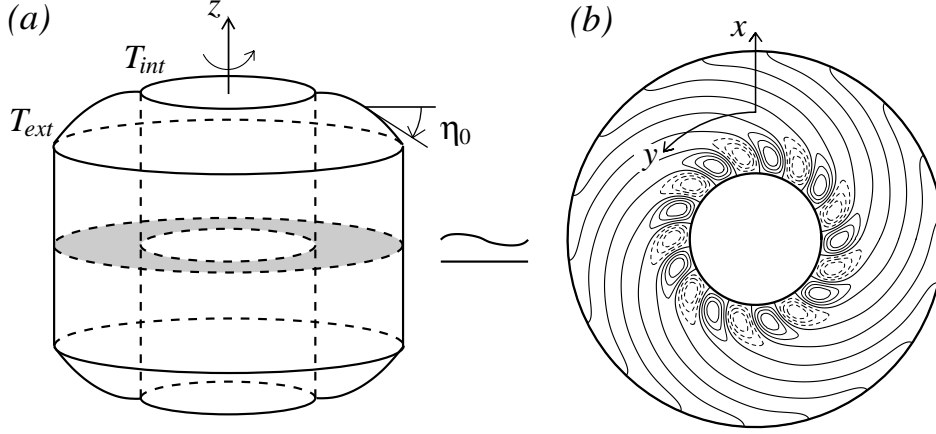


FIG. 1 – (a) Géométrie du système: le fluide est contenu dans un cylindre annulaire tournant autour de son axe  $z$ , une différence de température  $T_{ext} - T_{int} > 0$  étant appliquée à ses parois. Les couvercles coniques sont courbés. Par prise de moyenne en  $z$ , un problème bi-dimensionnel posé dans le plan équatorial (gris) est obtenu. (b) Lignes de courant - séparatrices  $\psi = 0$  en traits gras, niveaux  $\psi > 0$  ( $< 0$ ) en traits continus (pointillés) - d'un mode neutre intérieur spiral calculé avec le code de Galerkin pour des CBL,  $\epsilon = 2$ ,  $P = 1$ ,  $\eta = 42000$ . La géométrie annulaire a été reconstruite à partir de la solution cartésienne  $\psi(x, y, t)$  grâce à la transformation  $(x, y) \mapsto (r_m + x)(\cos(y/r_m), \sin(y/r_m))$  avec le rayon moyen adimensionnel  $r_m = 1.04$  (cf la section 3).

coniques situés à une position axiale  $\pm h/d$  au dessus et au dessous du plan équatorial font un angle faible  $\pm \eta_0(1 + \epsilon x)$  avec ce plan,  $\epsilon \in [0, 2]$  étant le paramètre de courbure. À l'ordre le plus bas le champ de vitesse est géostrophique et dérive d'une fonction courant  $\psi(x, y, t)$ ,  $\mathbf{v} \simeq (\partial_y \psi) \hat{\mathbf{x}} - (\partial_x \psi) \hat{\mathbf{y}}$ ; de même l'écart  $\theta$  entre la température et le profil de base conducteur ne dépend en première approximation que de  $x$ ,  $y$  et  $t$ . Par intégration par rapport à  $z$  de la composante axiale de l'équation de la vorticité, on obtient l'équation de la dynamique linéarisée

$$\partial_t(-\Delta\psi) + \eta(1 + \epsilon x)(\partial_y \psi) = \Delta(-\Delta\psi) + R\partial_y \theta \quad (1)$$

dans laquelle le terme de poussée d'Archimède et le nombre de Rayleigh  $R$  associé correspondent à l'action de la force centrifuge, et le paramètre de Coriolis  $\eta = 2E^{-1}(d/h)\eta_0$  avec  $E$  le nombre d'Ekman [2]. D'autre part l'équation de la chaleur linéarisée s'écrit

$$P\partial_t \theta = \Delta\theta - \partial_y \psi. \quad (2)$$

Des solutions neutres de la forme

$$\psi(x, y, t) = 2\text{Re}\{\Psi(x) \exp[i(\alpha y - \omega t)]\}, \quad \theta(x, y, t) = 2\text{Re}\{\Theta(x) \exp[i(\alpha y - \omega t)]\}, \quad (3)$$

vérifieront donc

$$[i\omega(\partial_x^2 - \alpha^2) + i\alpha\eta(1 + \epsilon x)]\Psi(x) = -(\partial_x^2 - \alpha^2)^2\Psi(x) + i\alpha R\Theta(x), \quad (4)$$

$$-i\omega P\Theta(x) = (\partial_x^2 - \alpha^2)\Theta(x) - i\alpha\Psi(x). \quad (5)$$

Les conditions limites sur les murs verticaux sont

$$\text{soit } \Psi = \partial_x^2 \Psi = \Theta = 0 \quad \text{en } x = \pm 1/2 \quad \text{dans le modèle en bords libres (CBL),} \quad (6)$$

$$\text{soit } \Psi = \partial_x \Psi = \Theta = 0 \quad \text{en } x = \pm 1/2 \quad \text{dans le modèle en bords rigides (CBR).} \quad (7)$$

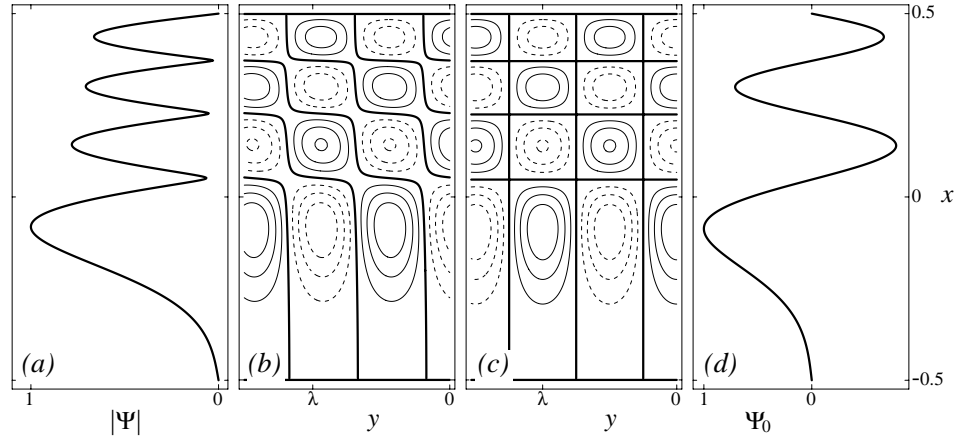


FIG. 2 – (a) Module de la fonction courant et (b) lignes de courant d'un mode extérieur multicellulaire critique calculé avec le code de Galerkin et des CBL,  $\epsilon = 2$ ,  $P = 0.025$ ,  $\eta = 800000$ . (d) et (c) : idem mais pour le mode inertiel critique calculé avec la théorie des sections 4 et 5.

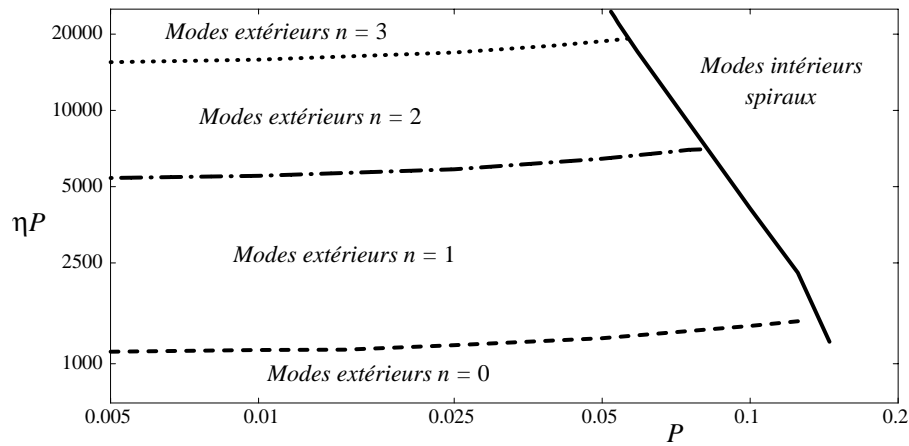


FIG. 3 – Nature des modes critiques calculés avec le code de Galerkin pour des CBL et  $\epsilon = 2$ .

### 3 Résultats du code linéaire : nature des modes critiques

Un code de Galerkin est utilisé pour résoudre numériquement les équations (4) et (5) muni des conditions limites (6) ou (7). Ce code montre que des modes pour lesquels la fonction courant n'est non nulle qu'au voisinage du cylindre intérieur sont obtenus au seuil lorsque  $P \gtrsim 1$  et  $\eta$  est grand. Un tel mode est présenté figure 1b, qui montre des similarités remarquables avec la figure 3b de [5] calculée pourtant avec un modèle tridimensionnel complet de la convection dans une coquille sphérique. Comme ses séparatrices présentent une forte courbure un tel mode est désigné comme un mode *spiral*.

Au contraire, à  $P$  faible des modes présentant une fonction courant plus grande près du cylindre extérieur sont obtenus. Un tel mode de plus *multicellulaire* est présenté figure 2ab. De tels modes ont aussi été obtenus à  $P$  faible en convection d'une coquille sphérique, et on note encore une grande analogie entre la figure 2b et les résultats des calculs tridimensionnels de la figure 6 de [7]. Comme  $|\Psi(x)|$  présente trois minima locaux nous désignons ce mode comme un mode " $n = 3$ ". Une étude systématique conduit au diagramme de la figure 3 ; des diagrammes similaires sont obtenus pour d'autres valeurs de  $\epsilon$  ou des CBR. L'objet de la théorie asymptotique qui va être présentée est d'expliquer

ce diagramme et d'identifier tous les modes extérieurs à des modes *quasi-inertiels*, en prolongeant ainsi les résultats de [8] qui ne s'appliquent qu'aux modes monocellulaires  $n = 0$ .

## 4 Modes inertiels en conditions de bords libres

Lorsque  $P \rightarrow 0$  une approche perturbative

$$\Psi = \Psi_0 + \Psi_1 + \dots, \quad \omega = \omega_0 + \omega_1 + \dots, \quad (8)$$

peut être utilisée, où la fonction courant inertielle  $\Psi_0(x)$  satisfait (4) en l'absence des termes de dissipation et de poussée d'Archimède,

$$\partial_x^2 \Psi_0 = -(\alpha\eta\epsilon/\omega_0) (x - x_0) \Psi_0 \quad \text{avec} \quad x_0 = \alpha\omega_0/(\eta\epsilon) - 1/\epsilon. \quad (9)$$

Le changement de variable

$$x - x_0 = -(\alpha\eta\epsilon/\omega_0)^{-1/3} \xi \quad (10)$$

conduit à l'équation d'Airy, d'où, puisque les CBL (6) imposent la nullité de  $\Psi_0(\xi)$  en

$$\xi_{\pm} = (\alpha\eta\epsilon/\omega_0)^{1/3} (x_0 \pm 1/2), \quad (11)$$

la solution

$$\Psi_0(\xi) = \text{Ai}(\xi) - \text{Ai}(\xi_+) \text{Bi}(\xi) / \text{Bi}(\xi_+). \quad (12)$$

La condition  $\Psi_0(\xi_-) = 0$  détermine les valeurs discrètes  $\xi_-^n$  de  $\xi_-$ ,  $n \in \mathbb{N}$  étant le nombre de zéros de  $\Psi_0(\xi)$  dans l'intervalle  $\xi_-^n < \xi < \xi_+$ . Les nombre d'ondes et fréquence d'un mode donné sont connus analytiquement,

$$\alpha^2 = (\delta^3/\epsilon) + (\xi_+ + \xi_-)\delta^2/2, \quad \omega_0 = \eta\epsilon\alpha/\delta^3 \quad \text{avec} \quad \delta = \xi_+ - \xi_-. \quad (13)$$

Un exemple de mode  $n = 3$  est montré figure 2d, où la fonction courant a été normalisée. Comme celle-ci est réelle, les séparatrices associées sont des segments alignés avec les axes de coordonnées comme montré figure 2c. À chaque mode inertielle correspond une modulation de température  $\Theta_0(x) \exp[i(\alpha y - \omega_0 t)]$  déterminée par (5),

$$(\partial_x^2 - \alpha^2 + i\omega_0 P)\Theta_0(x) = i\alpha\Psi_0(x). \quad (14)$$

Munie de ses conditions limites isothermes, cette équation peut aisément être résolue par une méthode de Galerkin. Contrairement à  $\Psi_0$ ,  $\Theta_0$  dépend de  $\eta$ ; en fait, à cause de (13),  $\Theta_0$  dépend seulement du produit  $\eta P$ .

## 5 Convection quasi-inertielle en conditions de bords libres

Sur la base de l'approche perturbative (8), l'équation (4) à l'ordre 1 s'écrit

$$[i\omega_0(\partial_x^2 - \alpha^2) + i\alpha\eta(1 + \epsilon x)]\Psi_1 = -(\partial_x^2 - \alpha^2)^2\Psi_0 + i\alpha R\Theta_0 - i\omega_1(\partial_x^2 - \alpha^2)\Psi_0. \quad (15)$$

Après multiplication par  $\Psi_0(x)$ , intégration sur l'intervalle  $-1/2 \leq x \leq 1/2$ , et introduction des intégrales de dissipation, inertie et poussée

$$D = \langle \Psi_0(\partial_x^2 - \alpha^2)^2\Psi_0 \rangle, \quad I = -\langle \Psi_0(\partial_x^2 - \alpha^2)\Psi_0 \rangle, \quad (16)$$

$$B_r = \text{Re}[\langle \Psi_0\Theta_0 \rangle], \quad B_i = -\text{Im}[\langle \Psi_0\Theta_0 \rangle], \quad (17)$$

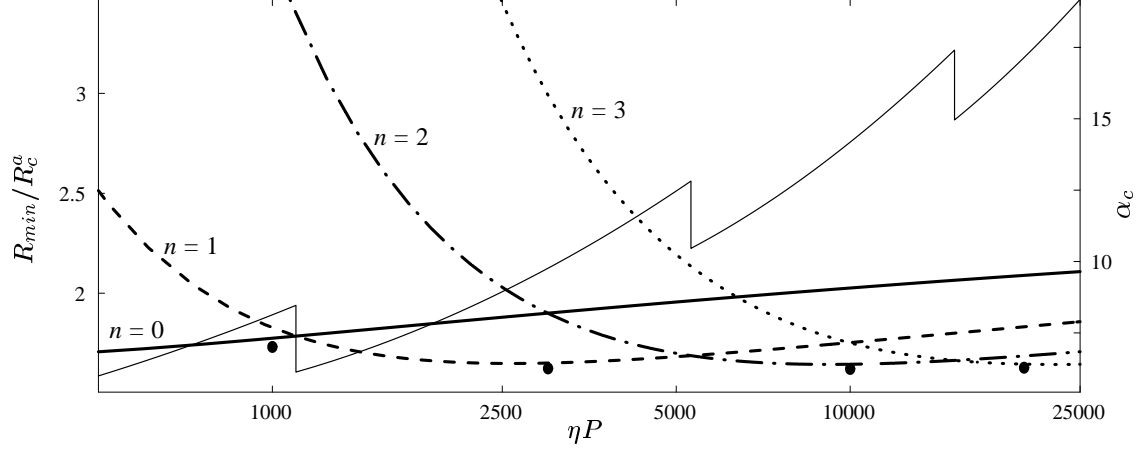


FIG. 4 – Résultats de la théorie perturbative en CBL pour  $\epsilon = 2$  : valeurs réduites du Rayleigh neutre après minimisation par rapport à  $\alpha$  (lignes épaisses, axe de gauche) ; nombres d'ondes critiques correspondants (ligne fine, axe de droite). Les points montrent des valeurs réduites de  $R_c$  calculées avec le code de Galerkin pour  $P = 0.025$ .

on obtient les conditions de solvabilité

$$R = D/(\alpha B_i) , \quad \omega_1 = -\alpha R B_r / I , \quad (18)$$

qui montrent que le Rayleigh neutre  $R$  est contrôlé par un équilibre entre dissipation et poussée, et le décalage fréquentiel  $\omega_1$  par un équilibre entre poussée et inertie. Comme le Prandtl intervient seulement via le produit  $\eta P$ ,  $R$  et  $\omega_1$  dépendent seulement de cette combinaison  $\eta P$ . Les lois d'échelles pour les transitions  $n \rightarrow n+1$ ,  $\eta_n^{n+1} \propto 1/P$ , observées numériquement figure 3, sont donc expliquées. Le mécanisme correspondant peut être analysé : il apparaît que la croissance de  $D$  avec  $n$  est plus faible que celle de  $B_i$ , i.e. que l'accroissement de dissipation dans les modes multicellulaires est largement compensé par une poussée plus forte. Ainsi le Rayleigh  $R = D/(\alpha B_i)$  décroît avec  $n$  pour  $\eta$  grand, comme montré figure 4. Sur cette figure les Rayleighs ont été divisés par  $R_c^a = 3(\eta P / \sqrt{2})^{4/3}$  qui est l'expression asymptotique valable quand  $\epsilon = 0$ ,  $\eta \rightarrow +\infty$ ,  $P \rightarrow 0$  [1]. Il importe aussi de mentionner que le code de Galerkin linéaire permet de valider cette théorie asymptotique. Une théorie similaire en CBR peut être développée à condition d'introduire des corrections de couches limites [9].

## 6 Étude géométrique des écoulements zonaux

L'effet non linéaire le plus intéressant à l'ordre quadratique est sûrement la création d'un écoulement zonal azimuthal  $u(x)$  par la contrainte de Reynolds  $S(x)$  selon [1]

$$\partial_x^2 u = S = 2\alpha_c \operatorname{Im}[\partial_x(\Psi \partial_x \Psi^*)] . \quad (19)$$

Nous avons montré [1] que les termes sources  $S(x)$  ont une signification géométrique en terme des séparatrices  $y(x)$ ,

$$S = 2\alpha_c^2 \partial_x(|\Psi|^2 y') = 2\alpha_c^2 [ |\Psi|^2 y'' + 2\operatorname{Re}(\Psi^* \Psi') y' ] , \quad (20)$$

la pente de ces séparatrices étant d'ailleurs liée à  $\phi = \arg \Psi$  par la relation  $y' = -\phi'/\alpha_c$ , mais les conséquences de la relation (20) en présence de courbure n'ont pas été étudiées.

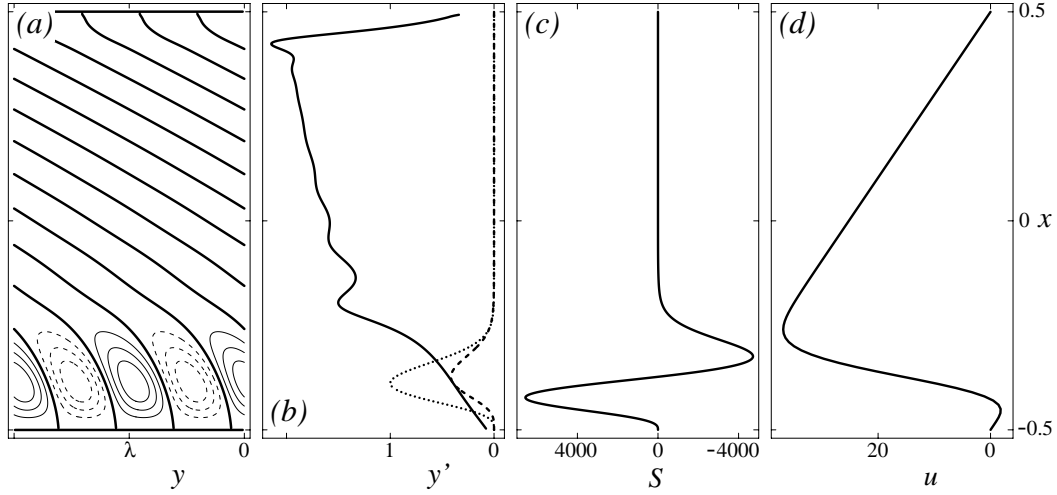


FIG. 5 – Mode spiral critique en CBR pour  $\epsilon = 2$ ,  $P = 7$ ,  $\eta = 206000$ , et son écoulement zonal. (a) Lignes de courant. (b) Ligne épaisse : pente  $y'(x)$  des séparatrices ; ligne pointillée : carré du module de la fonction courant  $|\Psi(x)|^2$  ; ligne interrompue : produit  $|\Psi(x)|^2 y'(x)$ . (c) Contrainte de Reynolds  $S(x)$ . (d) Écoulement zonal.

Ceci est fait figure 5 pour un mode spiral en CBR, *i.e.* en munissant (19) des conditions limites  $u = 0$  en  $x = \pm 1/2$  ; un code de Galerkin a été utilisé. La contrainte  $S$  n'est importante que près du cylindre intérieur à cause de sa proportionnalité à  $\Psi(x)$  ; de fait, l'approximation  $y'(x) \simeq y'_0$  dans la région interne conduit à  $S(x) \simeq 2\alpha_c^2 y'_0 \partial_x(|\Psi|^2)$  qui explique la forme de  $S(x)$ . La double intégration sur la coordonnée  $x$  conduit à l'écoulement montré figure 5d, de forme très simple. Cependant, [5] ont montré qu'une bonne description des écoulements zonaux dans des modèles réalistes de coquilles sphériques en CBR requiert la prise en compte de la *friction d'Ekman* sur les couvercles, *i.e.* la résolution de

$$\partial_x^2 u - u/\tau_E = S \quad (21)$$

au lieu de (19),  $\tau_E$  étant le temps de friction d'Ekman. Une analyse d'ordre de grandeurs conduit alors à l'approximation  $u \simeq -\tau_E S$  qui change radicalement le résultat de la figure 5d. On obtient ainsi à partir de la figure 5c un écoulement zonal très similaire à celui obtenu avec le modèle plus compliqué de [5] sur leur figure 7a.

Une analyse similaire peut être effectuée en partant à bas Prandtl d'un mode critique extérieur, multicellulaire ou non ; un jet très fort et prograde au niveau de l'équateur extérieur est alors obtenu [9].

## Références

- [1] Cf par exemple E. Plaut et F. H. Busse, J. Fluid Mech. **464**, 345 (2002) et références.
- [2] F. H. Busse et L. L. Hood, Geo. Astr. Fluid Dyn. **21**, 59 (1982).
- [3] D. Pino *et al.*, Phys. Rev. E **61**, 1507 (2000) ; Phys. Rev. E **63**, 056312 (2001).
- [4] J. I. Yano, J. Fluid Mech. **243**, 103 (1992).
- [5] J. Aubert, N. Gillet et P. Cardin, Geochem. Geophys. Geosyst. **4**, 1052 (2003).
- [6] K. Zhang, J. Fluid Mech. **236**, 535 (1992).
- [7] M. Ardes, F. H. Busse et J. Wicht, Phys. Earth Planet. Inter. **99**, 55 (1997).
- [8] K. Zhang, J. Fluid Mech. **268**, 211 (1994).
- [9] E. Plaut et F. H. Busse, en préparation.

## Bifurcation globale et effet mémoire dans un écoulement très turbulent

F. Ravelet, A. Chiffaudel, F. Daviaud et L. Marié

CEA - Saclay. Service de Physique de l'Etat Condensé bât 772.

91191 Gif-sur-Yvette Cédex.

ravelet@drecam.saclay.cea.fr

### Résumé

Pour un écoulement de von Kármán fortement turbulent ( $Re \simeq 10^6$ ), on observe trois états moyens possibles : un état qui restaure statistiquement les symétries du système, et deux états qui la brisent statistiquement. Ces états s'échangent par deux bifurcations sous-critiques, donnant lieu à un cycle d'hystérésis. Par l'adjonction d'ailettes sur la cuve, on modifie ce cycle, et la stabilité des différents états. On peut reproduire phénoménologiquement ce comportement à l'aide d'une équation d'amplitude à deux paramètres ajustables.

## 1 Le dispositif expérimental

Dans un cylindre, le fluide est mis en mouvement au moyen de deux turbines coaxiales contrarotatives, munies de pales. Cet écoulement est connu sous le nom d'écoulement de von Kármán et a été très étudié pour sa capacité à donner de la turbulence très forte dans un volume réduit [1, 2]. En effet, les nombres de Reynolds couramment atteints sont de l'ordre de  $10^6$ .

Les turbines sont mues par deux moteurs brush-less indépendants. Les puissances et couples maximaux sont respectivement de 1,8 kW et de 11,5 N.m. La cuve cylindrique a un rayon  $R = 100$  mm. Les deux turbines sont distantes de 180 mm. Il est possible d'ajouter 4 ailettes parallélépipédiques ( $10 \times 10 \times 125$  mm) régulièrement réparties le long du cylindre. Un serpentin de cuivre et un bain thermostaté permettent d'assurer une régulation thermique à 1 degré près.

Nos résultats ont été obtenus pour une fréquence de rotation typique  $f = 4$  Hz dans de l'eau à 35 degrés, ce qui correspond à un nombre de Reynolds de :  $Re = \frac{2\pi f R^2}{\nu} \simeq 3 \times 10^5$ . Nos deux moteurs étant indépendants, nous pouvons travailler librement dans le plan  $f_1 - f_2$  (fréquences de chaque moteur). Une expérience sera repérée dans ce plan au moyen de ses coordonnées polaires  $f = \sqrt{\frac{f_1^2 + f_2^2}{2}}$ ,  $\theta = \frac{f_2 - f_1}{f_2 + f_1}$ . Ainsi  $\theta = -1$  correspond au cas où le moteur 1 tourne seul,  $\theta = 1$  au cas où le moteur 2 tourne seul, et enfin la contrarotation exacte correspond à  $\theta = 0$ . Le temps sera adimensionné par  $f^{-1}$ , les longueurs par  $R$ , les masses par  $\rho R^3$ .

Les turbines sont des disques de diamètre 1.85 et sont munies de 16 pales en arc de cercle et de hauteur 0.20. Les turbines peuvent tourner dans les deux directions. Les résultats exposés ici concernent le cas où le fluide est poussé avec la face concave (voir figure 1 (a)).

La phénoménologie de l'écoulement est la suivante : chaque turbine agit comme une pompe centrifuge. Le fluide est mis en rotation et est expulsé radialement près de chaque turbine. Le fluide est alors pompé au cœur. Dans le cas où les deux turbines sont contrarotatives, on a alors deux cellules toroïdales, et deux cellules de recirculation poloïdale.

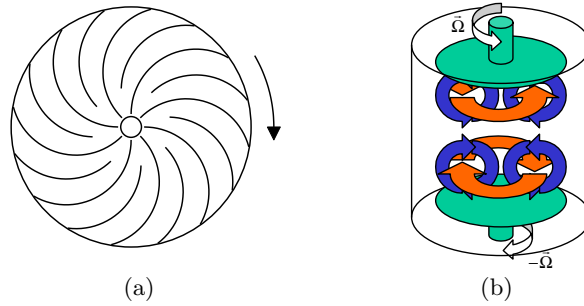


FIG. 1 – (a): schéma des turbines utilisées. (b): phénoménologie de l'écoulement de von Kármán. Décomposition en deux cellules toroïdales et deux cellules poloïdales

Lorsque de surcroît les turbines tournent à la même vitesse, le problème est invariant (équations et conditions aux limites) par rotation d'angle  $\pi$  ( $\mathcal{R}_\pi$ ) autour de tout axe radial passant par le centre du cylindre: on s'attend à un champ de vitesse invariant par  $\mathcal{R}_\pi$ . Nous qualifierons cette situation de canonique.

## 2 Une brisure “statistique” de symétrie

Dans le régime où nous travaillons, l'écoulement est fortement turbulent. A chaque instant, l'écoulement semble complètement désorganisé et met en jeu des structures de toutes tailles. Néanmoins, au sens statistique du terme, on peut définir un écoulement moyen. Sur la figure 2, on voit une carte du champ moyen mesuré par vélocimétrie laser Doppler (LDV). Sur la gauche de la figure, le champ de vitesse moyen respecte l'invariance par  $\mathcal{R}_\pi$  et présente deux cellules: nous sommes dans la situation canonique. On sait par ailleurs [3] que le moment cinétique moyen est nul, et que chaque moteur fournit le même couple. A haut  $Re$ , la symétrie est restaurée statistiquement [4].

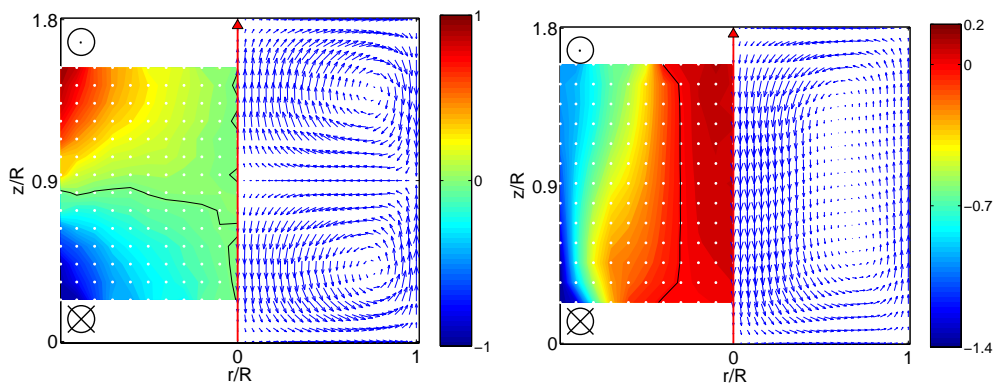


FIG. 2 – Champ de vitesse moyen mesuré par LDV à  $Re = 1.5 \times 10^5$  en contra-rotation exacte. 120 unités de temps par point de mesure. Le cylindre est vertical, l'axe se trouve au milieu. A gauche: état canonique (a). A droite, dans les mêmes conditions, autre solution pour le champ de vitesse moyen, brisant la symétrie: écoulement bifurqué vers la turbine 1 du bas (b)



Partant de  $\theta = 0$ , et dissymétrisant légèrement la consigne, la structure globale de l'écoulement moyen peut bifurquer spontanément [5]. Le champ de vitesse moyen adopte alors la structure visible sur la figure 2 (droite). Il n'y a plus qu'une seule cellule. Une des deux turbines pompe le fluide au cœur du cylindre et le met en rotation sur toute la hauteur. Le fluide spirale sur le bord du cylindre vers la turbine tournant en sens inverse. Au niveau de cette turbine, dans une petite zone inaccessible à la LDV, sa rotation est brutalement freinée, puis il est réinjecté vers le cœur, où il est pompé par la première turbine. Le fluide contenu dans toute la cuve est globalement en rotation : le moment cinétique moyen n'est plus nul. Les moteurs fournissent environ 4 fois plus de couple, et leur différence n'est plus nulle (voir figure 3).

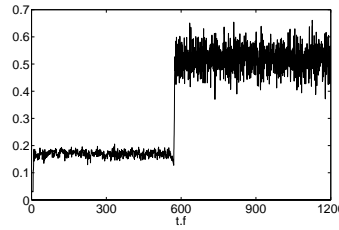


FIG. 3 – Signal temporel du couple adimensionnel ( $K_p$ ) fourni par les moteurs mettant en évidence la transition de l'état canonique vers l'état bifurqué au bout de 600 unités de temps.  $Re = 3. \times 10^5$ ,  $\theta = 0.0204$

Si on part d'un état bifurqué et qu'alors on amène la consigne de vitesse en  $\theta = 0$ , on ne voit jamais l'écoulement adopter l'état canonique. Il y a donc pour une même consigne de vitesse symétrique trois états possibles : un état qui respecte au sens statistique l'invariance par  $\mathcal{R}_\pi$  (fig. 2 gauche) que nous désignerons par (a), et deux états qui la brisent : un état (b) bifurqué “vers la turbine 1” correspondant à la figure 2 droite; et un état (c) bifurqué “vers la turbine 2” qui se déduit de (b) par  $\mathcal{R}_\pi$ . On peut passer spontanément de l'état (a) vers l'état (b)-(c). Nous n'avons jamais observé de retour depuis (b)-(c) vers (a). En outre, pour passer de (b) à (c), il est nécessaire de ralentir fortement la turbine qui entraîne : on a une hystérésis très marquée que nous détaillons dans la prochaine section.

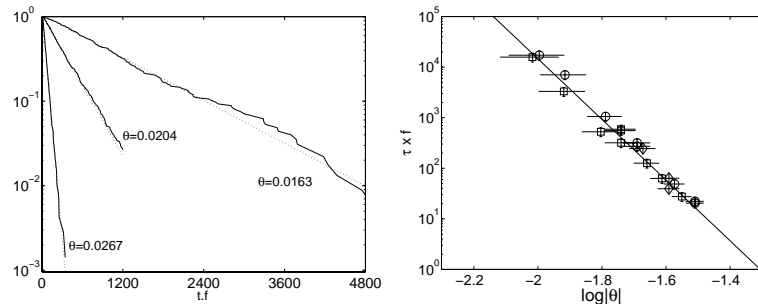


FIG. 4 – Gauche : CDF des temps de transition pour trois valeurs de  $\theta$  à  $f = 4,16 \text{ Hz}$  donnant pour une valeur de  $t.f$  la probabilité de ne pas avoir encore bifurqué de (a) vers (b) au bout de ce temps ; et fits exponentiels. Droite : temps caractéristique fonction de  $\theta$ . Fit par une loi de puissance en  $-6$ .

La transition de (a) vers (b) a un caractère statistique. Pour un couple  $(f, \theta)$ , nous avons mesuré sur typiquement 500 essais la distribution des temps de transitions (fig. 4 gauche). Une loi exponentielle fitte remarquablement les distributions de probabilité cumulées et donne pour chaque couple un temps caractéristique de transition  $\tau$ . Sur la partie droite de la figure 4, nous avons tracé les temps caractéristiques pour les différents couples  $(f, \theta)$ . On n'a aucune dépendance en  $f$ , et  $\tau$  suit une loi de puissance en  $|\theta|^{-6}$ . Pour  $f = 4.16$  et  $\theta = 0.020$ , on a un temps caractéristique de 75 s : on observera souvent la bifurcation. Pour  $f = 4.16$  et  $\theta = 0.010$ ,  $\tau$  vaut 4300 s : observer une bifurcation en un temps court devient alors très rare. Enfin pour  $\theta = 0$ , le temps caractéristique diverge : l'état canonique est marginalement stable.

### 3 Les cycles d'hystérésis, description par une équation d'amplitude

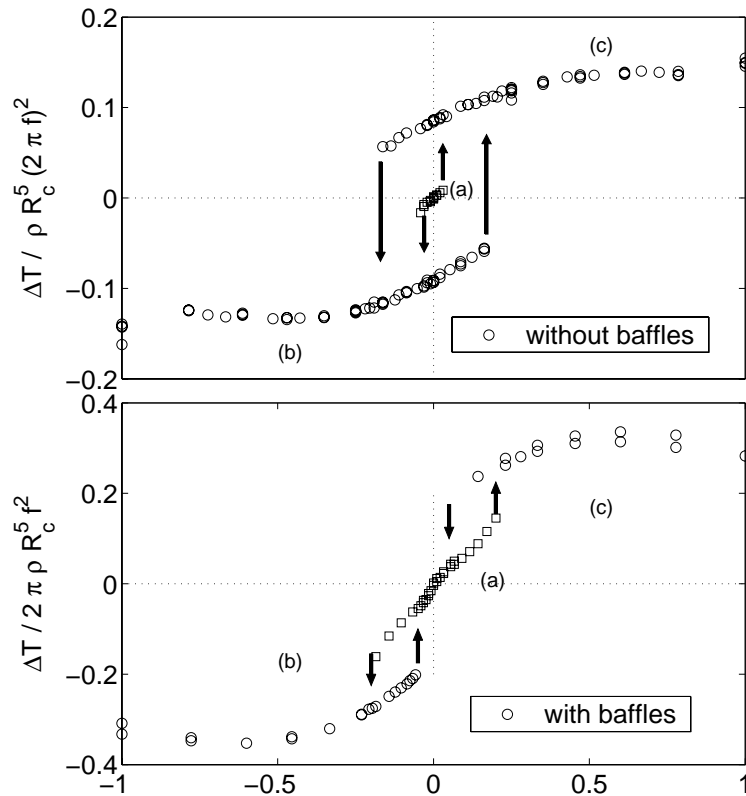


FIG. 5 – Cycle d'hystérésis mesuré avec et sans ailettes. En abscisse, angle  $\theta$  dans le plan  $f_1 - f_2$ . En ordonnée, différence adimensionnelle des couples fournis par les deux moteurs. Nous restons environ 480 unités de temps par point

Nous pouvons définir comme paramètre caractérisant l'état bifurqué la différence des couples fournis par les moteurs. Nous avons vérifié que, comme on peut s'y attendre à haut  $Re$  [4], Le couple  $T$  fourni par un moteur pour une consigne  $(f, \theta)$  est indépendant de  $Re$  et s'écrit :  $T = K_p(\theta) \rho R_c^5 (2\pi f)^2$  [5], avec  $\rho$  la densité du fluide et  $K_p$  le coefficient

de puissance adimensionnel. Sur la figure 5, nous avons reporté la différence des couples  $\Delta K_p$  adimensionnelle en fonction de  $\theta$  pour deux configurations.

Dans la première, correspondant au haut de la figure 5, la cuve cylindrique est lisse. Pour  $\theta = 0$ , il y a trois solutions possibles : l'état canonique (a) correspond à  $\Delta K_p = 0$ , et les deux états (b) et (c) symétriques l'un de l'autre. L'état (a) est quasiment réduit à un point. La stabilité de cette branche centrale dépend du temps passé sur chaque point (ici  $\simeq 480$ ). Lorsqu'on bifurque depuis (a) vers (b), on tombe sur une branche reliée continuellement à la consigne  $\theta = -1$ .

Partons donc maintenant de  $\theta = -1$ , où seule la turbine 1 tourne, état que nous confondrons avec l'état (b). En augmentant progressivement la vitesse  $f_2$ , on se déplace dans le sens des  $\theta$  croissants. On reste sur la branche (b) au delà de  $\theta = 0$  : l'écoulement reste bifurqué vers 1, alors que 2 tourne plus vite. L'écoulement se renverse et on passe de (b) à (c) pour  $\theta \simeq 0.2$ . On arrive alors à  $\theta = 1$  où seule 2 tourne. En se déplaçant alors vers les  $\theta$  décroissants, on reste à nouveau sur (c) au delà de  $\theta = 0$ , et la transition de (c) à (b) a lieu pour  $\theta \simeq -0.2$ . On ne remonte en revanche jamais sur l'état canonique (a) si on l'a quitté : le système garde une mémoire de la façon dont il a été démarré.

Dans la seconde configuration (en bas sur la figure 5), les ailettes verticales sont installées. On a maintenant une séparation de notre grand cycle d'hystérésis en deux petits cycles de part et d'autre de  $\theta = 0$ . L'état central est stabilisé, on peut l'atteindre depuis n'importe quelle condition initiale : en faisant un aller-retour de  $\theta = -1$  à 1, on passe de (b) à (a) avec une hystérésis, puis de (a) à (c) avec hystérésis.

On peut décrire la transition observée statistiquement dans l'expérience par une équation d'amplitude à deux paramètres ajustables :

$$\frac{\partial D}{\partial t} = (\epsilon - \text{sgn}(\epsilon)\epsilon_c)|D| + h|D|D - |D|^2D$$

Cette équation est écrite à partir d'une bifurcation trans-critique, que nous avons symétrisée. Identifions le paramètre de contrôle  $\epsilon$  au différentiel de vitesse  $\theta$  et la "distance à l'état non bifurqué"  $D$  à la différence des couples  $\Delta K_p$  ; en jouant sur les paramètres  $h$  et  $\epsilon_c$ , on obtient les diagrammes présentés sur la figure 6. On retrouve en particulier les différents états du système et l'influence des ailettes. Cette description laisse cependant de côté l'aspect statistique de la transition.

## 4 Conclusion

Nous avons donc mis en évidence expérimentalement une "bifurcation globale" sur un écoulement très turbulent : on a brisure de symétrie (au sens statistique) et échange de stabilité entre différents états. On connaît d'autres écoulements fluides présentant de l'hystérésis [6], mais ces écoulements sont laminaires. Dans notre situation, quelle est l'influence du  $Re$  ? Mais surtout quel est le rôle de la turbulence ? Peut-on traiter ce problème avec les outils classiques issus de l'étude de systèmes dynamiques de basse dimensionnalité ? Nous avons utilisé du glycérol, afin de travailler à des  $Re$  d'ordre  $10^2$  à  $10^3$ . Le phénomène n'est pas présent lorsque l'écoulement est laminaire et apparaît pour  $Re \simeq 4000$ .

D'autres types d'ailettes nous permettront de vérifier la validité de la description en terme d'équation d'amplitude.

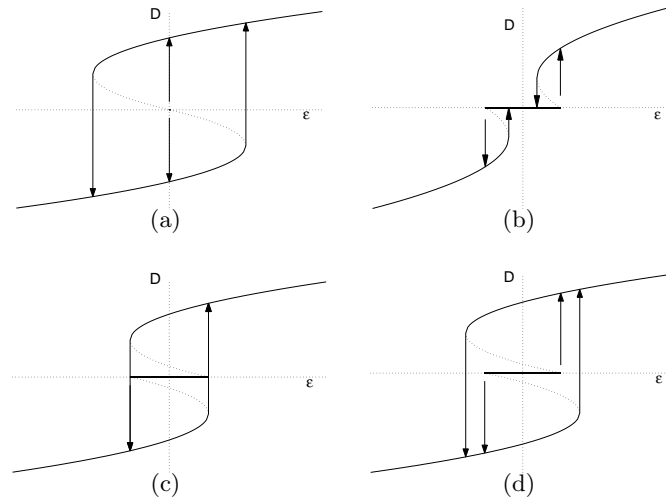


FIG. 6 – Diagramme de stabilité des solutions de l'équation d'amplitude considérée pour : (a)  $\epsilon_c = 0$  (cas sans ailettes). Le point central est marginalement stable. (b)  $\epsilon_c > \frac{h^2}{8}$ . (cas avec ailettes) (c)  $\epsilon_c = \frac{h^2}{8}$ . (d)  $\epsilon_c < \frac{h^2}{8}$ .

Lorsque nous fixons la différence de couple  $\Delta T$  (moteurs commandés en couple) à une valeur où il n'y a pas de solutions sur le diagramme 5, nous observons un comportement intermittent du système qui visite les états (a) et (b) de manière chaotique [5]. Pour des turbines aux pales plus faiblement courbées, nous avons observé des relaxations intermittentes de l'état bifurqué vers l'état non bifurqué.

## Références

- [1] Titon J. H., Cadot O., *Direct measurements of the energy of intense vorticity filaments in turbulence*, Phys. Rev. E, **67**, 027301 (2003).
- [2] Labbé R., Pinton J-F., Fauve S., *Study of the Von Kármán flow between coaxial corotating disks*, Physics Of Fluids, **8**, 914-922, (1996).
- [3] Marié L., Daviaud F., *Experimental measurement of the scale-by-scale budget of angular momentum in a turbulent shear flow*, accepted in Physics Of Fluids, (2003).
- [4] Frisch U., *Turbulence - The legacy of A. N. Kolmogorov*, Cambridge University Press, New York, 1995.
- [5] Marié L., *Transport de moment cinétique et de champ magnétique par un écoulement tourbillonnaire turbulent: influence de la rotation.*, Rapport de thèse de l'université Paris VII, 2003.
- [6] Shtern V., Hussain F., *Hysteresis in swirling jets*, J. Fluid Mech., **309**, 1-44, (1996).

## Non Linéarités Géantes des Cristaux Liquides Dopés par des Colorants : Effets de Surface

Grazia Russo, Stefania Residori et Artyom Petrosyan (\*)

*Institut Non Linéaire de Nice*

*1361, Route des Lucioles, 06560 Sophia Antipolis*

*(\*) Ecole Normale Supérieure de Lyon, 46, Allée d'Italie, 69364 Lyon*

Grazia.Russo@inln.cnrs.fr, Stefania.Residori@inln.cnrs.fr,

apetrosy@ens-lyon.fr

### Résumé

Nous montrons qu'une non-linéarité optique géante est liée à l'action combinée des colorants et du surfactant utilisé comme produit d'ancrage. En particulier, nous montrons que les effets de surface sont fortement influencés par les détails microscopiques de l'interface entre le surfactant et le cristal liquide.

## 1 Introduction

Les cristaux liquides (CL) nématiques, grâce à leurs propriétés uniques d'anisotropie et de corrélation orientationnelle à grande échelle, montrent des non linéarités optiques géantes [1]. Si l'on dope un cristal liquide avec des colorants, sa réponse non linéaire est amplifiée par rapport à celle du cristal pur, cette amplification pouvant aller jusqu'à trois ordres de grandeur [2]. Récemment, une non linéarité optique extraordinairement grande a été rapportée pour un mélange particulier du cristal liquide 5CB et de colorants (*azo-dye*) de Rouge de Methyl (MR) [3]. Différentes interprétations ont été proposées, comme l'effet photoréfractif [3] ou la modification induite par la lumière de la force d'ancrage à la surface de la cellule [4]. Cette dernière hypothèse est aujourd'hui confirmée par plusieurs expériences. Des effets de surface ont été observés pour des cellules planaires, traitées avec des produits photo-sensibles comme les azo-colorants [5, 6] et ont été exploités pour contrôler la réorientation moléculaire [7, 8, 9] ou pour enregistrer des réseaux permanents de haute résolution [10].

Néanmoins, beaucoup de questions restent ouvertes, concernant surtout les mécanismes microscopiques de surface qui seraient à l'origine d'une aussi grande amplification. Les effets de surface désignent généralement l'ancrage, c'est à dire l'accrochage des molécules de CL sur une surface [11]. La phase nématique est caractérisée par une orientation moyenne des molécules, donnée par le directeur  $\vec{n}$ . En l'absence de champ externe, la direction de  $\vec{n}$  dans tout le volume devient égale à celle imposée par la surface, grâce à des corrélations à longue portée. Pour une interface entre un CL et un substrat solide, comme une lame de verre dans le cas d'une cellule pour les applications optiques, l'ancrage des CL au substrat peut être imposé en traitant la surface avec un produit spécifique, comme un surfactant, un sylane ou un poly-imide [12]. Différents types d'ancrages sont possibles, les plus utilisés étant les ancrages homéotrope ( $\vec{n}$  orthogonal aux parois de la cellule) et planaire ( $\vec{n}$  parallèle aux parois de la cellule).

En général, on ne peut pas prévoir quel type d'ancrage on aura à une interface, celui-ci résultant d'un problème de minimisation d'énergie libre pour lequel on ne dispose souvent

que d'expressions qualitatives. Malgré cela, il est désormais admis que les modifications de la force d'ancrage induites par la lumière jouent un rôle fondamental dans le processus de réorientation optique. En particulier, nous avons montré qu'une non linéarité optique géante est en fait liée à la déposition d'une couche de surfactant ionique sur les parois de la cellule [13, 14]. Dans cet article, nous allons montrer que les effets de surface sont fortement influencés par les détails microscopiques de l'interface entre le surfactant et le CL. Pour cela, nous avons étudié la réponse d'un ensemble de cellules traitées avec un surfactant ionique de la famille  $C_nTAB$ , alkyl triméthylammonium bromide.

## 2 Préparation des cellules et instabilité d'ancrage

Toutes les cellules ont la même concentration en colorant, 0.3% de MR dans du 5CB, et ont une épaisseur  $d = 14 \mu m$ . Sur un côté des lames de verres est déposé un conducteur transparent, oxyde d'étain et d'indium (ITO). Après nettoyage, nous avons traitées les lames avec un surfactant ionique de la famille  $C_nTAB$ , où  $(n - 4)$  est le nombre de groupes  $CH_2$  de la chaîne aliphatique. Par extraction à vitesse contrôlée d'une solution à concentration  $5 \times 10^{-5}$  Mol, une mono-couche de surfactant est déposée sur la face ITO de chaque lame. Une représentation de la cellule et des composés chimiques est montrée dans la Fig.1 pour le cas  $n = 19$  ( $C_{19}TAB$  ou  $HTAB$ , hexadecyl triméthylammonium bromide) le plus fréquemment utilisé [13, 14]. Dans la même figure, sont montrés les champs qui contribuent à l'énergie d'ancrage, que nous traiterons en détail plus tard. Nous avons

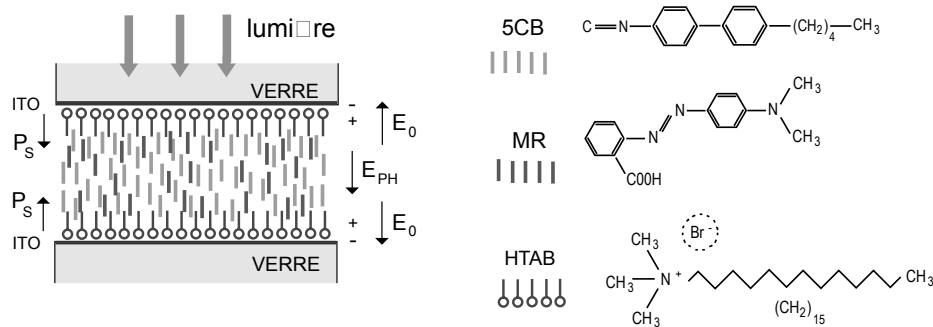


FIG. 1 – Représentation de la cellule, des molécules composant le mélange CL-colorants et des molécules de surfactant HTAB.

préparé différentes cellules, aussi bien en changeant  $n$ , de  $n = 13$  à  $n = 21$ , qu'en changeant le temps d'immersion des lames dans la solution avant l'extraction. Nous avons ensuite remplis les cellules avec le mélange CL-colorants, et nous avons observé l'ancrage résultant avec un microscope à polarisation. Pour  $n = 19$  et  $n = 21$ , il suffit d'attendre quelques minutes après le remplissage pour que l'ancrage devienne uniformément homéotrope. Pour  $n$  plus petit l'ancrage devient instable et le CL présente des transitions de planaire à homéotrope et vice-versa au cours du temps. Dans la Fig.2, on voit le cas où deux régions d'ancrages différents sont séparées par une paroi nette. Cette paroi est fortement influencée par la lumière ; elle reste stable si la cellule est gardée dans l'obscurité mais se déstabilise quand la cellule est éclairée. Quand la cellule est illuminée par la lumière du microscope on peut distinguer des domaines à orientation planaire qui sont nucléés à l'intérieur de la phase homéotrope.



FIG. 2 – *Dynamique de la paroi à l'interface homéotrope (H)-planaire (P): a) premiers instants d'illumination (après une nuit dans l'obscurité); après b) 5 et c) 10 minutes d'illumination.*

### 3 Mesure de la réponse optique

La réponse optique non linéaire des cellules à cristaux liquides est caractérisée par un changement  $\delta n$  d'indice de réfraction qui est proportionnel à l'intensité  $I$  de la lumière incidente [1]:  $\delta n = n_2 I$ . Afin d'obtenir des informations sur le coefficient non linéaire  $n_2$ , nous avons effectué des expériences d'écriture de réseaux de diffraction. Si  $\Lambda$  est le pas du réseau, dans le régime de Raman-Nath ( $\Lambda^2 \gg \lambda d$ ) l'efficacité de diffraction  $\eta$  est donnée par [15]

$$\eta = \left( \frac{\pi \delta n d}{\lambda} \right)^2.$$

En mesurant  $\eta = I_{\pm 1}/I_0$  comme le rapport entre l'intensité  $I_{\pm 1}$  du premier ordre de diffraction et l'intensité totale  $I_0$  du faisceau de lecture, on peut trouver la valeur de  $n_2$ . Le

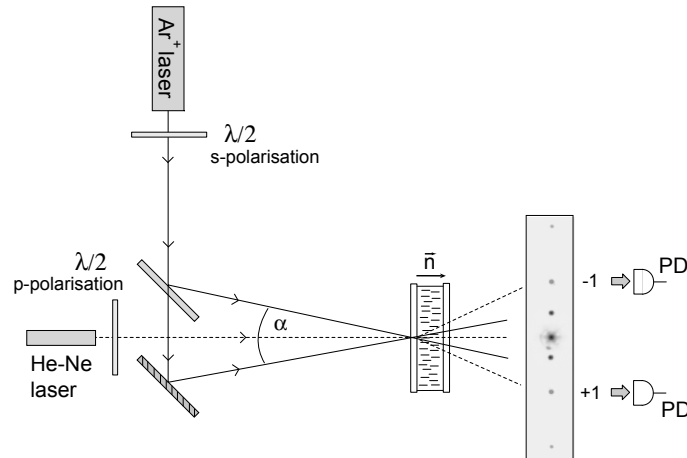


FIG. 3 – *Schéma de l'expérience.  $\vec{n}$ : directeur nématique;  $\lambda/2$ : lame à demi onde. Une image typique de la figure de diffraction à la sortie de la cellule est montrée avant les photo-diodes (PD).*

dispositif expérimental est montré en Fig.3. La cellule de CL est placée à l'intersection de deux faisceaux venant d'un laser  $\text{Ar}^+$ , symétriques par rapport à la normale de la cellule (incidence normale), qui interfèrent avec un angle  $\alpha \simeq 1^\circ$ . Ces deux faisceaux sont polarisés linéairement en direction verticale (polarisation s), élargis et collimatés ( $\lambda = 514 \text{ nm}$ , diamètre du faisceau  $5 \text{ mm}$ ). Ils écrivent dans la cellule un réseau d'indice de réfraction, du pas  $\Lambda \simeq 18 \mu\text{m}$ . Pour sonder le réseau, nous utilisons un laser He-Ne de faible puissance ( $0.8 \text{ mW}$ ), polarisé linéairement en direction horizontale (polarisation p).

Deux photodiodes sont positionnées aux ordre  $+1$  et  $-1$  de diffraction de la sonde. Lorsque les faisceaux d'écriture éclairent la cellule, nous observons un signal sur les photodiodes. Nous avons effectué plusieurs expériences avec les différentes cellules homéotropes et seule la cellule traitée par  $C_{19}TAB$  a montré une très haute sensibilité pour une faible intensité lumineuse d'écriture et un temps de réponse relativement rapide (de l'ordre de quelques secondes). Nous montrons en Fig.4 des enregistrements typiques de l'efficacité

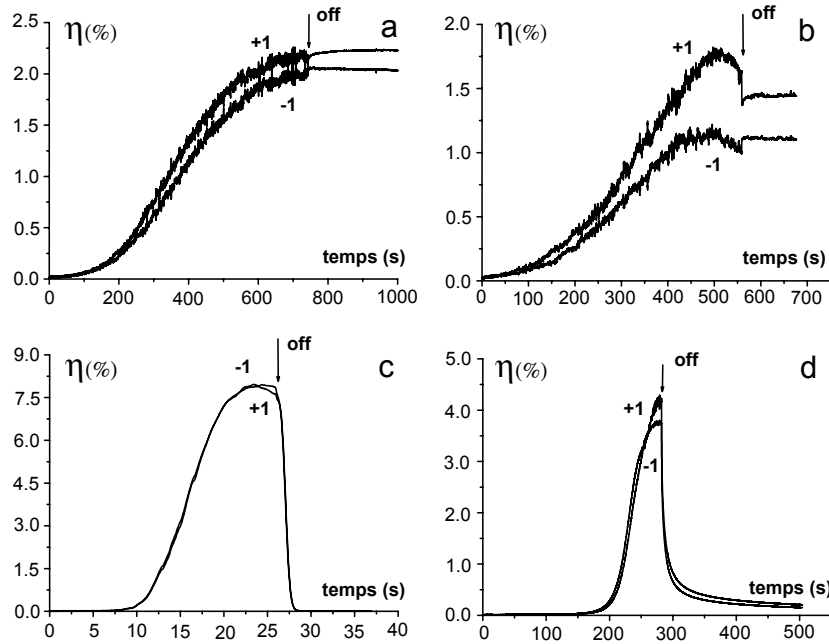


FIG. 4 – Efficacités de diffraction mesurées pour a)  $n = 13$  et  $I_{in} = 5mW/cm^2$ , b)  $n = 15$  et  $I_{in} = 5mW/cm^2$ , c)  $n = 19$  et  $I_{in} = 2.5mW/cm^2$  et d)  $n = 21$  et  $I_{in} = 20mW/cm^2$ .

de diffraction obtenue pour les différentes cellules. L'intensité totale de deux faisceaux d'écriture  $I_{in}$  varie entre 2.5 et 20  $mW/cm^2$ . Le temps de réponse du système change avec  $n$ . Pour  $n = 13, 15$  et 21 le temps de réponse est très grand; il est nécessaire d'attendre une centaine de secondes avant que le premier ordre de diffraction apparaisse (Fig.4 a,b et d). Pour  $n = 19$ , la cellule répond après quelques secondes (Fig.4 c). Même l'efficacité de diffraction est influencée par la longueur  $n$  de la chaîne du surfactant. Pour  $n = 13, 15$  et 21 l'efficacité de diffraction est très faible (Fig4 a,b et d), alors que pour  $n = 19$  ( Fig4 c) elle est maximale. Des effets de mémoire sont en outre présents pour  $n = 13, 15$  où le réseau de diffraction persiste même quand les faisceaux d'écriture sont éteints.

## 4 Discussion des résultats et conclusions

L'ensemble des observations expérimentales met en évidence le rôle fondamental des détails microscopiques à l'interface entre le CL et le surfactant. En particulier, nous avons montré qu'une non linéarité géante s'obtient seulement pour une longueur spécifique ( $n = 19$ ) de la chaîne aliphatique. Les différents comportements d'ancrage, ainsi que les différentes réponses optiques associées, sont resumés dans le tableau de la Fig.5.

Si on calcule le coefficient non linéaire  $n_2$  à partir de l'efficacité de diffraction maximale



$\eta$  obtenue pour les différentes cellules, on peut observer un maximum pour  $n = 19$ . Pour la même longueur de chaîne la réponse optique est en outre très rapide, comme il est montré dans le tableau (Fig.5) où  $T$  est le temps nécessaire pour atteindre 10% de  $\eta$ . Il y a donc une longueur caractéristique de la chaîne du surfactant qui optimise la réponse optique non linéaire des cellules à CL. Afin de confirmer ce résultat expérimental, nous avons étudié

n	Planaire	Homéotrope	$n_2(\text{cm}^2/\text{W})$	T (sec)
13	X $\longleftrightarrow$ X	X	4.1	180
15	X $\longleftrightarrow$ X	X	3.8	130
17	X $\longleftrightarrow$ X	X		
17 - 10 min		X	8.5	20
17 - 20 min		X	8.5	300
19		X	16.3	12
21		X	1.5	200

FIG. 5 – Tableau résumant les différents comportements des cellules traitées avec  $C_nTAB$ .  $n_2$  est le coefficient non linéaire et  $T$  est le temps nécessaire pour atteindre 10% de l'efficacité maximale

plus en détail le cas  $C_{17}TAB$  qui possède la longueur la plus proche de celle optimale. Nous avons préparé deux cellules en les immergeant dans la solution de surfactant plus longtemps que dans les expériences précédentes. Dans ce cas, on peut imaginer que plus d'une seule couche de surfactant est déposée sur la surface, simulant ainsi l'augmentation de la longueur effective de la chaîne de  $C_{17}TAB$ . Pour ces deux cellules l'ancrage devient homéotrope après quelques minutes. La cellule immergée durant 10 minutes, montre le même temps caractéristique pour la réponse optique que dans le cas du  $C_{19}TAB$ , même si  $n_2$  n'est pas aussi grand (Fig.5). Au contraire, pour la cellule immergée durant 20 minutes, la réponse optique devient semblable à celle de la cellule avec  $C_{21}TAB$ , c'est à dire très lente.

Une explication des phénomènes observés peut être donnée à partir de considérations sur les mécanismes impliqués dans l'ancrage. En plus de la force d'ancrage  $W_0$  imposée par le type particulier de surfactant utilisé on doit considérer, dans la détermination de l'énergie effective d'ancrage  $W_{eff}$ , un terme de champ électrique  $\vec{E}_0$ , généré par une distribution  $\sigma$  superficielle de charges, et un terme de polarisation de surface  $P_s$  (Fig.1) qui est une conséquence de phénomènes de brisure spontanée de symétrie à la surface. Si on considère tous ces effets,  $W_{eff}$  est une fonction de la densité superficielle de charges  $\sigma$  ([16], [17]) :

$$W_{eff} = W_0 + \alpha_1(\lambda_D)\sigma^2 + \alpha_2(\lambda_D/\lambda_s)\sigma$$

où les coefficients  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  dépendent de la longueur de Debye  $\lambda_D$  et de la longueur d'écrantage de la polarisation de surface  $\lambda_s$ .

En changeant la densité superficielle de charges, il est possible de déstabiliser l'ancrage et d'observer des transitions planaire-homéotrope [16].  $W_{eff}$  a en outre un minimum pour une certaine valeur de  $\sigma$  [17]. Les instabilités d'ancrage observées expérimentalement peuvent donc être expliquées comme étant provoquées par un changement de densité de charge superficielle. La présence d'une longueur caractéristique de la chaîne de surfactant qui optimise la réponse optique peut être liée au fait qu'il y ait un minimum d'énergie d'ancrage pour cette longueur.

La présence du colorant et ses interactions avec le CL et la surface peuvent justifier l'apparition d'un changement de charge superficielle. En fait, lorsque les molécules d'azo-colorant sont soumises à un rayonnement dans leur bande d'absorption, elles subissent un processus de photo-isomérisation (*trans-cis*) [9]. Cette transformation conformationnelle peut faire changer la distribution de charge sur la surface [18] et donc modifier les conditions d'ancrage.

## Remerciements

G. Russo bénéficie d'une allocation du Ministère de la Recherche, pour le développement du projet "*Contrôle de la Réorientation Optique dans les Cristaux Liquides*". Nous remercions C. Taggiasco pour son aide dans le traitement numérique des images et F. Hébert pour la correction du manuscrit.

## Références

- [1] N.V. Tabiryan, A.V. Sukhov and B. Ya. Zel'dovich, *Mol. Cryst. Liq. Cryst.* 136, 1, (1986)
- [2] I. Janossy and A.D. Lloyd, *Mol. Cryst. Liq. Cryst.* 203, 77 (1991).
- [3] I.C. Khoo, S. Slussarenko, B.D. Guenther, M.-Y. Shih, P. Chen and W.V. Wood, *Opt. Lett.* 23, 253 (1998).
- [4] F.Simoni, L. Lucchetti, D.E. Lucchetta and O. Francescangeli, *Optics Express* 9, 85 (2001).
- [5] A. G.-S. Chen and D. Brady, *Opt. Lett.* 17, 1231 (1992).
- [6] W.M. Gibbons, Paul J. Shannon, Shao-Tang Sun and B.J. Swetlin, *Nature*, 351, 49 (1991).
- [7] K. Ichimura, Y. Suzuki, T. Seki, Y. Kawanishi, T. Tamaki and K. Aoki, *J. Appl. Phys.* 28, 289 (1989).
- [8] T.Marusii, *Mol. Cryst. Liq. Cryst.* 251, 209 (1994)
- [9] D. Voloschenko, A. Khyzhnyak, Y. Reznikov, V. Reshetnyak, *Jpn. J. Appl. Phys.* 34, 566 (1995)
- [10] S. Slussarenko, O. Francescangeli, F. Simoni *Appl. Phys. Lett.*, 71, 3613 (1997)
- [11] B. Jerome, *Rep. Prog. Phys.* 54, 391 (1991)
- [12] J. Cognard, *Mol. Cryst. Liq. Cryst. Suppl. Ser.* 1, 1 (1982)
- [13] A. Petrossian and S. Residori, *Euro Phys. Lett.* 60, 79 (2002).
- [14] S. Residori and A. Petrossian, *Mol. Cryst. Liq. Cryst.* (2003).
- [15] Y. Yariv and P. Yeh, *Optical Waves in Crystals*, (John Wiley and Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2003).
- [16] A. V. Zakharov, R. Y. Dong, *Phys. Rev. E* 64, 042701 (2001)
- [17] U. Kunhnau, A. G. Petrov, G. Klose, H. Schmiedel, *Phys. Rev. E* 59, 578 (1999)
- [18] A. V. Zakharov, M. Iwamoto, *J. Chem. Phys.* 118, 10758 (2003)

## Le jeu de la survie en dynamique non linéaire

Miguel A. F. Sanjuán(1), Jacobo Aguirre (1) et Francesco d'Ovidio (2)

(1) *Grupo de Dinámica No Lineal y Teoría del Caos, Departamento de Matemáticas y Física Aplicadas y Ciencias de la Naturaleza, Universidad Rey Juan Carlos, 28933 Móstoles, Madrid, Espagne*

(2) *Instituto Mediterráneo de Estudios Avanzados, 07071 Palma de Mallorca, Espagne*

`msanjuan@escet.urjc.es`

### Résumé

Nous considérons l'application tente comme un prototype d'un système chaotique avec échappements. Nous montrons de façon analytique qu'on peut choisir une perturbation même petite, telle que le système reste toujours près d'une selle chaotique, même en présence d'un bruit d'amplitude plus grande. Il s'agit d'un jeu mathématique entre deux joueurs "le protagoniste" et "l'adversaire", et l'objectif du protagoniste est de survivre dans une région bornée, c'est à dire le voisinage d'une selle chaotique. Il peut perdre mais il ne peut pas gagner; le mieux qu'il puisse faire est de survivre et jouer à nouveau, se battre à l'infini. En l'absence d'actions pour n'importe quel joueur, la dynamique diverge, en laissant une région relativement sûre, et alors nous disons que le protagoniste perd. La survie est difficile parce qu'on permet actions plus fortes que le protagoniste. En revanche, la survie est possible parce que la dynamique, (ici modélisée par l'application tente), est chaotique; et parce que le protagoniste connaît l'action de l'adversaire en choisissant sa réponse et il lui est permis de choisir le point initial  $x_0$  du jeu. Finalement nous montrons que le protagoniste peut survivre.

## 1 Introduction

Le phénomène du chaos transitoire [1] est un fait physique intéressant qui arrive dans des systèmes où une trajectoire se meut d'une façon chaotique pour une période de temps dans une région bornée et finalement arrive à un état final, qui n'est habituellement pas chaotique. Plusieurs manifestations du chaos transitoire apparaissent dans la diffusion chaotique [2], l'advection chaotique en dynamique des fluides [3] où la compétition des espèces en écologie [4], pour n'en citer que quelques-unes. Du point de vue de la dynamique non linéaire, le phénomène du chaos transitoire est associé à l'existence d'un certain type d'ensemble qui s'appelle selle chaotique (chaotic saddle). Il est connu aussi comme ensemble invariant chaotique non attractif, et il est composé d'un ensemble borné d'orbites instables périodiques et apériodiques. Les orbites typiques du système approchent la selle chaotique en suivant la variété stable et après avoir résidé pendant une période dans son voisinage, s'en échappent en suivant la variété instable. Un important défi consisterait à trouver une méthode pour maintenir une orbite dans le voisinage de cet ensemble invariant indéfiniment.

La dépendance extrême aux conditions initiales fait que le contrôle avec des perturbations très petites est possible. Diminuer l'amplitude du contrôle constitue donc un objectif important dans ce domaine de recherche. Quand le système est dans un environnement bruyant, le contrôle d'orbites est même plus difficile, et normalement des amplitudes plus

grandes que le cas sans bruit sont nécessaires. Après le travail pionnier de Ott, Grebogi et Yorke [5], sur le contrôle du chaos, la plupart des travaux se sont centrés dans des systèmes avec attracteurs chaotiques, que ce soit avec ou sans bruit [6]. Cependant il y a eu très peu d'attention pour le cas du contrôle de selle chaotiques. L'objectif est de trouver une stratégie capable de ramener l'orbite près de la selle chaotique indéfiniment même en présence d'un bruit d'une amplitude plus forte que le contrôle.

Récemment des idées prises de la dynamique non linéaire [7, 8] ont été appliquées pour la modélisation des stratégies des jeux, où le jeu peut être décrit comme un système dynamique et notre travail s'inscrit dans ce contexte. Il s'agit d'un jeu mathématique entre deux joueurs "le protagoniste" et "l'adversaire", et l'objectif du protagoniste est de survivre dans une région bornée, c'est à dire le voisinage d'une selle chaotique. Nous décrivons ici une idée appliquée à un système dynamique non linéaire simple, mais la même idée peut être adaptée à une large variété de systèmes dynamiques avec une selle chaotique en présence de bruit et contrôle. Dans un système avec attracteurs, la tendance naturelle d'une particule est d'atteindre un des ces attracteurs, et pourtant il est possible que le protagoniste puisse se maintenir dans une région très proche d'un attracteur même quand on permet à l'adversaire des actions plus fortes. Il est important de remarquer qu'en l'absence de contrôle externe, la probabilité de survivre du protagoniste dans le voisinage de la selle chaotique est zéro, même en l'absence de bruit et cela fait que la survie du protagoniste soit une remarquable réussite [9].

La forme la plus simple de ce jeu peut être décrite par une application discrète unidimensionnelle, l'application tente, définie comme:  $T(x) = m(1 - |x|) - 1$ . Pour les cas d'intérêt comme  $m = 3$ , presque tous les points initiaux  $x_0$  conduisent à des trajectoires qui vont à  $-\infty$  pour  $n \rightarrow \infty$ . Dans ce cas, nous affirmons que le protagoniste ne survit pas. Pour survivre il doit agir. L'équation du jeu est:

$$x_{n+1} = T(x_n) + u_{n+1} + r_{n+1} \quad (1)$$

où l'adversaire choisit la perturbation  $u_{n+1}$  (en connaissant  $x_n$  et  $T$ ) et le protagoniste choisit la "réponse"  $r_{n+1}$  (en connaissant  $u_{n+1}$  et  $x_n$  et  $T$ ). La perturbation  $u_{n+1}$  peut être choisie au hasard ou avec une stratégie efficace. Il n'y a pas de différence à long terme dans le cas où le protagoniste peut survivre pour toujours.

Le protagoniste affronte ce que apparaît comme une tâche impossible parce qu'uniquement est permis  $|u_n| \leq u_0$  et  $|r_n| \leq r_0$  où  $r_0$  et  $u_0$  sont tels que  $r_0 < u_0$ . Si on considère  $r_n$  étant comme un contrôle et  $u_n$  comme un bruit, la condition requise est que le contrôle est plus fort que le bruit. Cependant, le principal objectif de ce travail est de montrer que dans le contexte du chaos transitoire il est possible de contrôler une orbite en présence de bruit, même dans le cas où le bruit est plus fort que le contrôle. L'amplitude de  $r_n$  est plus petite que l'amplitude de  $u_n$ , de telle sorte qu'on peut qualifier  $r_n$  d' "influence" plutôt que de "contrôle" parce que le protagoniste ne peut pas contrôler les détails de la trajectoire. Pour cela, nous faisons que la région relativement sûre soit l'intervalle  $S = [-1, +1]$  et finir le jeu si quelque  $x_n$  est situé en dehors de  $S$ . Si  $x_n$  est en dehors de  $S$ , l'adversaire peut choisir la suite  $u_n$  qui cause que la suite  $x_n$  diverge, et il y a un intervalle un peu plus grand qui dépend de  $u_0$  et  $r_0$  de telle façon que si  $x_n$  est en dehors, la trajectoire doit diverger même dans le cas où l'adversaire essaye d'aider. Pour garder les formules simples, nous écrivons les résultats pour  $m = 3$ , bien que des résultats similaires on peut obtenir n'importe quelle valeur de  $m > 2$ . (Si  $m \leq 2$ , il y a un attracteur chaotique et si  $u_0$  est suffisamment petit, la survie est garantie même si la taille de réponse est 0.). Nous commençons par un exemple. **Pour  $u_0 = 4/9$  et  $r_0 = 2/9$ , il existe une stratégie qui**

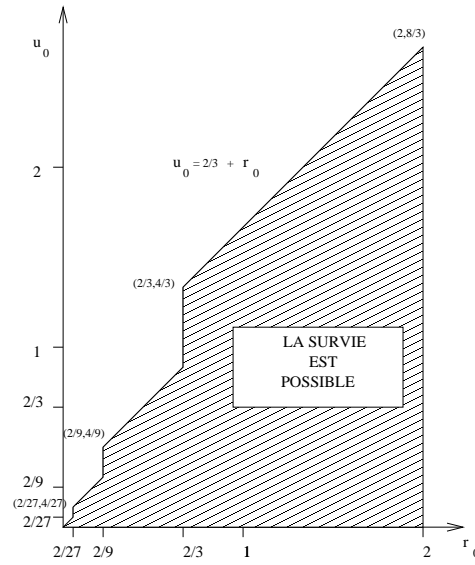


FIG. 1 – Région de paramètres de survie. La survie est possible dans la région en tirets si le protagoniste choisi d'une façon optimale. Au delà de la région en tirets, l'adversaire peut toujours gagner.

garantie la survie.

**Si  $u_0 > 2r_0$  alors il n'y a pas une stratégie qui garantie la survie.**

La meilleure stratégie pour la survie dépend de  $r_0$  comme le démontre le théorème suivant. Il existent des stratégies différentes pour  $r_0 \geq 2/3$ , et chaque  $k$  où  $r_0$  est dans  $[2/3^k, 2/3^{k-1})$ .

**Théorème.** Il y a une stratégie qui garantie la survie pour une valeur  $r_0$  donnée et  $u_0$  si et seulement s'il y a un intérêt  $k \geq 1$  pour qui  $2/3^k \leq r_0$  et  $u_0 \leq r_0 + 2/3^k$ .

Ce type de problème est très différent de la notion de contrôle standard où l'objectif est d'amener une trajectoire à un point fixe. Dans la théorie de contrôle du chaos [5] par exemple, si le bruit est présent (i.e.,  $u_n$  choisi au hasard), le contrôle  $r_n$  doit dominer  $u_n$  de telle façon qu'il soit capable d'amener la trajectoire à un point fixe spécifique et le garder proche de ce point fixe. Dans le jeu de la survie, que nous décrivons ici pour l'application tente, il y a plusieurs "points sûrs" et  $r_0$  doit être suffisamment grand pour le protagoniste peut arriver à un d'eux, mais ce choix est déterminé pour la valeur de  $u_n$ . Le protagoniste doit se déplacer entre ces points sûrs dans un ordre déterminé par la suite  $u_n$ . **Exemple.** Avant d'analyser le théorème en détail, nous examinons le cas mentionné au-dessus,  $u_0 = 4/9$  et  $r_0 = 2/9$  et nous montrons que le protagoniste peut survivre. Nous désignons quatre points comme "points sûrs",  $z_1 = -2/3 - 2/9$ ,  $z_2 = -2/3 + 2/9$ ,  $z_3 = +2/3 - 2/9$  and  $z_4 = +2/3 + 2/9$ . Il est facile de vérifier que  $T(z_i) = \pm 2/3$ , et  $T(\pm 2/3) = 0$ . L'application tente est montrée dans la Fig. 2 où tous les points sont représentés, et la Fig. 3 représente l'évolution d'une orbite dans cette situation. La stratégie du protagoniste doit être de telle sorte que tous les  $x_n$  dans l'équation (1) soient des points sûrs s'il faut garantir qu'il peut survivre. En particulier, le protagoniste doit choisir que  $x_0$  soit un des points sûrs pour garantir qu'il va réussir (quoiqu'en fait la plupart des points

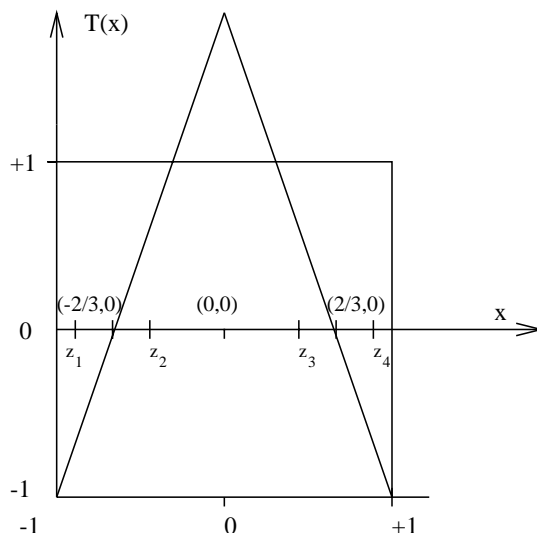


FIG. 2 – L'application tente  $T(x) = m(1 - |x|) - 1$  défini dans l'intervalle  $[-1, +1]$  pour  $m = 3$ . Les quatre points  $z_i$  désignent "points sûrs" et aussi  $T(z_i) = \pm 2/3$ .

en  $S = [-1, 1]$  pourraient être valables comme  $x_0$ .) Si  $x_n$  est un point sûr pour n'importe quel entier  $n \geq 0$ , alors nous montrons qu'il peut choisir  $r_{n+1}$  de telle sorte que  $x_{n+1}$  est un point sûr, et alors il survit un autre jour. Étant donné que  $x_n$  est un point sûr, nous pouvons supposer par exemple que  $T(x_n)$  est  $+2/3$ . (Le cas  $-2/3$  est identique.) Dès lors, une fois choisi  $u_{n+1}$ , le point  $T(x_n) + u_{n+1}$  doit être dans l'intervalle  $[2/3 - 4/9, 2/3 + 4/9]$  et ainsi est au plus à une distance de  $2/9$  des points  $z_3$  ou  $z_4$ . De là  $r_{n+1}$  peut être choisi avec  $|r_{n+1}| \leq r_0$  de telle sorte que  $x_{n+1}$  est un point sûr. Ce cas peut être généralisé en constatant que cette stratégie fonctionne si  $u_0 - r_0 \leq 2/9$ .

Cet exemple illustre la raison pour laquelle nous appelons ce problème le jeu de la "survie" plutôt que le "contrôle", puisque le protagoniste est "ballotté" d'un point sûr à un autre sans être capable de choisir entre ces points (comme décrit la Fig. 3). Il y a typiquement un seul point qui puisse être atteint avec  $|r_{n+1}| \leq r_0$  pour chaque  $n$ . Dans l'exemple ci-dessus, il faut remarquer que  $T(x_{n+1})$  est  $-2/3$  si  $x_{n+1}$  est  $z_4$  ou  $+2/3$  si  $x_{n+1}$  est  $z_3$ . Le protagoniste ne peut pas choisir si  $T(x_{n+1})$  doit être positive ou négative (à moins que  $u_{n+1}$  soit 0 de telle sorte que  $z_3$  et  $z_4$  soient également proches).

**La stratégie générale** (appelée R) pour choisir  $r_{n+1}$  consiste à identifier une collection de points sûrs et choisir  $x_0$  pour être l'un d'entre eux et de là choisir  $r_{n+1}$  afin que  $x_{n+1}$  soit un point sûr. Dans le cas où  $2/3 \leq r_0$  et  $u_0 \leq r_0 + 2/3$ , ( $k = 1$ ), il y a 2 points sûrs, qui sont  $z_1 = -2/3$  et  $z_2 = 2/3$ . Alors si  $x_n$  est un point sûr,  $T(x_n) = 0$ , et le point  $T(x_n) + u_{n+1}$  doit être dans l'intervalle  $[-u_0, u_0]$ . Comme  $u_0 \leq r_0 + 2/3$ , chaque point de l'intervalle est à une distance  $r_0$  jusqu'à un point sûr. Par conséquent, la stratégie peut être menée à bout. Dans le cas général où  $2/3^k \leq r_0$  et  $u_0 \leq r_0 + 2/3^k$ , il y a  $2^k$  points sûrs, à savoir  $T^{-k}(0)$

$$\pm 2/3^1 \pm 2/3^2 \pm \dots \pm 2/3^k \text{ for } k \geq 1 \quad (2)$$

Il faut remarquer que  $T(\pm 2/3^1 \pm 2/3^2 \pm \dots \pm 2/3^k)$  est un point de la forme  $\pm 2/3^1 \pm 2/3^2 \pm \dots \pm 2/3^{k-1}$  (qui est simplement 0 si  $k = 1$ ). L'argument montre que la stratégie

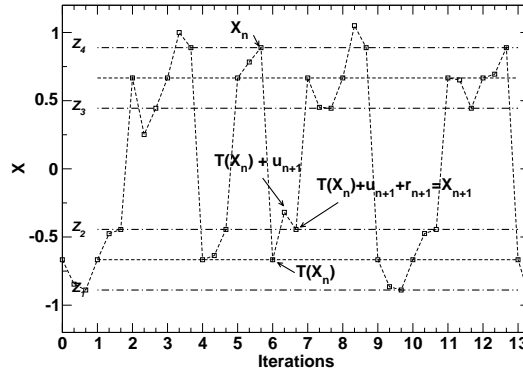


FIG. 3 – Évolution d'une orbite, pour  $k = 2$ ,  $m = 3$ ,  $r_0 = 2/9$  et  $u_0 = 4/9$ . Les quatre lignes points-tirets représentent les “points sûrs”  $z_i$ , et les lignes tirets représentent leurs images  $T(z_i) = \pm 2/3$ . Les points qui ne sont pas au delà d'aucune de ces lignes représentent les pas de l'orbite après l'influence du bruit  $u_n$ .

peut fonctionner.

Nous argumentons maintenant qu'une stratégie est garantie seulement dans les cas ci-dessus mentionnés. Pourtant si on choisit  $k$  de telle sorte que  $2/3^k \leq r_0 < 2/3^{k-1}$  pour quelque  $k \geq 1$ , et  $u_0 = r_0 + 2/3^k + \delta$  où  $\delta > 0$ , alors il n'existe pas une stratégie qui puisse être garantie; d'autre sorte, il existe une stratégie  $U$  pour choisir les points  $u_n$  de telle façon que le protagoniste perd.

Soit  $S_k$  l'ensemble de points sûrs. La stratégie  $U$  consiste à choisir  $u_n$  de sorte que  $T(x_{n-1}) + u_n$  soit aussi loin que possible. Soit  $Y_k$  l'ensemble  $\{x : |x - y| \leq r_0 \text{ pour n'importe quel } y \text{ dans } S_k\}$ . Alors  $Y_k$  est l'ensemble des points qui ne sont pas plus lointains de  $r_0$  que de quelques points sûrs. Pour tout point  $x_0$ , il y a un  $u_1$  avec  $|u_1| \leq u_0$  tel que  $T(x_0) + u_1$  n'est pas dans  $Y_k$ . Pour autant  $x_1 = T(x_0) + u_1 + r_1$  (avec  $|r_1| \leq r_0$ ) n'est pas un point sûr. Soit  $J_k$  le plus petit intervalle contenant  $S_k$ .

Si  $x_n$  n'est pas dans  $J_k$ , il est facile de vérifier que la stratégie  $U$  aboutit à  $x_{n+1}$  qui est aussi en dehors  $J_k$ , mais plus loin de  $S_k$ . Si  $x_n$  est dans  $J_k$ , et  $J'$  représente l'intervalle le plus petit contenant  $x_n$  dont les frontières sont de points sûrs. La stratégie  $U$  mène dans  $x_{n+1}$  laquelle est dans  $T(J')$ , qui n'a pas de points de  $S_{k-1}$  dans son intérieur et  $x_{n+1}$  est plus lointain que  $S_k$ . De plus, la longueur de  $T(J')$  est plus grande que celle de  $J'$ . Comme le processus évolue, la trajectoire est éventuellement à l'extérieur de  $J_k$ , un cas qui a été discuté ci-dessus.

Nous avons réalisé plusieurs expériences numériques pour clarifier nos résultats. Un bruit distribué uniformément avec une valeur moyenne de zéro a été utilisé comme  $u_n$ , puisque l'unique condition requise est d'être bornée. Evidemment les mêmes résultats auraient été obtenus pour tout autre cas de bruit borné. Il faut remarquer que pour cette raison le bruit gaussien ne garantit pas la survie du protagoniste. Pour des valeurs très différentes de  $k$ ,  $m$ , la réponse maximum  $r_0$  et la perturbation maximum  $u_0$ , étant  $r_0 \leq u_0$ , nous avons itéré la dynamique du jeu jusqu'à plusieurs millions de pas. Comme affirme notre théorème, le protagoniste survit à l'intérieur d'une région sûre  $[-1, 1]$  si et seulement si  $u_0 \leq 2r_0$ .

Les résultats de ce travail peuvent être généralisés à toute application discrète unidimensionnelle et unimodale avec un sillage chaotique associé (c'est à dire avec des échappements), montrant qu'il est toujours possible de survivre avec moins de contrôle que de bruit. La relation  $\frac{u_0}{r_0}$ , aussi bien que la structure des points sûrs dépendra des propriétés de chaque application discrète.

En résumé, nous décrivons dans cet article une idée qui pourrait potentiellement être appliquée à une grande variété d'applications avec un sillage chaotique, en présence d'environnements bruyants, pour un choix de  $r_0$  et  $u_0$  adéquat. Contrairement à l'idée traditionnelle de contrôle, qui tend à mener l'état d'un système à un état précis, il y a des situations où il y a seulement la possibilité d'une influence dans un environnement chaotique. La différence entre *influence* et *contrôle* grossièrement peut être décrite par  $r_0 < u_0$  vs.  $r_0 > u_0$ . Finalement, l'information nécessaire pour appliquer notre méthode est juste de connaître la position approximative des points sûrs. Cette information peut être obtenue par l'analyse de séries de temps, et cela suggère la possible application de cette méthode de contrôle aux systèmes physiques.

## Remerciements

Nous remercions James A. Yorke pour nous avoir suggéré ce problème qui, nous croyons peut être considéré comme une analogie de la vie quotidienne. J. A. et M. S. remercient le soutien financier du Ministère des Sciences et Technologie de l'Espagne, projets BFM2000-0967 and BFM2003-03081 et l'Universidad Rey Juan Carlos, projets URJC-PGRAL-2001/02, URJC-PIGE-02-04 et URJC-GCO-2003-16. F. d'O. remercie le soutien financier du Ministère des Sciences et Technologie de l'Espagne, et FEDER, projet REN2001-0802-C02-01/MAR (IMAGEN).

## Références

- [1] T. Tel, "Transient chaos," in *Directions in Chaos*, Vol. 3, Experimental Study and Characterization of Chaos, edited by Hao Bai-Lin (World Scientific, Singapore, 1990), pp. 149-211.
- [2] S. Bleher, C. Grebogi, and E. Ott, *Bifurcation to Chaotic Scattering*, Physica D **46**, 87 (1990).
- [3] C. Jung, T. Tel, and E. Zemniak, *Application of scattering chaos to particle transport in a hydrodynamical flow*, Chaos **3**, 555 (1993).
- [4] K. McCann and P. Yodzis, *Nonlinear Dynamics and Population Disappearances*, Am. Nat. **144**, 873 (1994).
- [5] E. Ott, C. Grebogi, and J.A. Yorke, *Controlling Chaos*, Phys. Rev. Lett. **64**, 1196 (1990).
- [6] L. Poon and C. Grebogi, *Controlling Complexity*, Phys. Rev. Lett. **75**, 4023 (1995).
- [7] E. Akiyama and K. Kaneko, *Dynamical Systems Game Theory and Dynamics of Games*, Physica D **147**, 221 (2000).
- [8] E. Akiyama and K. Kaneko, *Dynamical Systems Game Theory II*, Physica D **167**, 36 (2002).
- [9] J. Aguirre, F. d'Ovidio, and M.A.F. Sanjuán, *Controlling chaotic transients: Yorke's Game of Survival*, Phys. Rev. E **69**, 016203 (2004). Virtual Journal of Biological Physics Research **7**(3) (2004).



## Approches multifractales pour des séries temporelles en biologie.

F. G. Schmitt, L. Seuront

*CNRS, UMR ELICO, Station Marine de Wimereux*

*BP 80, 28 av. Foch, 62930 Wimereux*

francois.schmitt@univ-lille1.fr, laurent.seuront@univ-lille1.fr

### Résumé

Nous considérons ici l'applicabilité d'approches multifractales issues principalement du domaine de la turbulence, à des thématiques biologiques, ou concernant le couplage physique-biologie. Ces approches permettent de caractériser les fluctuations de séries temporelles, pour toute une gamme d'échelle, et pour toutes les intensités. Pour un champ aléatoire  $X(t)$  à incréments stationnaires, cela consiste à considérer les moments des fluctuations des incréments  $\Delta X_\tau = |X(t + \tau) - X(t)|$ , à l'aide de la seconde fonction caractéristique  $\zeta(q)$  telle que  $\langle \Delta X_\tau^q \rangle \approx \tau^{\zeta(q)}$ . Cette fonction est généralement nonlinéaire et concave, et caractérise les fluctuations de la série temporelle considérée; plus elle est nonlinéaire, plus le champ analysé présente une forte intermittence. Ce cadre d'analyse peut être appliqué à toute série temporelle présentant un aspect aléatoire et intermittent sur une gamme d'échelle assez étendue. Nous présentons ici des exemples issus du domaine de la biologie marine. Nous mentionnons également une application dans le cadre des séries temporelles de battement de coeur.

## Introduction

Les organismes biologiques sont complexes dans leur fonctionnement, mais aussi dans leur rapport à leur environnement. Leur fonction, structure, organisation, s'est mise en place au cours de l'évolution; cette évolution est une adaptation au milieu, et il est donc naturel d'étudier les organismes vivants non seulement pour eux-même, mais en relation avec le milieu et l'environnement qui les a façonné tels qu'ils sont actuellement. Cette influence de l'environnement sur le comportement est particulièrement marquée pour les organismes planctoniques (végétaux phytoplancton, ou animaux zooplancton), "plongés" au sein d'un environnement turbulent.

La définition du plancton est en fait un "organisme incapable de mouvements propres et advecté par la turbulence", mais cette définition demanderait à être précisée. En effet, selon cette définition, on s'attendrait à ce que les organismes planctoniques, le plus souvent de très petite taille (variant entre 10  $\mu m$  et quelques  $cm$ ) soient advectés passivement par la turbulence, ce qui apparenterait leur concentration à celle d'un scalaire passif tel la température turbulente, ou la salinité. Mais il se trouve que, d'un côté, le zooplancton est capable de mouvements propres d'intensité limitée, mais pouvant atteindre sporadiquement quelques  $cm/s$ , ce qui lui permet d'adopter des stratégies de comportement en fonction de la turbulence locale, pour optimiser son taux de rencontre avec un partenaire ou avec une proie. D'un autre côté, les cellules phytoplanctoniques peuvent s'aggréger, modifier leur flottabilité pour se rapprocher de la surface riche en lumière, ou se laisser sédimer dans des zones plus profondes riches en sels nutritifs nécessaires à leur métabolisme. Cette stratégie comportementale se traduit également, pour la concentration phytoplanctonique, par des statistiques pouvant différer de celles d'un scalaire passif.

Ce comportement représente une activité biologique qui existe sous forme de couplage entre la turbulence et la biologie (voir [1] pour un état de l'art récent de la question). Ce couplage se traduit par des lois d'échelles spécifiques, que nous étudions, en milieu turbulent, en comparant les statistiques de la fluorescence, indicatrice de la concentration phytoplanctonique à celles de la température

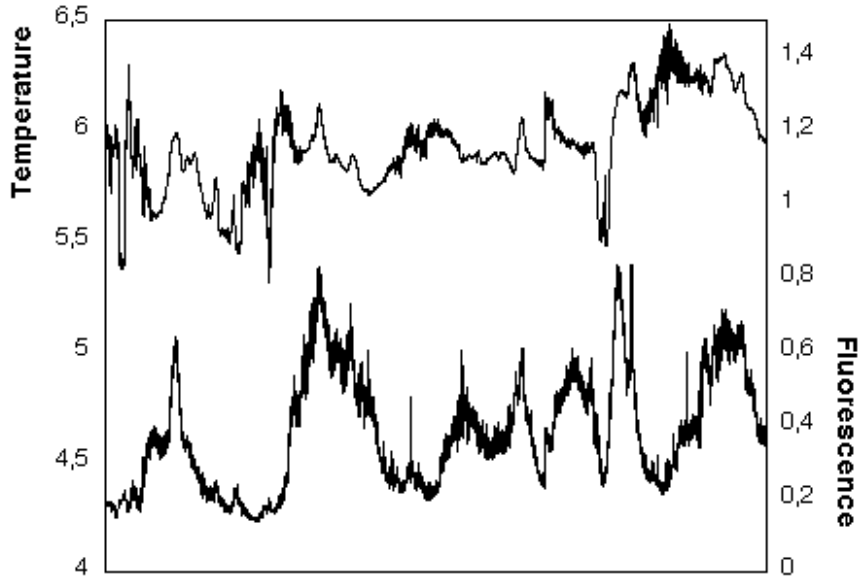


FIG. 1 – Exemples de séries temporelles de fluorescence (indicatrice de la concentration phytoplanctonique) et de température océanique, enregistrées à 2 Hz. De fortes fluctuations sont visibles à toutes les échelles; cette intermittence est modélisée dans le cadre multifractal.

## 1 La méthode des fonctions de structure pour les champs multifractals

La turbulence océanique développe une forte variabilité sur de grandes gammes d'échelles spatiales et temporelles (voir la Figure 1). Une des caractéristiques fondamentales de la turbulence développée est l'intermittence de ses fluctuations, qui est étudiée et modélisée classiquement à l'aide de fonctions de structure des incréments de la série temporelle  $X(t)$  (nous nous plaçons ici dans le cadre des séries temporelles)  $\Delta X_\tau = |X(t + \tau) - X(t)|$ , où  $\tau$  est l'incrément temporel, et où le processus stochastique est supposé à incréments stationnaires, ce qui fait que les statistiques de  $\Delta X_\tau$  ne dépendent que de  $\tau$ . On étudie ici les moments statistiques de ces incréments, qui obéissent à une loi de puissance de la forme:

$$S_q(\tau) = \langle |\Delta V_\tau|^q \rangle \approx \tau^{\zeta(q)} \quad (1)$$

où  $\zeta(q)$  est une fonction caractérisant l'invariance d'échelle des moments, qui est aussi une seconde fonction caractéristique (ou une fonction génératrice des cumulants). Cette fonction caractérise l'invariance d'échelle des fluctuations; à toutes les échelles et pour toutes les intensités: le moment  $q = 1$  correspond à la moyenne des fluctuations, et les moments de plus en plus élevés correspondent à des fluctuations d'intensité de plus en plus grande.

La fonction  $\zeta(q)$  donne aussi des indications sur le type d'invariance d'échelle du processus: les fonctions linéaires correspondent à un processus fractal, tandis que les fonctions non-linéaires sont obtenues pour des processus multifractals. Par exemple,  $\zeta(q) = q/2$  pour le mouvement Brownien,  $\zeta(q) = q/3$  pour une turbulence non-intermittente,  $\zeta(q) = qH$  ( $0 \leq H \leq 1$ ) pour un mouvement Brownien fractionnaire d'indice  $H$ . Pour un processus multifractal,  $\zeta(q)$  est non-linéaire et convexe; cette convexité est une caractéristique de l'intermittence (fortes fluctuations structurées spatialement), et plus la fonction est convexe, plus l'intermittence de la série temporelle sera forte (voir [2] pour des développements). Nous voyons ci-dessous différentes applications de cette approche pour des séries temporelles biologiques.

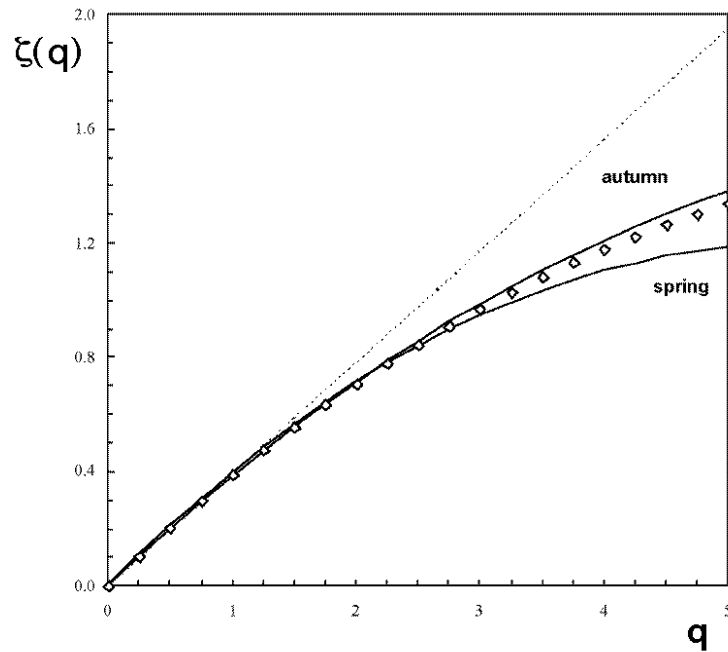


FIG. 2 – Fonctions  $\zeta(q)$  estimées expérimentalement pour la température et la chlorophylle. Les losanges représentent la température, les données de chlorophylle ont été échantillonnées au même point cote au printemps et à l'automne.

## 2 Diverses influences sur les fonctions de structure de la fluorescence

Les couplages physique-biologie en milieu turbulent peuvent être étudiés à l'aide des méthodes précédentes issues de la turbulence. Cette approche s'est déjà révélée fructueuse par le passé [3, 4], ce que nous illustrons ici par deux nouveaux exemples.

Les efflorescences phytoplanctoniques printanières et automnales sont caractérisées par des concentrations différentes (toujours nettement plus élevées au printemps) et des espèces différentes. Nous avons ainsi testé le caractère passif des cellules phytoplanctoniques dans un même environnement (les eaux côtières de la Manche orientale) dans des contextes écologiques différents (printemps et automne), mais aussi pour chaque saison dans des conditions de concentrations différentes. Des séries temporelles de fluorescence

ont ainsi été échantillonnées simultanément à la température et la salinité (considérées ici comme des scalaires purement passifs) au même point fixe respectivement à l'aide d'un fluorimètre SeaTech et d'une sonde multiparamétrique Seabird.

Les fonctions  $\zeta(q)$  obtenues au printemps et en automne pour la température et la salinité présente le même comportement (losanges, Fig. 2). Par contre, la fonction  $\zeta(q)$  estimée à partir des données de fluorescence échantillonnées au printemps est nettement plus convexe que celle obtenue en automne. La distribution des cellules phytoplanctoniques apparaît donc plus intermittente au printemps qu'à l'automne. Ce comportement peut être mis en relation avec l'espèce phytoplanctonique dominant l'efflorescence printanière. En effet, la Prymnésiophycée *Phaeocystis* sp. est caractérisée par un comportement fortement aggrégatif, les cellules isolées sécrétant une matrice muqueuse permettant la formation de colonies de grande taille (jusqu'à plusieurs mm alors que la taille d'une cellule isolée est de l'ordre de  $5\mu m$ ). Par contre à l'automne les espèces en présence (essentiellement de petites diatomées) ne possèdent pas de forme coloniale, et présentent de facto une distribution beaucoup moins intermittente et plus proche de celle d'un scalaire passif (Fig. 2). La même

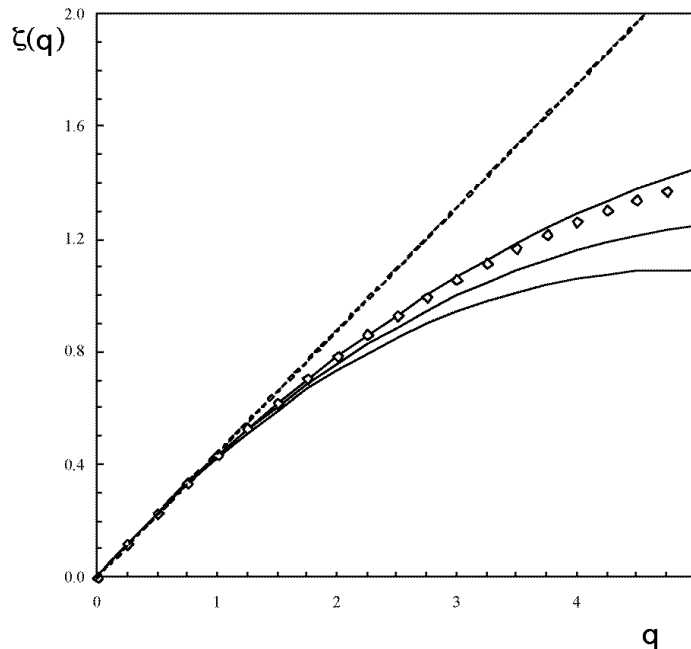


FIG. 3 – Fonctions  $\zeta(q)$  estimées expérimentalement pour la température et la chlorophylle. Losanges: la température; courbes continues de bas en haut: concentrations croissantes en chlorophylle, dans des conditions hydrodynamiques semblables. Échantillonnage à la côte au printemps.

approche a été utilisée pour comparer la distribution des cellules phytoplanctoniques en relation avec leur concentration. Au printemps il apparaît ainsi que les cellules phytoplanctoniques sont distribuées de manière plus intermittentes pour des concentrations élevées (supérieures à  $20\mu g$  Chl/l) que pour des concentrations plus faibles où leur distribution converge vers un comportement de scalaire passif (Fig. 3). Nous avons obtenu des résultats similaires en automne, le comportement des fonctions  $\zeta(q)$  restant néanmoins beaucoup plus proche de celui d'un scalaire passif qu'au printemps.

Ces résultats montrent que les cellules phytoplanctoniques considérées comme des scalaires passifs peuvent présenter un comportement très spécifiques, à mettre en rela-

tion avec un contrôle de type “densité-dépendence” et “espèce-dépendence”. Compte-tenu des travaux récents démontrant le caractère intermittent du comportement natatoire d’un copépode en présence et en absence de nourriture [5, 6], il est probable que ce comportement soit également contrôlé par la nature de la distribution des cellules phytoplanctoniques dont se nourrit un copépode. La confrontation d’une connaissance de la distribution des proies phytoplanctoniques dans différents écosystèmes et pendant différentes saisons et de celle du comportement de leurs prédateurs devrait permettre, à terme, d’inférer la nature de la distribution du phytoplancton par la simple observation du comportement natatoire du zooplancton.

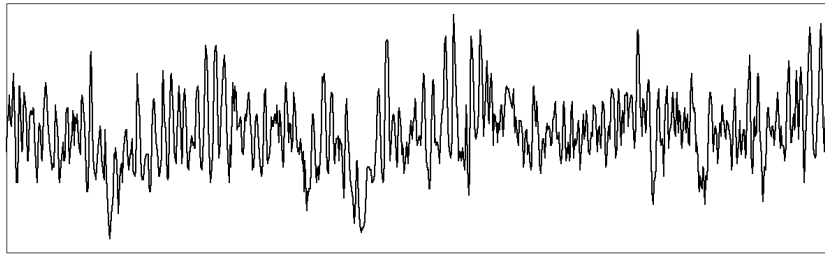


FIG. 4 – Exemple de série temporelle physiologique présentant une forte intermittence de nature multifractale: les intervalles RR caractérisant la variabilité du rythme cardiaque chez un patient sain.

### 3 Les fonctions de structure multifractales pour des signaux physiologiques

Mentionnons ici l’application ces dernières années des fonctions de structure multifractales dans le domaine physiologique, par exemple pour l’étude de la variabilité du rythme cardiaque, sous forme des lois d’échelle multifractales dans les intervalles RR successifs (Fig. 4) chez des patients sains ou malades [7, 8, 9]. Ces études tendent à montrer que la série temporelle formée de ces intervalles possède en général des propriétés d’invariance d’échelle multifractale, tandis que pour certaines pathologies, la multifractalité est perdue et la série n’est que mono-fractale [9].

De façon plus générale, les approches multifractales peuvent être utilisées pour les séries temporelles en écologie, biologie ou physiologie, pour des signaux complexes présentant un grand nombre de degrés de liberté, par opposition au “chaos déterministe” présentant un nombre de degrés de liberté plus faible.

## Références

- [1] L. Seuront et P. Strutton (eds.), *Handbook of scaling methods in aquatic ecology*, CRC Press (2004).
- [2] F. G. Schmitt, *Intermittence et turbulences; analyse de données, validation de modèles et applications*, HDR, Université Paris 6 (2001).
- [3] L. Seuront et al., *Universal multifractal analysis as a tool to characterise multiscale intermittent patterns; example of phytoplankton distribution in turbulent coastal waters*, J. Plankton. Res., **21**, 877-922 (1999).
- [4] L. Seuront et F. G. Schmitt, *Eulerian and Lagrangian properties of biophysical intermittency in the ocean*, Geophys. Res. Lett., sous presse (2004).
- [5] F. G. Schmitt et L. Seuront, *Multifractal random walk in copepod behaviour*, Physica A, **301**, 375-396 (2001).
- [6] L. Seuront, et al., *From random walk to multifractal random walk in zooplankton swimming behavior*, Zoological Studies, sous presse (2004).
- [7] D. R. Bickel, *Simple estimation of intermittency in multifractal stochastic processes: biomedical applications*, Physics Letters A, **262**, 251-256 (1999).
- [8] H. E. Stanley et al., *Statistical physics and physiology: monofractal and multifractal approaches*, Physica A, **270**, 309-324 (1999).
- [9] P. C. Ivanov et al., *Multifractality in human heartbeat dynamics*, Nature, **399**, 461-465 (1999).

## Le non linéaire et la production vocale

Denisse Sciamarella

*LIMSI-CNRS*

*BP 133 - F 91403 ORSAY Cedex*

*sciamarella@limsi.fr*

### Résumé

La production du son par vibration de membranes sous les forces de pression du débit d'air n'est pas exclusive à l'homme: elle est commune à la plupart des mammifères et aux oiseaux chanteurs. La complexité des vocalisations observée en particulier dans les cris de nouveaux nés ou dans les voix pathologiques est connue depuis les années 60, mais l'interprétation de ces irrégularités en termes de la dynamique non linéaire ne date que des années 90. Elle montre que la complexité d'une vocalisation peut émerger d'un système avec un nombre réduit de variables dynamiques gérées par des instructions simples. Des exemples issus de travaux récents concernant le chant contemporain, les appels des macaques et le chant des oiseaux sont présentés pour illustrer ces idées.

## 1 Introduction

La génération de son chez l'homme est un effet combiné des actions de respiration, phonation et articulation. A exception des sons non voisés qui sont produits lorsque le nombre de Reynolds à une constriction de l'appareil vocal dépasse une valeur critique, la source de la production vocale chez l'homme est la glotte: un tuyau à membranes souples situées dans le larynx et capables d'osciller sous la force de pression du débit d'air issu des poumons. Ces membranes sont connues sous la dénomination de cordes vocales. Leur masse, tension et longueur effectives, réglées par contrôle musculaire, déterminent la fréquence fondamentale et la forme de l'onde de débit glottique. L'air passe ensuite sous la forme de jets discrets successifs au conduit vocal qui modifie et enrichit spectralement ce signal pour produire une variété de sons assez large. La forme adoptée par le conduit vocal détermine la nature du son: voyelle, consonne. Les caractéristiques ergonomiques de la glotte et du conduit vocal donnent à chaque individu une voix unique et reconnaissable.

Ce principe de production vocale est commun à presque tous les mammifères. A l'exception de l'homme adulte (et de quelques espèces de daims [1]), le larynx a une position haute dans le cou qui permet de respirer et de s'alimenter simultanément. Dans ces cas, la zone supra-laryngienne est très réduite et les sons produits par les cordes vocales sont donc peu sujets à des modifications. Dans la description de l'organe vocal, les détails morphologiques peuvent avoir une certaine importance chez les animaux. La majorité des mammifères non humains possèdent en général des sacs d'air et des prolongations de la membrane qui forme les cordes vocales qui augmenteraient l'efficacité dans la production de sons forts et aigus nécessaires à la communication à grande distance [2].

La partie moyenne du larynx humain présente aussi une paire de replis muqueux supplémentaires surplombant les cordes vocales et connus comme les fausses cordes vocales ou plis vestibulaires. Néanmoins, ces structures n'interviennent que rarement dans la phonation (chez les chanteurs gutturaux, les sujets qui "poussent leur voix" ou en cas d'hypertrophie).

Le cas des oiseaux chanteurs est particulièrement intéressant. Leur organe vocal, le syrinx, comporte deux cavités dont chacune est une réplique de l'appareil phonatoire humain à une échelle plus petite. Ces cavités sont placées en arrière de la trachée, à la bifurcation des bronches et peuvent être utilisées simultanément pour produire des sons d'une extrême complexité.

Tout modèle de production vocale comprend une description de l'aérodynamique de l'écoulement et de la biomécanique des cordes vocales. Bien que les degrés de liberté du système vocal excités pendant l'émission de son puissent être nombreux (cordes droite et gauche, mouvement vertical, ondes de surface, oscillations antérieur-postérieur), les modèles biomécaniques d'ordre bas s'avèrent capables de décrire les modes de phonation (mécanismes laryngés) les plus courants et de reproduire des effets acoustiques complexes [3]. La raison en est que les cordes vocales sont essentiellement un système d'oscillateurs couplés par leur collision. Or, les oscillateurs couplés constituent un exemple désormais classique de système déterministe simple capable de présenter des bifurcations et des régimes chaotiques. La complexité de la vibration des cordes vocales observée en particulier dans les cris de nouveaux nés ou dans les voix pathologiques chez l'homme est connue depuis les années soixante [4], mais l'interprétation de ces irrégularités en termes de la dynamique non linéaire ne date que des années quatre-vingt-dix [5].

Dans cet article, on esquisse le rôle du non linéaire dans la production vocale à travers des exemples issus des travaux récents dans le domaine. On discutera brièvement l'importance des outils apportés par la dynamique non linéaire pour la caractérisation du répertoire vocal animal, la modélisation de la production vocale à partir des instructions neuronales et l'interprétation évolutive des fonctionnalités de l'organe vocal.

## 2 Quelques exemples

Une classification de la variété de comportements observés pour les cordes vocales avec des termes issus de la dynamique non linéaire comprend:

- cycle limite: les cordes vocales synchronisent leur vibration pour produire des oscillations autoentretenues périodiques et régulières; ce régime -qui correspond à l'émission d'une voyelle soutenue- est atteint par une bifurcation de Hopf lors de la variation de la pression sousglottique et l'activité musculaire [6],
- tore: les cordes gauche et droite oscillent indépendamment faute d'un couplage fort, produisant deux mélodies à fréquences différentes (biphonation),
- duplication de période: des asymétries légères dans la masse ou tension effectives des cordes favorisent une synchronisation de la vibration des cordes par accrochage de fréquences connue comme diplophonie,
- cascade sous-harmonique: séquence de dédoublement de période subie par les cordes vocales (multiphonie) lors d'une variation graduelle des paramètres de contrôle,
- régime chaotique: les cordes vocales perdent la synchronisation et présentent des vibrations irrégulières et non périodiques qui se traduisent en un spectre large, avec de l'énergie à plusieurs fréquences différentes.

Les adultes humains tendent à éviter les régimes irréguliers, à l'exception des manifestations musicales particulières, comme le chant contemporain (voir figure 1). Des



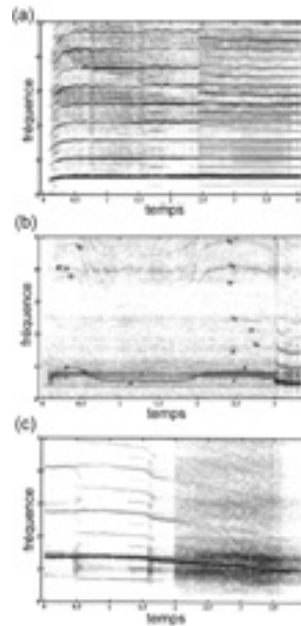


FIG. 1 – Exemples tirés de la musique vocale contemporaine - source [7] (avec l'accord des auteurs): (a) cascade sous-harmonique dans un solo improvisé par D. Stratos, (b) biphonation dans un solo improvisé par D. Stratos, (c) transition vers un régime chaotique par duplication de période dans un solo de Fatima Miranda

travaux récents montrent que ce qui est atypique ou aberrant chez l'homme, peut être courant chez certains animaux. Les appels de macaques présentent souvent une ou plusieurs bifurcations. Du fait que de tels appels diffèrent qualitativement d'autres individus, il a été suggéré que les phénomènes non linéaires pourraient fournir une approche robuste pour la reconnaissance d'un individu particulier [8]. La figure 2 montre trois appels différents d'une femelle macaque avec de phénomènes non linéaires. D'autres exemples de phénomènes non linéaires chez les animaux sont analysés en [9]. La presque omniprésence des irrégularités dans le répertoire acoustique animale peut être attribuée à l'intervention des structures oscillantes supplémentaires de l'organe vocal mentionnées dans l'introduction. Une simulation numérique d'un modèle à deux degrés de liberté auquel on ajoute un élément supplémentaire jouant le rôle des membranes vocales des chauves-souris montre d'une part qu'elle permet de dépenser une quantité inférieure d'énergie dans la production de sons ultrasoniques intenses nécessaires à l'écholocation, et d'autre part que les membranes favorisent l'apparition d'une cascade de bifurcations qui serait autrement absente [2].

Le non linéaire semble de même jouer un rôle important dans la communication vocale des oiseaux chanteurs. La structure des duos dans le chant du fourrier roux sud-américain en est un exemple (voir figure 3). D'après l'organisation de l'accrochage des fréquences, l'audition du male chez la femelle semble forcer les décharges neuronales qui contrôlent son chant à la façon d'un oscillateur non linéaire soumis à un forçage périodique [10].

Des modèles non linéaires du contrôle neuronal du syrinx gérant la tension et la pression du système périphérique (les paramètres de contrôle du système dynamique) ont été récemment implémentés [11] [12]. Ces travaux montrent que la complexité d'une

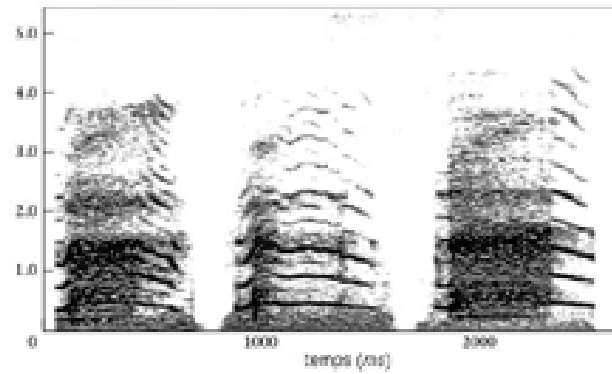


FIG. 2 – Phénomènes non linéaires visualisés dans le sonagramme de trois appels d'une femelle macaque -source [8] (avec l'accord des auteurs).

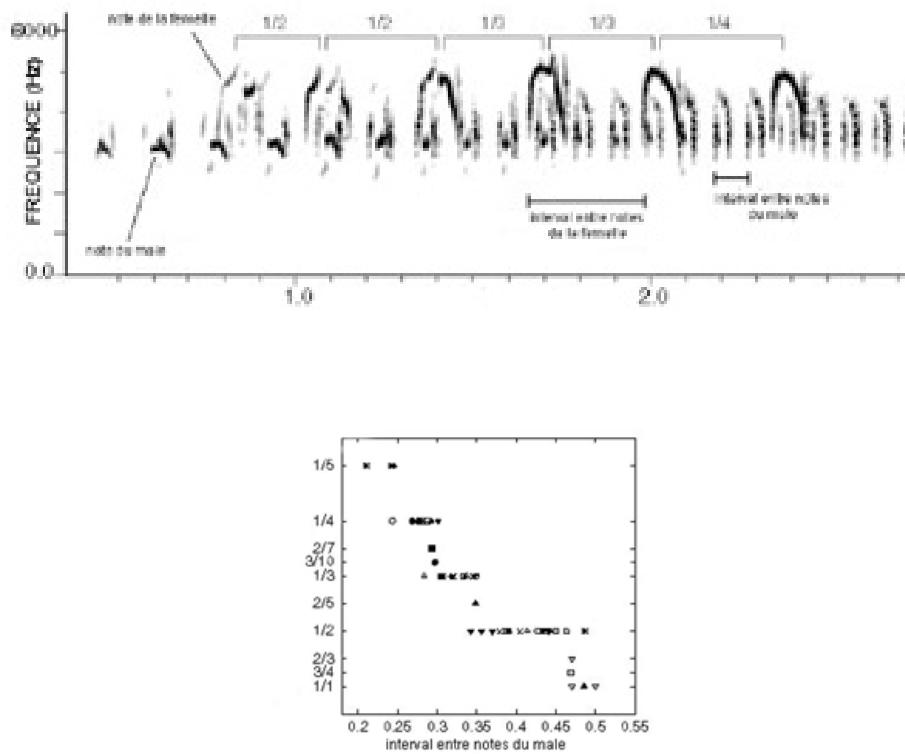


FIG. 3 – Sonagramme d'un duo d'un couple de fourriers sud-américains (a) et organisation de l'accrochage des fréquences (escalier du diable) (b) - source [10] (avec l'accord des auteurs)

vocalisation peut émerger d'un système avec un nombre réduit de variables dynamiques gérées par des instructions neuronales simples. Le fait que le contrôle neuronal de l'appareil phonatoire humain soit plus complexe n'empêche qu'un nombre limité de paramètres de contrôle s'avèrent capables de produire une variété d'effets acoustiques assez large [13]. D'autre part, une étude récente de l'activation musculaire des paramètres de contrôle [14] ouvre des perspectives intéressantes dans la modélisation du contrôle neuronal de la phonation.

Outre la modélisation biomécanique, la dynamique non linéaire a contribué à l'étude de la production vocale par les méthodes d'analyse de séries temporelles. Le calcul de sections de Poincaré et d'exposants de Lyapunov est appliqué aux cris de nouveaux nés [5] et aux désordres vocaux [15] depuis 1990. Une analyse des bifurcations à l'aide de spectrogrammes apparaît en [16]. Plus récemment, une technique topologique pour caractériser la structure des orbites associées à une série temporelle de parole est étudiée en [17]. Des applications de ce genre d'approche à l'identification de locuteurs sont proposées en [18]. La dimension fractale dans la parole est également l'objet des travaux récents qui visent aux applications concernant la reconnaissance de la parole [19].

### 3 Conclusion

La production de son chez les mammifères et les oiseaux est un exemple de système de plusieurs oscillateurs couplés, capables de subir des bifurcations vers des régimes complexes par variation graduelle des paramètres de contrôle (pression sousglottique, tension des cordes, masse effective en vibration, etc.). Les manifestations du non linéaire dans la production vocale sont donc nombreuses et peuvent être illustrées par les phénomènes de biphonation et multiphonie, les régimes chaotiques ou l'accrochage de fréquences (dans le chant des couples d'oiseaux). Les exemples sélectionnés dans cet article montrent que l'apparition de régimes complexes est favorisée par l'existence ou l'induction d'asymétries entre les cordes (voix pathologiques, musique vocale contemporaine), le manque de contrôle neuronal de l'organe vocal (cris des nouveaux nés) ou l'intervention de structures oscillantes supplémentaires (plus fréquente chez les animaux). De ce fait, les outils d'analyse des systèmes dynamiques non linéaires ont acquis pendant les dernières années un rôle prépondérant dans la recherche sur la production vocale en modélisation biomécanique et analyse de signal, dont on n'a répertorié que quelques travaux. Des perspectives intéressantes s'ouvrent en particulier pour la modélisation du contrôle neuronal de la production vocale, la caractérisation du répertoire acoustique animal et les applications à l'identification de locuteurs, la reconnaissance de la parole et l'étude des pathologies de la voix.

### Références

- [1] Fitch W T, Reby D. *The descended larynx is not uniquely human* Proc. R. Soc. Lond. B **268**, 1669-1675 (2001)
- [2] Mergell P, Fitch T W, Herzel H *Modeling the role of nonhuman vocal membranes in phonation* J. Acoust. Soc. Am. **105**, (3) 2020-2028 (1999)
- [3] Sciamarella D, d'Alessandro C, *Reproducing laryngeal mechanisms with a two-mass model*, Proc. of the 8th European Conference on Speech Communication and Technology, Eurospeech **2003**, 2385-2388 (2003)

- [4] Sirvi P, Michelsson K *Sound-Spectrographic Cry Analysis of Normal and Abnormal Newborn Infants*, Folia Phoniat. **28** 161-173 (1975)
- [5] Mende W, Herzel H, Wermke K, *Bifurcations and Chaos in Newborn Infant Cries*, Phys. Lett. **A 145**, 418-424 (1990).
- [6] Mergell P, Herzel H, Wittenberg T, Tigges M, Eysholdt U *Phonation onset: Vocal fold modeling and high-speed glottography* J. Acoust. Soc. Am. **104** (1) 464-470 (1998); Lucero J C *A subcritical Hopf bifurcation at phonation onset*, Journal of Sound and Vibration **218**, 344-349 (1998)
- [7] Edgerton M, Neubauer J, Herzel H, *Nonlinear phenomena in contemporary vocal music, composition and performance* à paraître dans Journal of voice (2004)
- [8] Tecumseh Fitch W, Neubauer J, Herzel H, *Calls out of Chaos: The Adaptive Significance of Nonlinear Phenomena in Mammalian Vocal Production*, Anim. Behav. **63**, 407-418 (2002)
- [9] Riede T *et al*, *Nonlinear phenomena in the natural howling of a dog-wolf mix* J. Acoust. Soc. Am. **108**, (4) 1435-1442 (2000), Tokuda I *et al*, *Nonlinear analysis of irregular animal vocalizations* J. Acoust. Soc. Am. **111**, (6) 2908-2919 (2002)
- [10] Laje R, Mindlin G B, *Highly Structured Duets in the Song of the South American Hornero* Phys. Rev. Lett. **91**, 258104/1-4, (2003)
- [11] Laje R, Mindlin G B, *Diversity within a birdsong* Phys. Rev. Letts. **89** (28), pp 28/8102-8102 (2002);
- [12] Gardner T, Cecchi G, Magnasco M, Laje R, Mindlin G B, *Simple Motor Gestures for Birdsongs*, Phys. Rev. Lett. **87**, 208101/1-4, (2001)
- [13] Sciamarella D, d'Alessandro C *On the acoustic sensitivity of a symmetrical two-mass model of the vocal folds to the variation of control parameters*, in press, Acta Acustica (2003).
- [14] Titze I R, Story B H *Rules for controlling low-dimensional vocal fold models with muscle activities*, J. Acoust. Soc. Am., **112** (3), 1064-1076 (2002)
- [15] Herzel H, Wendler J, *Evidence of chaos in phonatory samples* in EUROSPEECH (ESCA, Genova, 1991) pp. 263-266 (1991); Titze I. R. *et al* *Evidence of chaos in vocal fold vibration* in Vocal Fold Physiology: Frontiers in Basic Science, edited by I. R. Titze (Singular Publishing Group, San Diego, 1993), pp 143-188 (1993); Herzel H *Bifurcations and chaos in voice signals*, Appl. Mech. Rev. **46**, 399-413 (1993); Herzel H, Berry D A, Titze I R, Saleh M *Analysis of vocal disorders with methods from nonlinear dynamics*, J. Speech Hearing Res. **37**, 1008-1019 (1994)
- [16] Herzel H, Berry D A, Titze I R, Steinecke I, *Nonlinear dynamics of the voice: Signal analysis and biomechanical modeling* Chaos **5** (1) (1995)
- [17] Sciamarella D, Mindlin G B, *Topological Structure of Chaotic Flows from Human Speech Data*, Phys. Rev. Lett. **82**, 1450-1453, (1999).
- [18] Trevisan M A, Eguia M C, Mindlin G B, *Topological voice prints for speaker identification* (personal communication) (2003)
- [19] Maragos P, Potamianos A, *Fractal Dimensions of Speech Sounds: Computation and Application to Automatic Speech Recognition*, J. Acoust. Soc. Am. **105**, (3) 1925-1932 (1999)

## Évaporation d'un film mince : Instabilités de Marangoni induites par l'évaporation limitée par la diffusion

E. Sultan, A. Boudaoud et M. Ben Amar

*Laboratoire de Physique Statistique  
Ecole Normale Supérieure  
24, rue Lhomond, 75231 Paris Cedex 05  
eric.sultan@lps.ens.fr*

### Résumé

Lors de l'évaporation d'une gouttelette de liquide, le mouvement de reculée de la ligne de contact peut être accompagné d'une instabilité localisée en bord de goutte. Dans un premier temps, nous nous intéressons à un film mince d'extension spatiale infinie. Si l'on se place dans le cas limite où l'évaporation est limitée par la diffusion, dans quelles conditions un film d'épaisseur uniforme reste-t-il stable?

L'évolution du film est décrite par une équation de lubrification pour laquelle on tient compte de la possibilité d'un gradient de tension de surface (lui-même induit par un gradient de température). Nous calculons le taux d'évaporation à l'interface qui couple le film à la diffusion dans la phase vapeur. Nous analysons la stabilité linéaire de ce système. Enfin, l'étude faiblement non-linéaire nous conduit à une équation d'amplitude inhabituelle contenant des termes non-locaux qui ont une influence spectaculaire sur les instabilités secondaires.

## 1 Introduction

Du fait de leur importance pratique considérable, les films liquides minces ont motivé de nombreux travaux aussi bien expérimentaux que théoriques (voir [1] pour une revue récente). En particulier, l'évaporation des films intervient dans les processus de séchage et les instabilités associées sont encore mal comprises. Récemment (Poulard et al., [2]), des expériences d'évaporation de gouttes sur substrat solide ont mis en évidence pour certains fluides (eau, heptane, hexane) des ondulations de la ligne de contact lors du mouvement de reculée, alors que les gouttes d'autres fluides (octane, nonane) demeurent axisymétriques.

Burelbach et al. [3] ont étudié la stabilité de films minces en évaporation dans le cas où celle-ci est limitée par le taux de transfert des molécules au travers de l'interface. Cependant, Deegan et al. [4] ont montré que l'évaporation de gouttelettes d'eau piégées est limitée par la diffusion de la vapeur d'eau dans l'air.

Nous étudions ici l'évaporation limitée par la diffusion d'un film liquide. Nous montrons qu'il peut devenir instable par effet Marangoni (ici dépendance en température de la tension de surface). Après avoir déterminé le seuil de stabilité, nous obtenons l'équation d'amplitude qui régit l'épaisseur.

## 2 Le modèle

On s'intéresse à la dynamique d'un film de liquide placé au-dessus d'un substrat solide et qui peut échanger de la matière avec sa vapeur (figure 1). On se place dans une géométrie

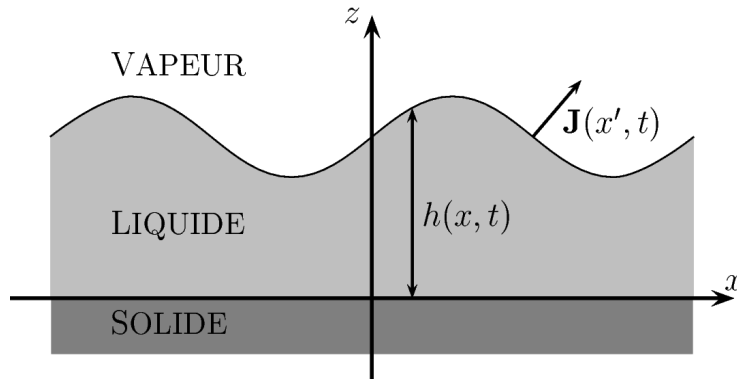


FIG. 1 – Géométrie du système physique.

simple pour laquelle on a invariance par translation dans une direction parallèle au substrat (l'axe  $x$  est choisi perpendiculaire à cette direction); l'état du système est décrit par l'épaisseur locale  $h(x, t)$  du film et la densité moléculaire en vapeur  $\rho(x, z, t)$  dans la phase gazeuse (ces deux champs sont des fonctions du temps et de l'espace). On considère dans la suite la limite des grandes longueurs d'onde, pour laquelle l'épaisseur caractéristique du film  $H$  est très petite devant l'échelle horizontale pertinente (macroscopique ici). Après avoir introduit l'équation d'évolution pour le film puis pour le gaz, on ferme le système par l'établissement des conditions aux limites appropriées.

## 2.1 Le film mince; Lubrification

À la limite des grandes longueurs d'onde, les équations de Navier-Stokes se réduisent à une équation de lubrification. Si l'on néglige la gravité, celle-ci s'écrit

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{h^3}{3\mu} \frac{\partial}{\partial x} \left( \gamma \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right) + \frac{h^2}{2\mu} \frac{\partial \gamma}{\partial x} \right\} = -\frac{J}{\rho_{\text{liq}}} \quad (1)$$

où  $\mu$  est la viscosité du fluide et  $\gamma$  est la tension de surface. Le membre de droite correspond à la perte de volume due à l'évaporation. Plus précisément,  $J$  désigne le nombre de molécules qui s'échappent du liquide vers la phase vapeur par unité de temps et de surface et  $\rho_{\text{liq}}$  est la densité moléculaire du liquide.

## 2.2 La phase vapeur; Courant d'évaporation

La phase gazeuse, par exemple de l'air, est au repos et l'on a seulement diffusion de la vapeur (voir [5] pour la comparaison avec l'évaporation limitée par la taux de transfert des molécules à travers l'interface). En régime quasi-statique, pour lequel la diffusion atteint rapidement un état stationnaire [4], la concentration en vapeur  $\rho(x, z, t)$  satisfait l'équation de Laplace :

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2} = 0.$$

La phase gazeuse n'étant pas saturée en vapeur, on impose un courant  $\mathbf{J} = -D\nabla\rho$  constant à l'infini  $\partial\rho/\partial z(z \rightarrow \infty) \sim -J_0/D$  où  $J_0$  est la valeur du taux d'évaporation mesurée expérimentalement [2].

La condition à l'interface  $z = h(x)$  correspond à la situation le liquide est en équilibre avec la vapeur juste au-dessus du film, d'où  $\rho(x, h(x)^+) = \rho^{\text{sat}}$ , où  $\rho^{\text{sat}}$  est la densité moléculaire évaluée le long de la ligne de saturation.

### 2.3 Le gradient de tension de surface

De manière usuelle [1, 3], la dépendance en température de la tension de surface est traitée linéairement

$$\gamma(T) = \gamma_0 - \left| \frac{d\gamma}{dT} \right| (T - T_{\text{subs}}). \quad (2)$$

où  $\gamma_0 = \gamma(T_{\text{subs}})$ ,  $T_{\text{subs}}$  étant la température du substrat supposée constante. La valeur absolue sur  $\frac{d\gamma}{dT}$  est introduite par commodité (la tension de surface décroît avec la température pour la plupart des liquides). À l'approximation des grandes longueurs d'onde, l'équation de convection-diffusion thermique se réduit simplement à  $\partial^2 T / \partial z^2 = 0$ . De plus, à la limite où la densité, la viscosité et la conductivité thermique  $\kappa$  du liquide sont beaucoup plus grandes que celles du gaz, le bilan d'énergie à l'interface donne  $-\kappa \partial_z T = J \mathcal{L}_{\text{vap}}$  ( $\mathcal{L}_{\text{vap}}$  est la chaleur latente de vaporisation moléculaire du liquide) ce qui signifie que toute la chaleur conduite à l'interface est transformée en chaleur latente d'évaporation [1]. Ceci étant, (2) se réécrit

$$\gamma = \gamma_0 + \left| \frac{d\gamma}{dT} \right| \frac{\mathcal{L}_v}{\kappa} h J. \quad (3)$$

### 2.4 Équations adimensionnées. Paramètres de contrôle

En éliminant la tension de surface à l'aide de (3) et en introduisant les échelles caractéristiques du système ( $H$  pour la longueur,  $J_0 / \rho_{\text{liq}}$  pour la vitesse,  $J_0$  pour le taux d'évaporation) l'équation de lubrification (1) devient :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \mathbf{Ca}^{-1} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{h^3}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left( (1 + \mathbf{Ma} h J) \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right) + \mathbf{Ma} \frac{h^2}{2} \frac{\partial(hJ)}{\partial x} \right\} = -J \quad (4)$$

toutes les quantités, variables et champs, étant sans dimension. Cette équation est pilotée par les deux paramètres de contrôle  $\mathbf{Ca} = \frac{\mu J_0}{\rho_{\text{liq}} \gamma_0}$  et  $\mathbf{Ma} = H J_0 \frac{\mathcal{L}_v}{\kappa} \frac{1}{\gamma_0} \left| \frac{d\gamma}{dT} \right|$ , respectivement le nombre *capillaire* et le nombre de *Marangoni*.

De la même façon, en construisant des échelles convenables pour la densité en vapeur, on obtient pour le problème de Laplace

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2} = 0 \quad \text{tel que} \quad \rho(x, h(x)) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \rho}{\partial z}(x, z = +\infty) = -1 \quad (5)$$

le taux d'évaporation étant donné,  $\mathbf{n}$  désignant la normale (extérieure) à l'interface, par la loi de Fick adimensionnée  $J = -(\mathbf{n} \cdot \nabla) \rho$ .

Le système à étudier est donc constitué d'une équation aux dérivées partielles fortement non-linéaire (4) couplée au problème de Laplace (5). La résolution de ce dernier (cf. formule (7) plus loin) réduit ce système à une seule équation intégral-différentielle qui constitue le point de départ pour l'analyse de stabilité linéaire puis non-linéaire qui suit.

## 3 Stabilité du film d'épaisseur uniforme en évaporation

Les équations (4,5) admettent comme solution  $h = 1 - t$  pour l'épaisseur du film et  $\rho = -z + 1 - t$  pour la concentration en vapeur. Cet état de base étant non-stationnaire,

il ne se prête pas tel quel à une analyse de stabilité linéaire habituelle (modale). Dans la suite, nous prendrons donc pour état de base le couple  $h = 1$  et  $\rho = 1 - z$  ce qui revient à imaginer que le liquide perdu par évaporation est exactement compensé par un procédé extérieur (réservoir de liquide) ou encore à supposer que l'évaporation est suffisamment lente.

### 3.1 Analyse de stabilité linéaire

On étudie la stabilité de petites perturbations de l'interface plane qui se mettent sous la forme :

$$\begin{aligned} h(x, t) &= 1 + (\eta e^{\Omega t} e^{ikx} + \text{c.c.}), \\ \rho(x, z, t) &= 1 - z + (\eta e^{\Omega t} e^{ikx - |k|z} + \text{c.c.}) \end{aligned}$$

où  $\Omega$  désigne le taux de croissance du mode  $k$  considéré et c.c le complexe conjugué du terme qui précède. En injectant ces expressions dans (4,5), l'ordre linéaire en  $\eta$  donne la relation de dispersion

$$\Omega(k) = -\frac{1}{3\mathbf{Ca}}k^4 + \frac{\mathbf{Ma}}{2\mathbf{Ca}}(1 + |k|)k^2 - |k| \quad (6)$$

ce qui indique clairement que l'effet Marangoni (terme en  $\mathbf{Ma}$ ) est le moteur de l'instabilité. Nous nous intéressons maintenant à la nature de la bifurcation au voisinage d'un point critique  $\mathbf{Ca}_c, \mathbf{Ma}_c$  (correspondant au premier mode instable) et à la structure spatiale des motifs de l'instabilité. À la limite des grandes longueurs d'onde  $k_c \rightarrow 0$ , les paramètres au seuil sont donnés par  $\mathbf{Ma}_c = 18^{1/3}\mathbf{Ca}^{2/3}$  et  $k_c = \sqrt{\mathbf{Ma}_c/2}$ .

### 3.2 Analyse faiblement non-linéaire

La finalité de ce paragraphe est l'obtention d'une équation d'amplitude pour l'épaisseur du film  $h(x, t)$ . Pour cela, il convient de tenir compte non-seulement des non-linéarités provenant de l'équation de lubrification (1) mais aussi des non-localités (tout autant non-linéaires !) provenant de la diffusion avec frontière libre. Nous donnons ici la formule permettant d'obtenir le taux d'évaporation jusqu'à l'ordre 3 en  $h$  :

$$\begin{aligned} J[h] &= 1 - \frac{d}{dx}\mathcal{H}[h] + \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{dh}{dx} \right)^2 + \frac{d^2h}{dx^2}h + \frac{d}{dx}\mathcal{H} \left( h \frac{d}{dx}\mathcal{H}[h] \right) \right\} \\ &+ \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{dh}{dx} \right)^2 \mathcal{H} \left[ \frac{dh}{dx} \right] - \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} \left( h^2 \frac{d}{dx}\mathcal{H}[h] \right) - 2h \frac{dh}{dx} \mathcal{H} \left[ \frac{d^2h}{dx^2} \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{d}{dx}\mathcal{H} \left( h \frac{d}{dx}\mathcal{H} \left( h \frac{d}{dx}\mathcal{H}[h] \right) \right) - \frac{1}{2} \frac{d}{dx}\mathcal{H} \left[ h^2 \frac{d^2h}{dx^2} \right] \right\} \\ &+ \mathcal{O}(h^4). \end{aligned} \quad (7)$$

où  $\mathcal{H}$  est une transformation intégrale aussi appelée transformée de Hilbert :

$$\mathcal{H}[f](x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0^+ \\ X \rightarrow +\infty}} \int_{\varepsilon < |x-x'| < X} dx' \frac{f(x')}{x' - x}.$$

Nous effectuons alors un développement multi-échelles; la solution de l'équation de lubrification est alors cherchée sous la forme  $h = A(X, T) e^{ik_c x} + \text{c.c}$  où  $X$  et  $T$  sont des



variables lentes reliées aux variables rapides  $x$  et  $t$  à l'aide d'un petit paramètre  $X \sim \epsilon x$  et  $T \sim \epsilon^2 t$ . Le choix de ces mises à l'échelle se justifie du fait que l'on se place au voisinage du point critique (voir [6]).

En écrivant un développement en puissances de  $\epsilon$  pour  $h$ , la machinerie habituelle<sup>1</sup> du développement multi-échelles nous conduit, après passage à la limite des grandes longueurs d'ondes et les mises à l'échelle adéquates, à l'équation d'amplitude

$$\begin{aligned} \partial_T A = & \sigma A + \frac{3}{2} \partial_X^2 A - 2i \partial_X^3 A - \frac{1}{2} \partial_X^4 A - \frac{213}{16} |A|^2 A \\ & - 6i \mathcal{H}(|A|^2) A + 3i A \int \mathcal{H}(A \partial_X \bar{A}) dX \end{aligned} \quad (8)$$

le paramètre de contrôle étant la combinaison  $\sigma = 2 \frac{\text{Ca} - \text{Ca}_c}{\text{Ca}_c} + \frac{3}{2} \frac{\text{Ma} - \text{Ma}_c}{\text{Ma}_c}$ . Elle montre que la bifurcation est supercritique; la présence de termes non-locaux la rend toutefois très inhabituelle.

## 4 Conclusion

Pour décrire l'évaporation d'un film mince, nous avons considéré à la fois la dynamique de la phase liquide et celle de la phase gazeuse. Ainsi, les équations que nous établissons pour modéliser ce système couplent d'une part la diffusion de la vapeur et la lubrification du substrat par le fluide d'autre part. La comparaison avec les expériences [2] est satisfaisante : nous trouvons que les alcanes lourds (ici l'octane et le nonane) sont stables vis-à-vis de l'effet Marangoni. De plus, en réalisant l'analyse faiblement non-linéaire, nous avons montré que l'aspect non-local de la dynamique se traduit directement sur l'équation d'amplitude (8) au contraire de [7]. Ce résultat est en fait lié à la non-analyticité de la relation de dispersion (6) en  $k = 0$ . Enfin, nous examinons actuellement les effets des termes non-locaux sur les instabilités secondaires. À ce stade, nous observons que l'instabilité d'Eckhaus est complètement modifiée. Des effets similaires semblent se manifester pour des films d'épaisseur microscopique de liquides polaires [8].

---

1. à ceci près que le calcul perturbatif doit ici être poussé à l'ordre 6 en  $\epsilon$  au lieu de l'ordre 3 des cas standards.

## Références

- [1] Oron, A., Davis, S.H., and Bankoff, S.G. *Long-scale evolution of thin liquid films*. Rev. Mod. Phys. **69**, 3 (1997), 931–980.
- [2] Poulard, C., Benichou, O., and Cazabat, A.M. *Freely receding evaporating droplets*. Langmuir **19**, 21 (2003), 8828–8834.
- [3] Burelbach, J.P., Bankoff, S.G., and Davis, S.H. *Nonlinear stability of evaporating/condensing liquid film*. J. Fluid Mech. **195** (1988), 463–494.
- [4] Deegan, R. D., Bakajin, O., Dupont, T. F., Huber, G., Nagel, S. R. & Witten, T. A. *Capillary flow as the cause of ring stains from dried liquid drops*. Nature **389** (1997), 827–829.
- [5] Sultan, E., Boudaoud, A., and Ben Amar, M. *Evaporation of a thin film: Marangoni instabilities induced by diffusion limited evaporation*. In preparation.
- [6] Manneville P. *Dissipative structures and weak turbulence.*, Academic Press (1990).
- [7] Friedrichs, R., and Engel, A. *Nonlinear analysis of the Rosensweig instability.*, Europhys. Lett. **63**, 6 (2003), 826–832.
- [8] Sultan, E., Boudaoud, A., and Ben Amar, M. *Diffusion limited evaporation of thin polar liquid films*. In preparation.

## Modélisation du comportement cinétique des FDS (functioning-dependent structures) dans les systèmes vivants

M. Thellier, V. Norris et C. Ripoll

Laboratoire AMMIS, CNRS (FRE 2829), Faculté des Sciences de l'Université de  
Rouen, F-76821 Mont-Saint-Aignan Cedex, France

Michel.Thellier@univ-rouen.fr

### Résumé

Il arrive que des protéines s'assemblent lorsqu'elles coopèrent à la transduction d'un signal ou à l'absorption/métabolisation d'un substrat. Nous appelons FDS (*functioning-dependent structures*) ces structures dynamiques, créées et maintenues par le fait qu'elles sont en train d'accomplir une fonction. La modélisation des comportements cinétiques montre que les FDS, même les plus simples, peuvent présenter des propriétés de régulation (e.g. cinétique sigmoïde) même lorsque les protéines isolées ne présentent aucune coopérativité. L'implication de FDS plus complexes et/ou de réseaux de FDS dans les systèmes vivants réels est discutée.

## 1 Introduction

Il arrive que les protéines qui coopèrent à une tâche cellulaire, telle qu'une voie métabolique ou la transduction d'un signal, ne soient pas distribuées aléatoirement mais s'associent en complexes qui ont reçu les noms de “*metabolons*”, “*transducons*” ou, plus généralement, “*hyperstructures*” [1, 2, 3, 4, 5]. Il arrive aussi que ces complexes ne soient pas permanents mais dynamiques [2, 5, 6, 7, 8, 9, 10], c'est-à-dire qu'ils ne se forment et ne se maintiennent que lorsqu'ils sont en train d'accomplir leur fonction : nous proposons alors de les appeler “*functioning-dependent structures*” (FDS). Il y a des avantages bien connus à ce que des protéines s'associent plutôt que de rester libres (e.g. meilleure résistance aux enzymes protéolytiques, canalisation des métabolites, réduction du nombre de molécules protéiques nécessaires à l'accomplissement d'une fonction cellulaire). Ici, nous présentons une version abrégée d'un travail [11] où nous modélisons le comportement cinétique des FDS en partant de la situation particulièrement simple d'un système enzymatique à deux partenaires seulement (également appelé *metabolite-induced metabolon* [9]), puis en envisageant des FDS de complexité croissante telles qu'il pourrait en exister dans les systèmes vivants réels.

## 2 Comportement cinétique de FDS à deux enzymes

Considérons un milieu réactionnel dans lequel deux enzymes, E et F, coopèrent à la transformation d'un substrat initial, S, en un produit final, Q, en passant par un métabolite intermédiaire, P, selon le schéma



La figure 1 décrit le cas trivial, où les enzymes agissent séparément, et ceux d'une FDS catalytique ou inhibitrice. Dans la suite, nous utiliserons les hypothèses simplificatrices

que i) le milieu de réaction est homogène, ii) dans la FDS le métabolite intermédiaire, P, est canalisé de E à F, iii) toutes les réactions de formation ou disparition de complexes autres que celles indiquées dans la figure 1 sont négligeables, iv) les enzymes E et F sont Michaéliennes, v) tous les coefficients stoechiométriques sont égaux à 1 et vi) dans les conditions stationnaires S est supposé maintenu à une concentration constante,  $[S_0]$ , et Q à une concentration nulle. Dans ces conditions, les constantes de vitesse “aller” s’expriment en  $\text{mol}^{-1}.\text{s}^{-1}.\text{m}^3$  et les constantes “retour” en  $\text{s}^{-1}$ .

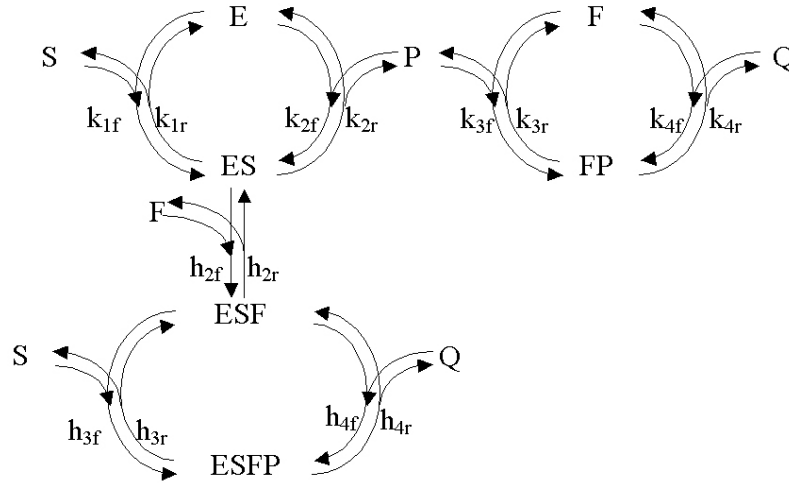


FIG. 1 – Schéma général du système à deux enzymes, E et F, transformant un substrat initial S en un produit final Q avec un métabolite intermédiaire P. Les  $k_{jf}$  et  $h_{jf}$  sont les constantes de vitesse “aller” (forward) et les  $k_{jr}$  et  $h_{jr}$  les constantes de vitesse “retour” (reverse). Avec  $h_{2f} = h_{2r} = 0$ , on est dans le cas trivial où les deux enzymes agissent séparément. Avec  $k_{2f} = k_{2r} = 0$ , on est dans le cas d’une FDS catalytique (seule la FDS transforme S en Q). Avec  $h_{3f} = h_{3r} = h_{4f} = h_{4r} = 0$ , on est dans le cas d’une FDS inhibitrice (la FDS se forme, mais seules les enzymes non associées ont une activité catalytique).

On définit des grandeurs adimensionnelles en normalisant les concentrations à la somme des concentrations totales de E et de F,  $[E_t] + [F_t]$ , et les temps à  $1/k_{1r}$ . Les fractions molaires de E et F,  $x_E$  et  $x_F$ , ainsi que les expressions adimensionnelles des concentrations des diverses substances, du temps,  $\tau$ , et des constantes de vitesse retour,  $\alpha_{jr}$  et  $\beta_{jr}$ , et aller,  $\alpha_{jf}$  et  $\beta_{jf}$ , s’écrivent alors

$$\begin{aligned}
 x_E &= \frac{[E_t]}{[E_t] + [F_t]} & x_F &= \frac{[F_t]}{[E_t] + [F_t]} & \text{avec } x_E + x_F &= 1 \\
 s &= \frac{[S]}{[E_t] + [F_t]} & p &= \frac{[P]}{[E_t] + [F_t]} & q &= \frac{[Q]}{[E_t] + [F_t]} \\
 e &= \frac{[E]}{[E_t] + [F_t]} & f &= \frac{[F]}{[E_t] + [F_t]} \\
 e_s &= \frac{[ES]}{[E_t] + [F_t]} & f_p &= \frac{[FP]}{[E_t] + [F_t]}
 \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
ef_s &= \frac{[ESF]}{[E_t] + [F_t]} & ef_{sp} &= \frac{[ESFP]}{[E_t] + [F_t]} \\
\tau &= t \cdot k_{1r} \\
\alpha_{jr} &= \frac{k_{jr}}{k_{1r}} & \beta_{jr} &= \frac{h_{jr}}{k_{1r}} & \text{avec évidemment } \alpha_{1r} = \frac{k_{1r}}{k_{1r}} \equiv 1 \\
\alpha_{jf} &= \frac{k_{jf}}{k_{1r}}([E_t] + [F_t]) & \beta_{jf} &= \frac{h_{jf}}{k_{1r}}([E_t] + [F_t])
\end{aligned}$$

Dans le cas trivial, la conservation de la masse s'écrit

$$x_E = e + e_s, \quad x_F = f + f_p \quad (3)$$

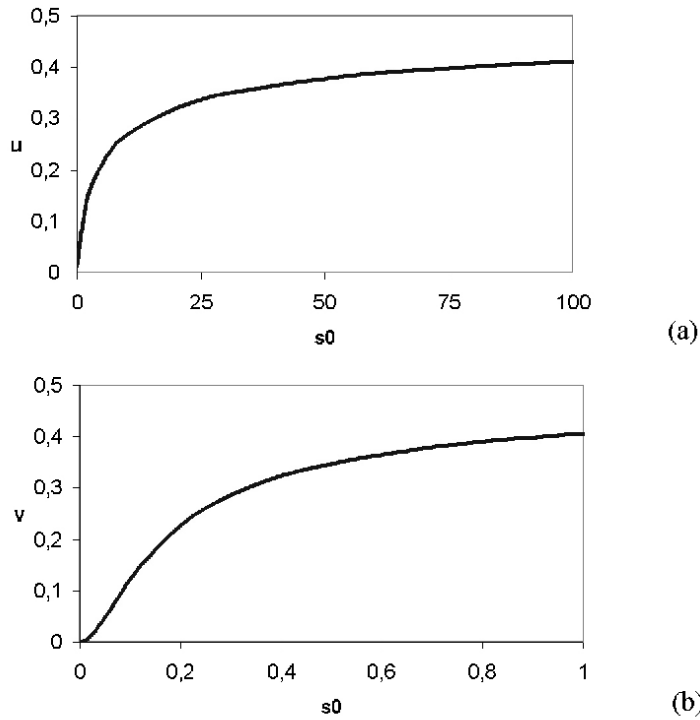


FIG. 2 – Vitesse stationnaire de transformation de  $S$  en  $Q$ , en fonction de la concentration de substrat,  $s_0$ . (a) Dans le cas trivial (enzymes non associées) la vitesse,  $u$ , a été calculée pour les valeurs de paramètres  $x_E = x_F = 0.5$ ,  $q = 0$ ,  $\alpha_{1f}$  à  $\alpha_{3f} = 1$ ,  $\alpha_{1r}$  à  $\alpha_{4r} = 1$ ,  $\alpha_{4f}$  indifférent (puisque  $q = 0$ ) ; la valeur du plateau de saturation est 0,5. (b) Dans le cas d'une FDS catalytique la vitesse,  $v$ , a été calculée pour les valeurs de paramètres  $x_E = x_F = 0.5$ ,  $q = 0$ ,  $\alpha_{1f} = \alpha_{1r} = 1$ ,  $\beta_{2f} = \beta_{2r} = 1$ ,  $\beta_{3f} = 100$ ,  $\beta_{3r} = 0.01$ ,  $\beta_{4f}$  indifférent ( $q = 0$ ),  $\beta_{4r} = 1$  ; la valeur du plateau de saturation est 0,5.

Les équations différentielles du système sont

$$\begin{cases} \frac{dp}{d\tau} = -\alpha_{2f} p e + \alpha_{2r} e_s - \alpha_{3f} p f + \alpha_{3r} f_p \\ \frac{de_s}{d\tau} = \alpha_{1f} s e - \alpha_{1r} e_s + \alpha_{2f} p e - \alpha_{2r} e_s \\ \frac{df_p}{d\tau} = \alpha_{3f} p f - \alpha_{3r} f_p + \alpha_{4f} q f - \alpha_{4r} f_p \end{cases} \quad (4)$$

et l'on prend ces équations égales à 0 pour écrire les conditions stationnaires. De plus, on a

$$s = s_0, \quad q = 0, \quad p(0) = 0, \quad e_s(0) = 0, \quad f_p(0) = 0 \quad (5)$$

La vitesse stationnaire de réaction dans le cas trivial,  $u$  (qui correspond aussi bien à la consommation de S qu'à la production de Q), s'écrit alors

$$u = \alpha_{1f} s_0 e - \alpha_{1r} e_s = \alpha_{4r} f_p \quad (6)$$

Dans le cas d'une FDS catalytique, les équations deviennent (toujours pour la situation stationnaire)

$$x_E = e + e_s + ef_s + ef_{sp}, \quad x_f = f + ef_s + ef_{sp} \quad (7)$$

$$\begin{cases} \frac{de}{d\tau} = -\alpha_{1f} s e + \alpha_{1r} e_s = 0 \\ \frac{de_s}{d\tau} = \alpha_{1f} s e - \alpha_{1r} e_s + \beta_{2r} ef_s - \beta_{2f} f e_s = 0 \\ \frac{def_{sp}}{d\tau} = \beta_{3f} s ef_s - \beta_{3r} ef_{sp} + \beta_{4f} q ef_s - \beta_{4r} ef_{sp} = 0 \end{cases} \quad (8)$$

avec  $s = s_0, q = 0, p(0) = 0, e_s(0) = 0, ef_s(0) = 0, ef_{sp}(0) = 0$  et la vitesse de réaction de la FDS catalytique,  $v$ , s'écrit

$$v = \alpha_{1f} e s - \alpha_{1r} e_s + \beta_{3f} ef_s s - \beta_{3r} ef_{sp} = \beta_{4r} ef_{sp} \quad (9)$$

Enfin, dans le cas d'une FDS inhibitrice, les équations deviennent :

$$x_E = e + e_s + ef_s, \quad x_f = f + f_p + ef_s \quad (10)$$

$$\begin{cases} \frac{de}{d\tau} = -\alpha_{1f} s e + (\alpha_{1r} + \alpha_{2r})e_s - \alpha_{2f} p e = 0 \\ \frac{def_s}{d\tau} = \beta_{2f} f e_s - \beta_{2r} ef_s = 0 \\ \frac{df_p}{d\tau} = \alpha_{3f} p f - (\alpha_{3r} + \alpha_{4r})f_p + \alpha_{4f} q f = 0 \\ \frac{dp}{d\tau} = -\alpha_{2f} p e + \alpha_{2r} e_s - \alpha_{3f} p f + \alpha_{3r} f_p = 0 \end{cases} \quad (11)$$

avec  $s = s_0, q = 0, p(0) = 0, e_s(0) = 0, ef_s(0) = 0, f_p(0) = 0$  et la vitesse de réaction de la FDS inhibitrice,  $w$ , s'écrit

$$w = \alpha_{1f} s_0 e - \alpha_{1r} e_s = \alpha_{4r} f_p \quad (12)$$

Tous calculs faits ("à la main" dans ces cas relativement simples ou bien en utilisant un logiciel de calcul tel que MAPLE), on trouve que, dans le cas trivial (enzymes indépendantes) quel que soit le choix des valeurs des paramètres (les constantes de vitesses), les courbes  $\{s_0, u\}$  ont toujours aspect quasi hyperbolique banal, c'est-à-dire qu'elles croissent de façon monotone jusqu'à atteindre un palier de saturation (Fig. 2a). En revanche, lorsque les enzymes s'associent en FDS, s'il existe des choix de valeurs de paramètres pour lesquels les courbes  $\{s_0, v\}$  ou  $\{s_0, w\}$  présentent encore un comportement quasi hyperbolique banal (non montré), il en existe aussi pour lesquels on observe des comportements plus intéressants, tels qu'une cinétique sigmoïde (Fig. 2b) ou présentant des zones quasi linéaires sur de vastes domaines d'abscisses (non montré).

### 3 Discussion et conclusion

Il apparaît ainsi que des enzymes Michaéliennes peuvent présenter un comportement cinétique plus riche (par exemple sigmoïde, ou linéaire sur une vaste plage de concentrations) que la classique réponse hyperbolique, à la condition qu’elles puissent se structurer en FDS. Il n’est pas sans intérêt de remarquer que de telles possibilités de réponses sont assez comparables à celles rencontrées dans le fonctionnement des réseaux électriques (fonction échelon, réponses linéaires).

Bien évidemment, les FDS des systèmes vivants réels peuvent être beaucoup plus compliquées que les modèles simplifiés étudiés ici. C’est ainsi que les FDS catalytique et inhibitrice ne sont que des cas limites de FDS “mixte” (décrite par la figure 1 mais en prenant toutes les constantes de vitesse différentes de zéro). Il peut exister des FDS bi-, tri-, ..., multi-protéiques, et impliquant éventuellement des protéines autres que des enzymes et/ou des molécules non protéiques ainsi que des embranchements et des confluences. C’est une hypothèse non déraisonnable d’imaginer que, dans les cellules vivantes, les FDS puissent s’organiser en un réseau dynamique complexe, en perpétuel réarrangement selon les sollicitations (signaux, changement de la nature ou de la concentration de substrats métabolisables) recues du milieu extérieur ; et l’on peut raisonnablement s’attendre à ce que les possibilités de régulation de telles FDS complexes soient encore plus variées et mieux tranchées que celles que nous avons observées ici dans les cas les plus simples.

Une telle vision dynamique des FDS, complétant d’autres aspects dynamiques des milieux cellulaires (e.g. mouvements cytoplasmiques, polymérisation/dépolymérisation des filaments du cytosquelette), est en tout cas pleinement cohérente avec le fait bien connu que la qualité de “vivant” est inséparable de la nature dynamique du système considéré, c’est-à-dire qu’il est impossible d’isoler ce système vivant, avec l’objectif de le laisser se relaxer jusqu’à son équilibre thermodynamique interne, sans le transformer rapidement en un système irrémédiablement mort. Cette façon de voir a trois conséquences au moins : i) la notion même de FDS entraîne que la classique implication “*structure*  $\rightarrow$  *fonction*” des biochimistes doit être complétée par une implication “*fonction*  $\rightarrow$  *structure*”, ii) les continus réarrangements (formation et/ou rupture de liaisons protéine-protéine) liés au caractère dynamique des FDS ont un coût évident en terme de production d’entropie et iii) les termes supplémentaires qui s’introduisent ainsi dans la classique décomposition de la production d’entropie d’un système peuvent être considérés caractéristiques de ce que ce système est vivant.

Cette façon de voir n’est pas non plus sans conséquences sur la formalisation du problème. En effet, le système d’équations caractéristique de la (ou des) FDS considérée(s) devient à l’évidence d’autant plus lourd que le nombre de partenaires impliqués (protéiques et/ou autres) augmente. Par ailleurs, compte tenu des réarrangements de FDS induits par les changements qui se produisent dans le milieu extérieur, il n’est pas évident que ces FDS atteindront jamais une situation stationnaire de fonctionnement ; à tout le moins, on peut s’attendre à l’existence de périodes transitoires non négligeables. De ce fait, ce ne sont pas seulement des systèmes d’équations stationnaires (généralisant nos équations (8) ou (11)) qu’il conviendra de considérer ; il faudra également résoudre des systèmes d’équations différentielles non linéaires (généralisant nos équations (4)) pour atteindre l’évolution temporelle du comportement des FDS. Enfin, si les FDS des systèmes vivants réels s’arrangent véritablement en réseau, on pourra identifier dans ce réseau des boucles de rétroaction positives ou négatives (au sens de Thomas et Kaufman [12]) ; il conviendra donc d’étudier la stabilité du fonctionnement d’un tel réseau, et de rechercher s’il admet

toujours des situations stationnaires de fonctionnement uniques, ou si l'on peut prévoir de rencontrer des bi- ou pluri-stationnarités ou même des comportements oscillants ou chaotiques.

On peut s'attendre à ce que les difficultés de modélisation de systèmes aussi complexes deviennent rapidement considérables et nécessitent des approches informatiques et mathématiques adaptées. Du moins, l'analyse des systèmes simplifiés que nous avons conduite ici a montré que le concept de FDS était riche de propriétés fonctionnelles intéressantes, et que cela vaut donc la peine de se lancer dans l'étude de cas plus réalistes malgré les problèmes méthodologiques que cela pourra poser.

## Références

- [1] P.A. Srere, *Complexes of sequential metabolic enzymes*, Annu. Rev. Biochem., **56**, 21-56 (1987).
- [2] C.K. Mathews, *The cell: bag of enzymes or network of channels?*, J. Bacteriol., **175**, 6377-6381 (1993).
- [3] C. Velot, M.B. Mixon, M. Teige & P.A. Srere, *Model of a quinary structure between Krebs TCA cycle enzymes: a model for the metabolon*, Biochemistry, **36**, 14271-14276 (1997).
- [4] A.J. Trewavas & R. Malh , *Signal perception and transduction: the origin of the phenotype*, Plant Cell, **9**, 1181-1195 (1997).
- [5] L. Le Sceller, C. Ripoll, M. Demarty, A. Cabin-Flaman, A. Nystrom, M.H. Saier Jr & V. Norris, *Modelling bacterial hyperstructures with cellular automata*, Interj. Complex Syst., paper **366** (2000), <http://www.interjournal.org>.
- [6] J. Ov di, *Old pathway-new concept: control of glycolysis by metabolite-modulated dynamic enzyme associations*, TIBS, **13**, 486-490 (1988).
- [7] J. Ov di, *Physiological significance of metabolite channelling*, J. Theor. Biol., **152**, 1-22 (1991).
- [8] J.D. Jordan, E.M. Landau & R. Iyengar, *Signaling networks: the origin of cellular multitasking*, Cell, **103**, 193-200 (2000).
- [9] V. Norris, P. Gascuel, J. Guespin-Michel, C. Ripoll & M.H. Saier Jr, *Metabolite-induced metabolons: the activation of transporter-enzyme complexes by substrate binding*, Mol. Microbiol., **31**, 1589-1601 (1999).
- [10] M. Thellier, *From a static to a dynamic description of living systems: the framework*, Nova Acta Leopoldina, NF **88** (Nr 332), 11-15 (2003).
- [11] M. Thellier, V. Norris, C. Baron & C. Ripoll, *Introduction to the concept of functioning-dependent structures in living cells*, C.R. Biologies, (sous presse).
- [12] R. Thomas & M. Kaufman, *Multistationarity, the basis of cell differentiation and memory: II Logical analysis of regulatory networks in terms of feedback circuits*, Chaos, **11**, 180-195 (2001).



## Rapport d'aspect et propriétés énergétiques de l'écoulement turbulent entre deux disques contrarotatifs

J. H. C. Titon<sup>1</sup> et O. Cadot<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Laboratoire de Mécanique, Physique et Géosciences, Université du Havre, 25 rue Philippe Lebon, B.P.540, 76058 Le Havre Cedex*

<sup>2</sup>*Laboratoire de Physique et Mécanique des Milieux Hétérogènes, Ecole Supérieure de Physique et Chimie Industrielle, 10 rue Vauquelin, 75 231 Paris Cedex 05*  
titon@univ-lehavre.fr

### Résumé

Nous étudions les propriétés énergétiques d'un écoulement turbulent produit entre deux disques contrarotatifs. Le dispositif, aussi connu comme l'écoulement turbulent de Von Kármán, est étudié lorsque le rapport d'aspect (AR) de la cellule expérimentale est modifiée. Le paramètre AR est défini comme le rapport  $\varnothing/H$ , où  $\varnothing$  représente le diamètre des disques de forçage et  $H$  la distance qui les sépare. Une lecture comparative et synthétique de récents travaux de la littérature dédiés à l'étude des fluctuations des grandeurs énergétiques dans des écoulements turbulents de géométrie similaire permet de souligner des comportements analogues. Cependant, des différences notoires sont également mises en évidence. Le rapport d'aspect de la cellule expérimentale a ainsi été identifié comme un des paramètres majeurs dont dépendent les propriétés de l'écoulement. Dans la présente étude, nous nous intéressons aux moments statistiques de la puissance globale injectée dans l'écoulement, notamment à travers le calcul du taux de fluctuations et du coefficient d'asymétrie pour trois valeurs du rapport d'aspect :  $\frac{1}{2}$ , 1 et 2,5, et pour deux modes de forçage de l'écoulement : forçage à vitesse angulaire constante et forçage à couple constant. On observe une nette réduction du taux de fluctuation pour la plus grande valeur du rapport d'aspect (soit 2,5) alors que le coefficient d'asymétrie atteint une valeur maximale lorsque le rapport d'aspect vaut 1. D'autre part, l'analyse spectrale des fluctuations de traînée turbulente ainsi que leurs corrélations à partir des séries temporelles acquises au niveau de chacun des deux dispositifs de forçage nous permettent d'avancer certaines hypothèses concernant le couplage hydrodynamique des deux disques et l'existence dans l'écoulement d'échelles intégrales cohérentes dans l'espace et dans le temps. Notre objectif à terme reste la caractérisation de la dynamique énergétique de l'écoulement.

## 1 Introduction

Des travaux récents [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10] - expérimentaux, numériques et théoriques - dans le domaine de la physique statistique, basés sur l'étude des fluctuations dans des systèmes dissipatifs, parmi lesquels des écoulements turbulents, ont conduit à l'hypothèse d'un critère universel pour la distribution d'énergie dans de tels systèmes. Ainsi dans le cas d'un écoulement turbulent cisailé, confiné et statistiquement stationnaire, et pour lequel le nombre de Reynolds est constant, les séries temporelles de la puissance globale injectée se caractérise par la présence de grandes fluctuations temporelles. La distribution des grandeurs énergétiques se distingue alors par un fort taux de fluctuations et par une forme non symétrique, ou plus précisément par un coefficient d'asymétrie négatif. Si les

différents auteurs s'accordent sur l'importance du taux de fluctuations, il n'en est pas de même pour la valeur du coefficient d'asymétrie qui reste une question ouverte.

Une synthèse des travaux précités nous conduit à identifier le rapport d'aspect comme un paramètre majeur de l'expérience. Nous étudions donc son influence sur les fluctuations de la puissance globale injectée dans l'écoulement. Ces dernières étant liées à des événements cohérents de plus petite échelle, nous orienterons la présente étude vers l'hypothèse que l'asymétrie bien particulière des grandeurs énergétiques peuvent être une conséquence du degré de cohérence, spatiale ou temporelle, de ces événements. Dans notre cas, les mesures instantanées de puissance injectée sont des grandeurs moyennées sur la surface totale des disques de forçage. Une précédente étude [7] a démontré que la présence de structures de basse pression conduit à des profils moyens de puissance non symétriques. A contrario, l'effet moyen d'une série d'événements totalement non cohérents conduit à une distribution Gaussienne de leur contributions énergétiques.

Cet article est structuré de la façon suivante : dans un premier temps nous présentons les caractéristiques du montage expérimental, ainsi que la mesure de la puissance globale injectée dans l'écoulement ; dans une deuxième partie, nous étudions les propriétés statistiques de la puissance injectée, à travers le taux de fluctuations et le coefficient d'asymétrie, en fonction du rapport d'aspect ; troisièmement, nous nous intéresserons aux échelles de l'écoulement, notamment à travers l'étude spectrale de la puissance injectée et à travers des arguments dimensionnels "à la Kolmogorov" ; finalement, nous mettrons en avant des arguments qui présentent les propriétés statistiques de la puissance globale injectée comme conséquents à l'intercorrélation des contributions énergétiques de chacun des deux disques.

## 2 Montage expérimental et mesure de puissance

Nous étudions l'écoulement turbulent de Von Karman produit entre deux batteurs contrarotatifs dans une cellule cylindrique verticale fermée. Les batteurs se composent de disques de Plexiglas de rayon  $R = \emptyset/2 = 8,75$  cm, munis de huit pales verticales régulièrement disposées. Le processus de forçage est de nature inertielle. L'entraînement des disques se fait au moyen de servomoteurs de 500 W DC, via une courroie de transmission. Le système de régulation de ces moteurs permet de les faire fonctionner à vitesse angulaire constante (mode  $\Omega_0$ ) ou à couple constant (mode  $\Gamma_0$ ). Cela permet également à l'expérimentateur d'avoir accès aux grandeurs fluctuantes, respectivement le couple de forçage (à travers l'image du courant dans le bobinage) et la vitesse angulaire (à travers les tachymètres), qui traduisent les fluctuations de traînée turbulente dans l'écoulement. Pour une description détaillée du système de forçage et de ses caractéristiques mécaniques, ainsi que celle du dispositif d'acquisition de données, les auteurs invitent les lecteurs à se référer à [7].

Nous rappelons l'expression de la puissance globale instantanée injectée dans l'écoulement par un des deux dispositifs de forçage : elle est obtenue en soustrayant les pertes mécaniques  $P^S$ , et les fluctuations inertielles de la puissance délivrée par les moteurs :

$$P_i(t) = \Omega_i(t) \cdot \Gamma_i(t) = P_i^M(t) - P_i^S - \frac{1}{2} \cdot I_i \cdot \frac{d^2 \Omega_i(t)}{dt^2} \quad (1)$$

L'objectif de ce travail est d'étudier de façon comparative les propriétés de  $P(t) = \sum_i P_i(t)$ , pour trois hauteurs de cylindre, autrement dit pour trois valeurs du rapport d'aspect  $AR = \emptyset/H$ , de l'expérience :  $\frac{1}{2}$ , 1 et 2,5. Les acquisitions de séries temporelles de puissance se font de manière systématique pour des fréquences de contrarotation :  $f_{rot} = 4, 5, 6, 7$

and 8 Hz. Les distributions statistiques et spectrales de la puissance injectée sont étudiées dans la suite.

### 3 Taux de fluctuations et asymétrie des distributions de puissance globale

L'évolution des fonctions de densité de probabilité (*FDP*) de la puissance globale injectée en fonction du rapport d'aspect est étudiée pour les deux modes de forçage. L'étude systématique conduit à dire que les formes sont quasiment auto similaires pour un couple de conditions expérimentales rapport d'aspect, mode de forçage, du moins pour  $AR = \frac{1}{2}$  et pour  $AR = 1$ . En effet, pour ces deux cas, l'analyse des moments statistiques d'ordre 1 et 2 (moyenne et écart type) de la puissance globale injectée, en fonction de  $f_{rot}$  révèle un *scaling* en  $(f_{rot})^3$  [7, 14]. Si l'on retrouve un tel comportement pour  $\langle P \rangle$  lorsque  $AR = 2,5$ , il n'en est pas de même pour  $\delta P_{rms}$ . On peut synthétiser ces informations sous la forme d'un taux de fluctuations que l'on définit comme :  $\alpha(P) = (\delta P_{rms} / \langle P \rangle) * 100(\%)$ . Un *scaling* similaire de la moyenne et de l'écart type conduit à une valeur globalement constante du taux de fluctuations comme le montre la figure 1(a) pour  $AR = \frac{1}{2}$  et  $AR = 1$ , contrairement au cas  $AR = 2,5$  pour lequel  $\alpha(P)$  chute pour les plus fortes valeurs de  $f_{rot}$ . On remarque également que l'on trouve pour  $AR = 1$  un résultat semblable à celui de Titon et Cadot (2003) [7] pour  $AR = \frac{1}{2}$ , soit un taux de fluctuations presque deux fois plus élevé dans le cas d'un forçage à vitesse angulaire constante. :

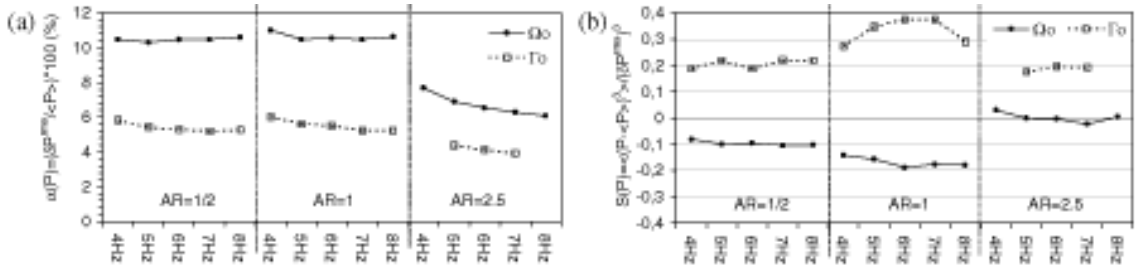


FIG. 1 – Evolution systématique avec  $AR$  (a) du taux de fluctuations, (b) du coefficient d'asymétrie

On s'intéresse à présent à l'asymétrie des distributions de la puissance globale injectée à travers le calcul du moment statistique d'ordre 3 adimensionné que l'on appelle également coefficient d'asymétrie ou *skewness*:  $S(P) = \langle (P - \langle P \rangle)^3 \rangle / (\delta P_{rms})^3$ .  $S(P)$  est nul pour une distribution symétrique, une Gaussienne par exemple, par rapport à laquelle on compare les autres distributions. Ces dernières se caractérisent alors par le signe et l'amplitude de  $S(P)$ . En se référant à la figure 1(b), on observe que  $S(P)$  est globalement positif pour le mode  $\Gamma_0$ . Cela peut se traduire par une plus grande proportion d'événements de forte puissance et simultanément une proportion inférieure d'événements de faible puissance. Si l'asymétrie est moins importante pour le mode  $\Omega_0$ , comme observé par Titon et Cadot (2003) [7] pour  $AR = \frac{1}{2}$ , on constate également qu'elle est de signe opposé. est alors négatif (en accord avec les résultats de la littérature), sauf pour  $AR = 2,5$  où les valeurs sont proches de zéro. On remarque encore que quel que soit le mode de forçage, l'asymétrie est maximale pour  $AR = 1$ .

## 4 Analyse spectrale et échelle intégrale

Les figures 2(a) et 2(b) représentent les formes typiques des distributions spectrales de la puissance globale injectée pour chacune des trois valeurs de AR, respectivement pour les modes  $\Omega_0$  et  $\Gamma_0$ . L'axe des fréquences est adimensionnée par la fréquence de rotation  $f_{rot}$  et on étudie la distribution de l'énergie des fluctuations sous l'influence du rapport d'aspect. Ainsi pour  $AR = \frac{1}{2}$ , l'énergie est distribuée sur majoritairement sur une bande de fréquence centrée autour de  $f/f_{rot}=0,3$  pour le mode  $\Omega_0$  et  $f/f_{rot}=0,6$  pour le mode  $\Gamma_0$ . Ce n'est plus le cas pour  $AR = 1$  où la répartition se fait plutôt sur une courbe décroissante pour  $f/f_{rot} < 1$ . L'énergie reste majoritairement distribuée à des fréquences faibles. Pour des valeurs de  $f/f_{rot}$  supérieures, la distribution reste cependant globalement la même. Lorsque l'écartement des disques est le plus faible ( $AR = 2,5$ ), les spectres sont marqués par un décalage vers la droite, soit vers les hautes fréquences, ou encore vers des échelles de taille(s) inférieure(s) à celles des cas précédents. Le maximum d'énergie se situe à  $f/f_{rot} = 1$ , qui est alors considéré comme l'échelle intégrale de fréquence.

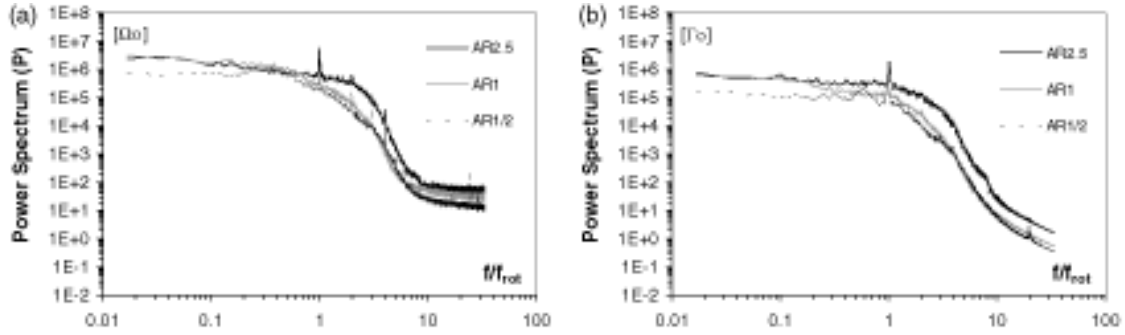


FIG. 2 – Distribution spectrale de l'énergie des fluctuations : (a) mode  $\Omega_0$ , (b) mode  $\Gamma_0$

L'interprétation des spectres nous amène à conclure à un changement de l'échelle intégrale  $L$  dans l'écoulement lorsque le rapport d'aspect est modifié. En partant du fait que l'écoulement étudié soit stationnaire statistiquement d'un point de vue énergétique, on peut appliquer des arguments dimensionnels "à la Kolmogorov" [11, 12, 13] pour écrire le taux de transfert d'énergie par unité de masse,  $\epsilon = c \frac{U^3}{L}$ , en fonction des données de l'étude :  $\frac{1}{\rho_{fluid}} \frac{\langle P \rangle}{V_{fluid}} = c \left( \frac{(2\pi f_{rot} R)^3}{L} \right)$ , avec  $c$  constante de proportionnalité. Le calcul de  $L/c$  montre une réduction de l'échelle intégrale de 12 à 14 % lorsque le rapport d'aspect passe de  $AR = \frac{1}{2}$  à  $AR = 1$ . Ces valeurs sont relativement faibles par rapport aux 50 à 60 % de réduction observés lorsque  $AR$  passe de 1 à 2,5. Une telle réduction est représentative d'un changement radical de morphologie de l'écoulement. En considérant un modèle classique de cascade [15], et le fait que la puissance moyenne injectée dans l'écoulement est globalement la même, une réduction de plus de moitié de la taille intégrale s'accompagne d'une augmentation du nombre de ces échelles moins énergétiques. La mesure instantanée de puissance étant l'image de l'interaction des structures d'échelle intégrale en face des disques à un instant donné, l'argument formulé dans la phrase précédente apporte des éléments de réponse pour expliquer la réduction du taux de fluctuations et de l'asymétrie observées pour  $AR = 2,5$ .

## 5 Intercorrélation et asymétrie

Les résultats précédents nous conduisent à l'analyse de l'écoulement entre les deux disques de forçage et à prendre en compte la présence d'événements simultanés enregistrés sur les deux dispositifs d'entraînement. Titon et Cadot (2003) [7] ont ainsi identifié des phases de réduction des forces de traînée turbulente, corrélées à la présence dans l'écoulement de structures cohérentes de basse pression [9]. Dans cette section, nous nous intéressons à l'évolution du coefficient d'intercorrélation des fluctuations de puissance injectée par chacun des deux disques  $\rho(\delta P'_1, \delta P'_2)$ , en fonction du rapport d'aspect.

Deux paramètres sont extraits des formes caractéristiques observées sur les figures 3(a) et 3(b) : le maximum de corrélation  $\rho_{max}$ , représentatif de la cohérence spatiale, et le temps de corrélation  $\tau/T$ , représentatif de la cohérence temporelle des phénomènes gouvernant l'écoulement et dont les effets sont simultanément ressentis sur les deux disques. Si nous excluons le cas  $AR = 2,5$  pour lequel nous avons conclu à un changement radical de morphologie de l'écoulement et pour lequel  $\rho_{max} = 0,3$  et  $\tau/T = 1$ , nous pouvons remarquer que c'est pour  $AR = 1$  que la corrélation est la plus remarquable, surtout au niveau des temps de corrélation atteints :  $\tau/T = 2,0$  pour le mode  $\Omega_0$ , et  $\tau/T = 2,4$  pour le mode  $\Gamma_0$ .

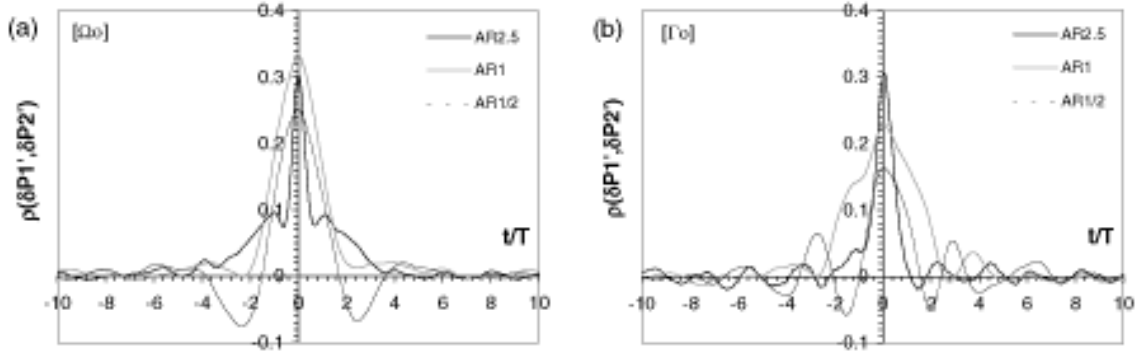


FIG. 3 – Evolution de l'intercorrélation  $\rho(\delta P'_1, \delta P'_2)$  avec  $AR$  : (a) mode  $\Omega_0$ , (b) mode  $\Gamma_0$

Une autre observation remarquable peut être faite des figures 3(a) et 3(b) : l'absence de phases de corrélations négatives entre  $P_1(t)$  et  $P_2(t)$  pour  $AR = 1$  participe à expliquer le maximum d'asymétrie enregistré à cette valeur du rapport d'aspect. En effet, la somme de fluctuations anticorrélées résulte en une fluctuation moins importante. La présence de tels événements sur les contributions énergétiques fournies par les deux dispositifs de forçage peut entraîner une réduction de l'asymétrie des distributions et une relative baisse du taux de fluctuations, en accord avec les observations pour  $AR = \frac{1}{2}$  et  $AR = 2,5$ .

## 6 Conclusion

Nous avons étudié les propriétés statistiques et spectrales de la puissance globale injectée dans un écoulement turbulent fermé, de type Von Karman contrarotatif, dont le rapport d'aspect est modifié. Ce paramètre a été choisi en conséquence d'une lecture synthétique de travaux récents sur les fluctuations globales de grandeurs énergétiques de systèmes dissipatifs. Dans cet article, grâce à une étude comparative pour trois valeurs du rapport d'aspect, nous avons avancé des arguments qui ont permis d'identifier deux

mécanismes de réduction ou de *moyennage* des grandes fluctuations, responsables de la baisse du taux de fluctuations de la puissance injectée dans l'écoulement et de l'asymétrie de sa distribution. La nature d'une telle asymétrie reste une question ouverte dans ce domaine.

En guise de conclusion, nous pouvons dire que la description des phénomènes qui gouvernent l'écoulement pour chacune des trois configurations expérimentales, en terme de cohérence spatiale ou temporelle, nous a permis de conclure que la situation  $AR = 1$  est optimale en ce qui concerne la traduction des grands événements de puissance sur les séries temporelles enregistrées.

## Références

- [1] R. Labbé, J.-F. Pinton, S. Fauve, *J. Phys. II France*, **6**, 1099 (1996).
- [2] A. Pumir, *Phys. Fluids*, **8**(11), 3112 (1996).
- [3] J.-F. Pinton, P. C. W. Holdsworth, R. Labbé, *Phys. Rev. E*, **60**, R2452 (1999).
- [4] S. Aumaître, S. Fauve, J.-F. Pinton, *Eur. Phys. J. B*, **16**(3), 563 (2000).
- [5] S. Aumaître, S. Fauve, S. McNamara, P. Poggi, *Eur. Phys. J. B*, **19**, 449 (2001).
- [6] B. Portelli, P. C. W. Holdsworth, J.-F. Pinton, *Phys. Rev. Lett.*, **90**(10), 104501 (2003).
- [7] J. H. Titon, O. Cadot, *Phys. Fluids*, **15**(3), 625 (2003).
- [8] O. Cadot, J. H. Titon, *Phys. Fluids*, in progress.
- [9] O. Cadot, S. Douady, Y. Couder, *Phys. Fluids*, **7**(3), 630 (1995).
- [10] J. H. Titon, O. Cadot, *Phys. Rev. E*, **67**, 027301 (2003).
- [11] A. N. Kolmogorov, *Dokl. Akad. Nauk., SSSR*, **30**,9 ; **31**,538 ; **32**,16 (1941).
- [12] U. Frisch, *Cambridge University Press*, Cambridge (1995).
- [13] A. Tsinober, , *Kluwer Academic Publisher* , (2001).
- [14] O. Cadot, Y. Couder, A. Daerr, S. Douady, A. Tsinober, *Phys. Rev. E*, **56**, 427 (1997).
- [15] L. F. Richardson, *Proc. R. Soc. Lond. A*, **110**, 709 (1926).

## Caractérisation de la propagation d'impulsions dans les systèmes de communication par fibre optique utilisant un codage à changement de phase différentiel

A. Tonello et S. Wabnitz

*Laboratoire de Physique de l'Université de Bourgogne,  
Unité Mixte de Recherche CNRS 5027  
Faculté des Sciences Mirande, 9, Avenue A. Savary, 21078 Dijon  
Alessandro.Tonello@u-bourgogne.fr*

### Résumé

Dans cet article nous étudions la propagation d'impulsions lumineuses dans les lignes de transmission par fibre optique où la dispersion chromatique varie périodiquement. Dans ce travail, on compare la modulation d'amplitude avec la modulation de phase différentielle. L'opération appelée "modulation" d'amplitude consiste à faire varier l'intensité lumineuse au rythme de l'alternance des zéros et des uns. Dans le codage de phase différentiel on transmet un train continu d'impulsions, et l'information est contenue dans la phase relative entre deux impulsions successives [1]. Des études récentes ont montré que le codage par phase différentielle peut améliorer sensiblement l'efficacité spectrale de la transmission. Cette efficacité est mesurée par le taux d'information transmise par unité de bande spectrale physique. La limitation principale à la capacité des transmissions par fibre optique est l'accumulation du bruit généré par les amplificateurs optiques, ainsi que le couplage de ce bruit avec les signaux à cause de la non linéarité Kerr de la fibre [2]. Dans notre travail on applique la méthode d'optimisation du calcul des variations [3] pour essayer de réduire la variance du bruit de phase non linéaire. Finalement, on compare par simulation numérique complète les performances du codage d'amplitude et de phase.

## 1 Introduction

La transmission des séquences binaires dans les télécommunications par fibre optique est typiquement obtenue par la modulation de l'amplitude d'un train continu d'impulsions. Dans ce cas (format de modulation dit "on-off keying", ou OOK), la valeur logique zéro est représentée par la suppression d'une impulsion. Il s'agit donc d'un codage synchronisé où la présence/absence des impulsions optiques correspond aux deux symboles de la séquence binaire d'origine (figure 1 gauche). La capacité totale de transmission de la fibre optique est définie par le produit du débit par la distance. Cette capacité a progressé largement ces dernières années grâce aux améliorations suivantes: la fabrication de fibres à faibles pertes sur une bande de plus de 90 nm à la longueur d'onde de l'infrarouge (1550nm); le développement de la technologie d'amplification optique; l'introduction de la technologie de la compensation périodique de la dispersion par des fibres à dispersion opposée à celle de la silice; enfin la technologie du multiplexage en longueur d'onde. Tous ces facteurs ont permis des débits par canal de plus de 40 Gb/s sur des liaisons optiques de milliers de kilomètres. Sur ces distances, une des dégradations principales de la qualité de la transmission est l'interaction entre le champ électrique associé au signal, le bruit d'émission spontanée des amplificateurs, et enfin la réponse non linéaire de la fibre, où l'indice de réfraction est proportionnel à l'intensité du champ (effet Kerr optique).

Si on considère plus en détail la non linéarité Kerr de la fibre optique, on peut s'apercevoir dans le cas de la modulation d'amplitude, que des fluctuations de l'amplitude des zéros et des uns, ainsi que des fluctuations du temps d'arrivée d'une impulsion par rapport aux autres, peuvent entraîner à un erreur à la réception. Par exemple, une impulsion peut se décaler dans le temps par rapport aux autres de sorte qu' à la réception le niveau d'intensité détectée correspondant à son temps de bit est inférieur au seuil de détection d'un un. Ce phénomène est appelé gigue d'amplitude. L'effet Kerr génère des fluctuations de phase à cause de l'interaction entre différents symboles. En suite, dans la propagation la dispersion est responsable de la conversion périodique de ces fluctuations de phase en fluctuations d'amplitude. L'effet Kerr est aussi responsable d'une gigue temporelle des impulsions à cause de l'interaction avec le bruit des amplificateurs. Par conséquent, l'effet Kerr est responsable d'une limitation importante à la distance maximale de transmission ainsi que du débit et/ou de l'efficacité spectrale du système. On rappelle que l'efficacité spectrale, mesurée en bit/s/Hz, représente le flux d'information associé à l'unité de bande spectrale.

L'amplification optique est obtenue grâce à une fibre optique dopée par des atomes d'Erbium. L'émission stimulée de ces atomes permet le transfert d'énergie du laser de pompe au signal à amplifier. La présence inévitable de l'émission spontanée conduit à un bruit blanc qui se propage avec le signal. La puissance  $\sigma^2$  du bruit est proportionnelle au gain des amplificateurs, au taux d'émission stimulée, et au nombre total d'amplificateurs  $N$ . Il est donc convenable d'augmenter le niveau du signal et donc le rapport signal sur bruit ("optical signal to noise ratio", ou OSNR) jusqu'au niveau où les effets non linéaires commencent à dégrader la qualité de la transmission. La puissance optimale d'entrée du signal représente donc le compromis entre la minimisation des effets non linéaires et la maximisation du OSNR. Si l'on prend en considération les pénalités liées à l'effet Kerr, il est évident que si on remplace la modulation d'amplitude par la modulation de phase différentielle ("differential phase-shift keying", ou DPSK), les fluctuations d'amplitude et la gigue temporelle ne peuvent plus causer des erreurs car l'information est associée à la phase et non plus à l'amplitude du signal. En plus, la gigue temporelle introduite par l'inter modulation de phase est absente avec le format DPSK, car la séquence du signal est la même pour tous les canaux. Dans le codage du type DPSK, les valeurs logiques " 1 " et " 0 " sont représentées par une phase qui ne change pas ou qui change de  $\pi$  entre une impulsion et la suivante (voir encore figure 1 gauche). Au transmetteur, on peut contrôler la phase entre deux impulsions successives par l'application du même voltage sur les deux branches d'un modulateur du type Mach-Zhender. Au niveau du récepteur, on peut traduire la différence de phase entre deux impulsions successives en une différence d'amplitude en introduisant un interféromètre ainsi que une ligne de délai optique d'un temps de bit.

La limitation majeure du codage DPSK est donc due à l'interaction entre le signal et le bruit, ce qui introduit une gigue de phase qui finalement limite la distance de propagation sans erreurs. C'est pour cela que dans notre travail on attaque le problème de l'interaction du signal DPSK et du bruit par une méthode analytique connue comme la méthode du calcul des variations. Ensuite on validera nos résultats par la simulation numérique complète de la propagation et de la détection dans une ligne de transmission réelle. Le résultat principal de l'analyse des variations est que l'interaction entre le bruit des amplificateurs et le train continu d'impulsions introduit une forte compression de la densité spectrale du bruit. C'est à dire, le bruit blanc des amplificateurs au cours de la propagation est transformé dans un bruit coloré qui est confiné dans la même région spec-



trale que le signal. Cela signifie que le bruit se propage à la même vitesse de phase que le signal, et qu'il n'est pas possible de les séparer par un simple filtrage.

Cet effet est connu comme " le bruit de Gordon-Mollenauer ", et peut affecter très négativement le format de transmission DPSK où l'information est associée à la phase du signal. L'analyse des variations montre que le bruit centré à la fréquence du signal croît au cours de la propagation beaucoup plus rapidement (c'est à dire proportionnel à  $N^3$ ) que le bruit de fond situé loin de la bande du signal. Le résultat inattendu de notre étude est que l'on peut contrôler la variance du bruit de phase dans la modulation DPSK en réduisant la durée des impulsions par rapport au temps de bit (à énergie d'impulsion constante).

## 2 Methodologie analytique

La dynamique dispersive et faiblement non linéaire des impulsions optiques en fonction de la distance de propagation et du domaine temporel est bien modélisé dans les lignes à gestion de dispersion, par l'équation de Schrödinger non linéaire à coefficients périodiques

$$\frac{\partial A}{\partial z} = (g - \alpha)A - i\beta \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + i\gamma |A|^2 A + R \quad (1)$$

où  $\beta(z)$  joue le rôle de la dispersion périodiquement modifiée,  $\gamma$  représente la non-linéarité,  $g$  le gain,  $\alpha$  l'atténuation et  $R$  les sources de bruit. La caractérisation purement numérique de la statistique de la phase du signal couplée au bruit exige un calcul exhaustif sur plusieurs réalisations du processus aléatoire du bruit, ce qui implique des simulations numériques de longue durée. Par contre, une estimation assez précise de l'interaction entre le bruit et le signal optique peut être obtenue d'une façon entièrement analytique par le moyen du calcul des variations (voir aussi Ref.[3]). Dans cette approche on considère un profil Gaussien  $A(z, t) = a \exp[i\phi(1 + iC)t^2/(2\tau^2)]$  pour les impulsions avec des paramètres lentement variables au cours de la propagation.  $d\tau/dz = \beta C/\tau$ ,  $dC/dz = \beta(1 + C)^2/\tau^2 + \gamma E/(\tau\sqrt{2\pi})$  où  $E$  représente l'énergie. Suite à une linéarisation, en traitant le bruit comme une perturbation, cela nous conduit directement à une équation d'évolution pour la variance de la perturbation de phase  $\langle \Delta\phi^2 \rangle$ , couplée avec les équations d'évolution pour les autres corrélations croisées  $\mathbf{y} = [\langle \Delta E \Delta \tau \rangle, \langle \Delta E \Delta c \rangle, \langle \Delta E \Delta \phi \rangle, \langle \Delta \tau^2 \rangle, \langle \Delta \tau \Delta c \rangle, \langle \Delta \tau \Delta \phi \rangle, \langle \Delta c^2 \rangle, \langle \Delta c \Delta \phi \rangle, \langle \Delta \phi^2 \rangle]$ . On obtient une dynamique forcée  $d\mathbf{y}/dz = M(z)\mathbf{y} + \sigma(z)$  où le vecteur  $\sigma(z) = [\sigma_{e\tau}, \sigma_{ec}, \sigma_{e\phi}, \sigma_{\tau\tau}, \sigma_{\tau c}, \sigma_{\tau\phi}, \sigma_{cc}, \sigma_{c\phi}, \sigma_{\phi\phi}]$  représente des coefficients de corrélation croisée liés à l'hypothèse gaussienne et la matrice  $M(z)$

$$\begin{bmatrix} 0 & -2\nu & \beta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma & -(2\beta_2 + \gamma) & 2\nu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5\gamma/4 & -(\beta_1 + 5\gamma/4) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4\nu & +2\beta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & 0 & -(2\beta_2 + \gamma) & 0 & 0 & \beta_1 & 0 \\ 0 & 5\gamma/4 & 0 & 0 & -(\beta_1 + 5\gamma/4) & 0 & -2\nu & 0 & \beta_1 \\ 0 & 0 & 2\gamma & 0 & 0 & -2(2\beta_2 + \gamma) & 0 & 4\nu & 0 \\ 0 & 0 & 5\gamma/4 & \gamma & 0 & -(\beta_1 + 5\gamma/4) & -(2\beta_2 + \gamma) & 0 & 2\nu \\ 0 & 0 & 0 & 5\gamma/4 & 0 & 0 & -(2\beta_1 + 5\gamma/2) & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

et  $\gamma(z), \beta_1(z), \beta_2(z), \nu(z)$  sont des fonctions de l'évolution de  $\tau(z), C(z), \beta(z)$ . La solution exacte de ce système d'équations différentielles non linéaires nous donne la croissance de la variance du bruit sur les différents paramètres de l'impulsion du signal, notamment sa phase. Pour valider le résultat de l'analyse des variations, il faut le comparer à la variance d'ensemble de la phase de l'impulsion, calculée à l'aide de plusieurs tirages du bruit et

une solution purement numérique de l'équation de propagation dans la fibre et dans la chaîne des amplificateurs. La même technique d'analyse des variations peut être utilisée pour décrire l'évolution de la gigue temporelle liée à l'interaction non linéaire due à la force d'attraction entre deux impulsions successives. Cela nous permet d'exploiter la méthode des variations pour prédire à la fois la croissance de la variance de la phase dans le cas du format DPSK, ainsi que la gigue temporelle qui résulte des interactions non linéaires dans le cas du format OOK. Tout cela nous permettra de trouver analytiquement, même si d'une façon approximative, les paramètres de l'impulsion initiale qui optimise la qualité de la transmission.

On considère d'abord le résultat de l'analyse des variations pour ce qui concerne l'optimisation de la durée des impulsions pour un débit fixé à 10 Gb/s. On trouve que si on augmente la puissance moyenne du signal jusqu'à des niveaux où les effets non linéaires dominent la dégradation de la qualité de la transmission, le format OOK et le format DPSK ont une tendance opposée vis-à-vis de l'optimisation de la durée des impulsions. Notamment, avec le format DPSK on diminue la variance du bruit de phase quand on raccourcit les impulsions. Tandis que la gigue temporelle d'interaction avec le format OOK diminue si l'on augmente la durée des impulsions (voir la figure 1 à droite et la figure 2 à gauche). La diminution de la variance du bruit de phase est due à l'élargissement spectral des impulsions courtes, ce qui réduit l'impact relatif des composantes spectrales du bruit centrées à la même fréquence que la porteuse. Par contre, la diminution des forces d'interaction quand la durée des impulsions rallonge est une caractéristique spécifique des systèmes à gestion périodique de la dispersion.

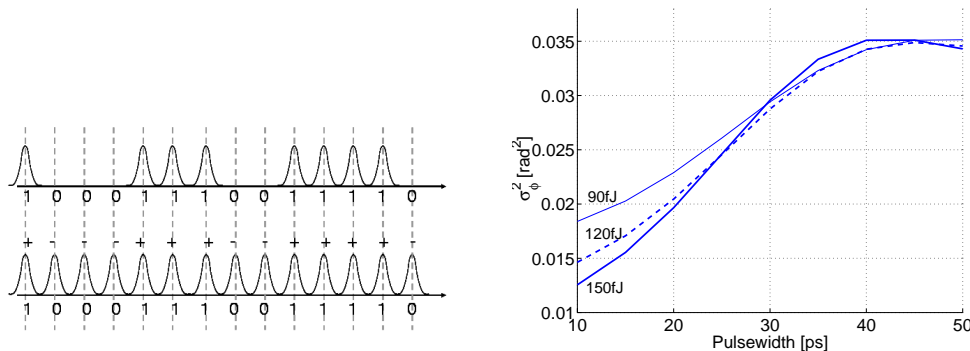


FIG. 1 – *Gauche: Exemple du codage binaire OOK (haut) et DPSK (bas); + et – pour un déphasage de 0 ou  $\pi$ . Droite: variance de la phase DPSK pour trois valeurs d'énergie des impulsions à 2100 km en fonction de la durée des impulsions (méthode des variations).*

### 3 Simulations numériques

La méthode des variations permet d'évaluer qualitativement l'effet du réglage des différents paramètres du signal, mais la validation de ses conclusions nécessite une solution numérique de la propagation, ce qui permet d'inclure tous les différents effets physiques qui déterminent la qualité de la transmission. Cette qualité est associée au taux d'erreurs binaire, qui est lié au facteur de qualité  $Q$  pour une statistique gaussienne des erreurs. Un facteur de qualité égal à 6 correspond à un taux d'erreur de  $10^{-9}$ . Dans nos figures on montre le facteur  $Q$  en dB c'est à dire  $20\text{Log}_{10}(Q)$ , ce qui donne une valeur limite de

15.6 dB. La figure 2 montre l'évolution du facteur Q (dB) en fonction de la distance de

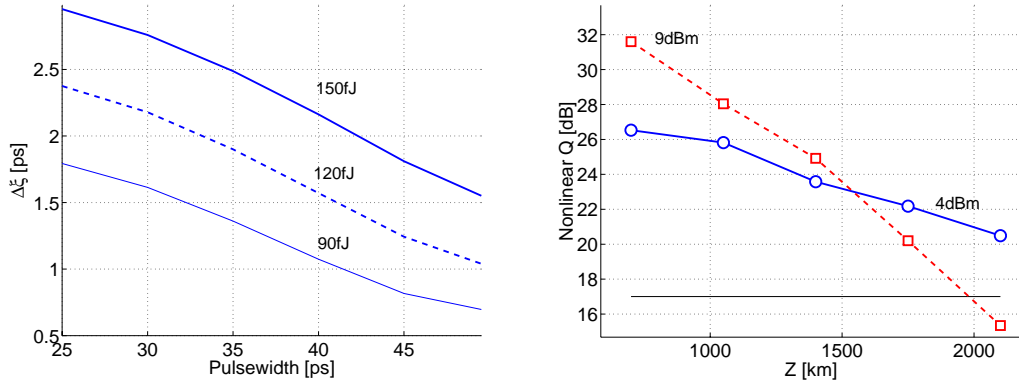


FIG. 2 – Gauche: gigue temporelle des deux impulsions pour le format OOK (méthode de variations). Droite: facteur de qualité de la transmission évalué par simulations numériques en fonction de la distance de propagation.

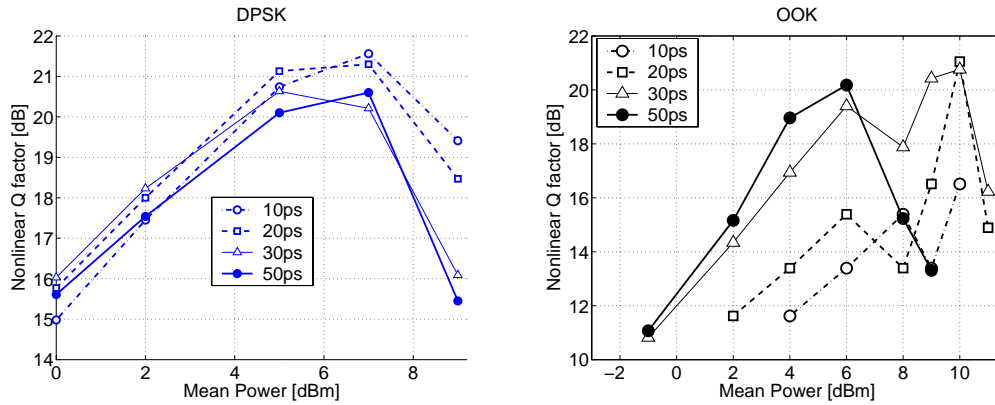


FIG. 3 – Gauche: facteur de qualité de la transmission DPSK pour différents niveaux de la puissance moyenne et de la durée temporelle. Droite: facteur de qualité pour le format OOK.

propagation, pour deux valeurs de la puissance moyenne dans une transmission DPSK à 10Gb/s. On peut voir que à 9 dBm le facteur de qualité Q, qui initialement est plus grand pour son meilleur OSNR, décroît rapidement à cause des effets non linéaires.

Si on considère ensuite l'optimisation de la durée initiale des impulsions du signal, on a comparé les prédictions analytiques avec l'optimisation numérique de la durée des impulsions pour différentes valeurs de la puissance moyenne. Comme on a la même probabilité pour les uns et les zéros dans le format OOK, au même niveau de puissance moyenne on a des impulsions d'énergie deux fois plus grande avec ce format que avec le format DPSK.

La figure 3 montre aussi, en relativement bon accord avec les prédictions de l'analyse des variations, que pour toutes les valeurs de la puissance moyenne la modulation DPSK est plus efficace pour des impulsions courtes par rapport au temps de bit. Par contre, pour des puissances inférieures à 6 dBm et un format OOK la performance est meilleure pour des impulsions de durée comparable au temps de bit.

## 4 Conclusions

On a comparé les limitations non linéaires dans les transmissions à haut débit avec modulation d'amplitude ou de phase. La méthode des variations décrit bien la dynamique du bruit de phase pour le DPSK et les interactions pour le format OOK. Les simulations numériques confirment les prédictions analytiques sur l'effet des limitations non linéaires en fonction de la variation de la durée des impulsions.

Cette étude ne prend en compte que la propagation d'un seul canal, c'est pourquoi nous sommes en train de compléter l'étude dans le cas d'une transmission à multiplexage de longueur d'onde. On peut toutefois déjà anticiper que l'interaction non linéaire entre les différents canaux sera plus importante au fur et à mesure qu'on raccourcit les impulsions, ce qui forcément modifiera les conclusions du cas à un seul canal.

Nous voulons remercier Dr. Ozdal Boyraz pour la réalisation des codes numériques des simulations.

## Références

- [1] T. Mizuochi, K. Ishida, T. Kobayashi, J. Abe, K. Kinjo, K. Motoshima, K. Kasahara, *A Comparative Study of DPSK and OOK WDM Transmission Over Transoceanic Distances and Their Performance Degradations Due to Nonlinear Phase Noise*, IEEE Journ. of Lightwave Tech. **21**, 1933- 1943, (2003).
- [2] J.P. Gordon, L.F. Mollenauer, *Phase noise in photonic communications systems using linear amplifiers*, Opt. Lett. **15**, 1351-1353, (1990).
- [3] C.J. McKinstrie, C. Xie, T.I. Lakoba, *Efficient modeling of phase jitter in dispersion-managed soliton systems*, Opt. Lett. **27**, 1887-1889, (2002).

## Oscillations, multistabilité et robustesse dans les réseaux de régulation cellulaire

Bernard Vandembunder

*Institut de Recherches Interdisciplinaires, Institut de Biologie de Lille,  
1 rue du Professeur Calmette, 59021 Lille Cedex.*

**Bernard.Vandembunder@ibl.fr**

### Résumé

Les biologistes disposent des outils qui leur permettent de décrire le comportement oscillant ou bistable de certaines boucles de régulation dans des cellules vivantes. Mais la compréhension des propriétés de ces boucles élémentaires et des réseaux composés de ces boucles couplées entre elles exige un dialogue entre expérimentateurs et théoriciens. La première partie de cette revue est consacrée aux voies de signalisation et aux différents niveaux de régulation qui contrôlent l'expression des gènes. La seconde partie est consacrée à la description de quelques boucles de rétroaction négatives dont les composants sont des facteurs de transcription.

## 1 Introduction

Le génome humain contient environ 300.000 gènes, autant dit-on que le nombre de pièces d'un Airbus. En fait, le nombre de " composants " dans notre organisme, les protéines codées par ces gènes, est certainement 100 fois plus élevé ! Avec des sondes moléculaires, les biologistes peuvent identifier les cellules dans lesquelles s'expriment ces gènes et rechercher la localisation des protéines dans ces cellules. Ces travaux réalisés sur des cellules ou des tissus fixés donnaient une vision statique des processus biologiques. Comme le disait Max Perutz : " ce n'est pas avec une photo du chat en bas du mur et une autre photo du chat en haut du mur que l'on comprend comment le chat a sauté ". Avec des marqueurs fluorescents, on peut aujourd'hui observer ces protéines dans des cellules vivantes, caractériser leurs interactions et leur activité. Depuis quelques années, on assiste à un changement de paradigme, des gènes individuels aux modules fonctionnels et aux réseaux de régulation, du déterminisme génétique aux règles épigénétiques qui assurent la robustesse de ces réseaux malgré le caractère stochastique des événements moléculaires élémentaires. Avec ces nouvelles approches, globales et dynamiques, c'est un nouveau domaine qui s'ouvre aujourd'hui aux expérimentateurs et aux théoriciens, physiologistes, chimistes, mathématiciens et biologistes.

## 2 Spécificités spatio-temporelles des signaux de régulation

Notre organisme compte une centaine de types cellulaires différents ; en fonction des signaux qu'elles reçoivent et de leur état, nos cellules se multiplient, se différencient, se déplacent et meurent en permanence. Les voies que suivent ces signaux à l'intérieur de la cellule sont impliquées dans une grande variété de processus physiologiques ; la spécificité de la réponse vient de la durée, de l'intensité et de l'intégration des différents signaux reçus.

L'ion calcium  $\text{Ca}^{2+}$  est l'un des premiers messagers mobilisé à la suite de l'activation d'un récepteur sur la membrane plasmique d'une cellule. Le calcium est stocké dans ces organelles à l'intérieur de la cellule (réticulum endoplasmique, mitochondries), il est fixé sur des protéines, il s'échange entre les différents compartiments cellulaires par des pompes. Le marqueur fluorescent indo-1AM permet de suivre les variations des ions  $\text{Ca}^{2+}$  libres dans le cytoplasme des cellules. Dans les neutrophiles (les cellules qui constituent la première ligne de défense de l'organisme contre les affections bactériennes) en migration, des pulses de  $\text{Ca}^{2+}$  sont observés toutes les 20 secondes. Grâce à des caméras suffisamment sensibles, avec une résolution temporelle et spatiale adaptée (100 ns prise de vue, 30 ms entre les prises), on peut montrer que chacun de ces pulses correspond à une vague de calcium qui fait le tour de la cellule en 200 ms environ [1]. Le site d'ignition se situe sur le front de déplacement du neutrophile (lamellipode) ; la vague se déplace à une vitesse de 200  $\mu\text{m/s}$  environ et s'éteint à l'endroit où elle était apparue. Avec une drogue qui bloque la pompe à calcium du réticulum endoplasmique, on arrête la propagation de ces vagues, et on montre ainsi qu'elles ont pour origine ces réservoirs dans le cytoplasme. À l'endroit où la cellule a reçu un signal chimiotactique, le passage de cette vague déclenche une seconde vague qui se déplace en sens inverse. Les auteurs spéculent que ces vagues permettent à la cellule de s'orienter [1]. Un troisième type de vague est observé au cours de la phagocytose. Ces résultats montrent que le calcium n'est pas distribué de façon homogène, et qu'il peut ainsi réguler différents compartiments intracellulaires avec une grande spécificité. La mise en évidence des oscillations du calcium et de ces vagues calciques a été accompagnée par des efforts de modélisation ; pour les oscillations un modèle minimum est basé sur la libération du calcium induite par le calcium [2], pour les ondes calciques ce sont des modèles de réaction/diffusion qui sont utilisés.

Comment les protéines fixant le calcium sont-elles sensibles à l'amplitude ou la fréquence de ces signaux ? La protéine kinase C fait partie de ces protéines ; c'est une enzyme qui peut être activée par le calcium et le diacylglycerol (DAG). Elle comporte un domaine catalytique, un domaine C1 et un domaine C2 qui se fixent aux lipides membranaires en présence respectivement de DAG et de calcium. Cette protéine kinase C diffuse " librement " suivant une marche aléatoire dans le cytoplasme ; elle se fixe à la membrane plasmique lorsqu'elle est activée. La translocation des protéines de signalisation peut être observée dans des cellules vivantes en les fusionnant à la GFP, protéine fluorescente, produit d'un gène de méduse. On met ainsi en évidence une interaction rapide du domaine C2 avec la membrane pour des concentrations élevées de calcium, une interaction lente du domaine C1 avec cette membrane lorsque la cellule est activée [3]. Les résultats suggèrent une translocation réversible de la PKC induite par le calcium en absence de DAG, et une stabilisation de cette translocation associée à une activation de la PKC en présence de DAG ; le temps de résidence de la PKC à la membrane est alors de 10 secondes environ. En absence de DAG, les oscillations de calcium n'activent pas la PKC. En présence de DAG, lorsque les pulses de calcium sont séparés de plus de 10 secondes, la PKC est faiblement activée au moment où la concentration de calcium est la plus grande. Si les pulses sont plus rapides, la PKC n'a pas le temps de se décrocher lorsque la concentration de calcium diminue et une activation maximale peut être obtenue. La PKC est donc une machine moléculaire qui décode les signaux du calcium et du diacylglycerol ; elle dispose de deux modules qui agissent comme des détecteurs de fréquence pour les signaux calciques et de coïncidence pour les signaux calciques et pour le DAG.

Les effecteurs situés en amont peuvent-ils eux aussi décoder l'amplitude ou la fréquence des oscillations calciques ? Cette question a été abordée directement en générant des os-

cillations calciques dans des cellules T, qui sont d'autres cellules de notre système immunitaire. Une des procédures utilisées consiste à bloquer les pompes des stocks internes de calcium, ce qui a pour effet d'augmenter la perméabilité des cellules au calcium, et à changer rapidement la concentration de calcium dans le milieu [4]). Les courbes de réponse de l'activité des facteurs de transcription NFAT et NFkB en fonction l'amplitude du signal calcique sont non linéaires et superposables. Par contre, la fréquence des oscillations permet de faire la différence entre les deux facteurs. L'activité de NFAT disparaît pour des périodes supérieures à 400 secondes, tandis que l'activation de NFkB reste significative pour des périodes de 30 minutes. Cette différence reflète des mécanismes biochimiques différents pour la régulation de ces facteurs. NFAT est activée par une phosphatase calcium dépendante ; dès que le calcium décroît sous un certain seuil, une kinase phosphoryle NFAT qui change de conformation et se trouve exporté du noyau. L'activité de NFkB est contrôlée par un mécanisme de synthèse / dégradation qui prend plus de temps. La capacité de décoder les oscillations du calcium serait donc le résultat de la cinétique de régulation du facteur de transcription [5].

La translocation des facteurs de transcription du cytoplasme vers le noyau est un des moyens de contrôler l'activité de ces facteurs. Ainsi les facteurs de transcription Msn2 et Msn4 dans la levure migrent du cytoplasme au noyau quand ils sont activés par un stress. Une fusion avec la GFP permet de mettre en évidence la navette de ces facteurs entre le cytoplasme et le noyau avec une période de 3 à 5 minutes [6]. Ces oscillations sont observées pour des intensités de stress intermédiaire; elles sont très hétérogènes d'une cellule à une autre et peuvent durer plusieurs heures. L'étude de mutants donne des indications sur les mécanismes impliqués. Ainsi la fixation à l'ADN n'est pas nécessaire pour ces oscillations ; par contre, en absence de PKA, une kinase qui phosphoryle MSN2, ce facteur reste dans le noyau. Une boucle d'autorégulation qui impliquerait une modification de ces facteurs permet de mettre en lumière les conditions dans lesquelles ces oscillations peuvent apparaître de façon soutenue ; ce modèle suggère qu'un retard dans l'activation du facteur dans le noyau est nécessaire pour que des oscillations aient lieu. Ce modèle permet de prédire que les facteurs restent dans le cytoplasme pour des stress de faible intensité et qu'ils restent dans le noyau aux fortes intensités. Ce modèle prédit aussi l'existence d'oscillations abortives dans certaines cellules.

### 3 Un réseau d'oscillateurs participe au contrôle de l'expression des gènes

Les composants moléculaires qui interviennent dans le contrôle du rythme circadien ont été identifiés par l'étude de mutants, notamment chez la *Drosophile*. Ces horloges sont constituées par des boucles de rétroaction négatives au niveau de la régulation de l'expression des gènes ; elles sont conservées au cours de l'évolution [7]. Chez les plantes, des oscillateurs circadiens autonomes existent dans les différents tissus. Ce phénomène a été mis en évidence en étudiant l'expression des gènes qui codent une enzyme qui synthétise un pigment photoprotecteur et une protéine qui fixe la chlorophylle chez *Arabidopsis*. Des plantes transgéniques ont été construites dans lesquelles les promoteurs de ces gènes contrôlent l'expression du gène qui code la luciférase de ver luisant. On peut alors montrer avec des plantes vivantes sous illumination constante que ces gènes s'expriment avec des rythmes différents dans les racines et les feuilles [8]. Chez les animaux, le rythme circadien est fixé par une multitude d'oscillateurs périphériques synchronisés par une horloge centrale

qui se trouve dans le cerveau [9]. Les horloges circadiennes battent ainsi dans chacune de nos cellules. Chez la mouche ou le poisson zèbre, ces oscillations peuvent être induites par la lumière ; chez les mammifères, on les observe en réponse à une augmentation de sérum.

Les rythmes circadiens régulent des centaines de processus dans l'organisme humain, et en particulier la prolifération cellulaire. L'horloge qui contrôle le rythme circadien et celle qui contrôle le cycle cellulaire sont couplées. Les souris dans lesquelles le premier gène circadien identifié, le gène *Per* a été inactivé sont sensibles au cancer et un ensemble de résultats expérimentaux permet de jeter les bases d'une chrono-thérapie des cancers.

Une troisième horloge bat dans de nombreux types cellulaires : celle qui détermine le temps de la formation des somites dans l'embryon des vertébrés. Les somites apparaissent comme une série de blocs de cellules, toutes les 90 minutes dans l'embryon d'oiseau. Elles sont à l'origine des vertèbres et des muscles squelettiques (il y a une quarantaines de somites chez l'homme, 400 chez certains serpents). Les modèles qui rendent compte de ces oscillations sont basés sur des boucles de rétroaction dans une voie de signalisation appelée Notch. Un des gènes qui varie de façon cyclique au cours de la formation des somites est le gène codant le facteur de transcription *Hes1*. Dans différents types cellulaires les oscillations de *Hes1* sont elles aussi induites lorsqu'on ajoute du sérum dans le milieu

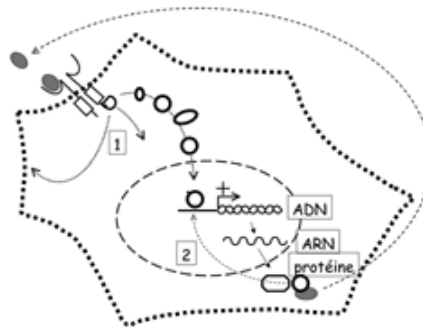


FIG. 1 – L'expression des gènes est contrôlée par des voies de signalisation qui relaient les signaux de l'extérieur vers le noyau des cellules. L'organisme humain compte une centaine de types cellulaires différents. Chacune de ces cellules contient l'ensemble du génome, mais les gènes ne s'expriment pas de la même façon selon les cellules et selon les signaux qu'elles reçoivent. Les contours de la membrane plasmique et son noyau sont représentés ici de façon schématique. Dans le noyau se trouve la chromatine qui contient l'ADN, ses régions codantes (les gènes) et ses régions non codantes dites régulatrices ou promoteurs. 1) L'activation d'un récepteur par son ligand (facteur de croissance ou protéine de la matrice extracellulaire) induit une modification de l'activité de ce récepteur et le recrutement de protéines vers la membrane plasmique. 2) Il s'ensuit une cascade d'activations d'enzymes qui activent d'autres enzymes qui modifient cette membrane, diffusent dans le cytoplasme et activent des facteurs de transcription. 3) Ces facteurs migrent vers le noyau, favorisent l'ouverture de certaines zones de la chromatine, se fixent à l'ADN et activent ou inhibent la RNA polymérase qui va transcrire leurs gènes cibles. Les ARN correspondants sont traduits en protéines. 4) Ces protéines participent à la physiologie cellulaire. Elles peuvent participer aux voies de signalisation décrites précédemment et donc intervenir dans des boucles de rétroaction, contrôler leur propre expression par exemple.



de culture [10]. La boucle de rétroaction qui serait ici impliquée est relativement courte puisque le facteur de transcription Hes1 inhibe sa propre expression.

D'autres boucles de rétroaction négative plus complexes ont été mises en évidence au niveau de la transcription. Le produit du gène suppresseur de tumeur p53 active l'expression de Mdm2, qui se fixe à p53, inhibe son activité transcriptionnelle et dirige p53 vers le protéasome où il sera dégradé. Le facteur de transcription NFkB active l'expression de la protéine inhibitrice IkB qui s'associe à NFkB et le maintient dans le cytoplasme. Cette fois, c'est la dégradation de cet inhibiteur qui libère NFkB et lui permet de migrer vers le noyau pour activer ses gènes cibles, dont le gène codant pour IkB. La simulation du comportement de ces modules de régulation permet de prédire un comportement oscillant, et cette prédiction a été validée expérimentalement [11, 12, 13]. Pour Hes1, p53 et NFkB, ces résultats peuvent s'interpréter par des retards au cours de la transcription [14].

Ces résultats suggèrent l'existence de nombreux autres oscillateurs élémentaires dans les réseaux de régulation transcriptionnelle. La mise en évidence de ces oscillateurs est facilitée par l'amélioration des techniques qui permettent de décrire l'activité d'un promoteur dans des cellules individuelles vivantes, comme évoqué précédemment pour l'étude du rythme circadien dans les plantes. Ces techniques ont été utilisées pour étudier notamment les mécanismes de sécrétion d'hormones, comme l'hormone de croissance et la prolactine, par l'hypophyse. La prolactine, initialement connue comme l'hormone de la lactation, exerce de nombreuses fonctions dans le domaine de la reproduction et de l'immunité. Sa libération se fait de façon pulsatile, avec une période d'environ 90 minutes, un rythme nycthémal, et une variation au cours du cycle menstruel. Dans des cellules de l'hypophyse, le promoteur (les séquences régulatrices) du gène codant pour la prolactine présente une activité pulsatile, avec un rythme d'environ 1 pulse par jour et une très hétérogénéité d'une cellule à l'autre [15]. Les résultats suggèrent la possibilité d'un comportement bistable ou continu du promoteur orchestré par une multiplicité de sites de fixations pour différents facteurs de transcription qu'il contient. Effectivement, des cellules de levure peuvent répondre de façon binaire ou graduelle à des variations de glucose selon les conditions de culture [16].

## 4 Conclusion

Au fur et à mesure que s'accumulent les données, la seule intuition biologique ne suffit plus pour les interpréter et la nécessité d'un dialogue entre expérimentateurs et théoriciens s'impose. Les outils utilisés pour la modélisation devront tenir compte du grand nombre d'acteurs moléculaires impliqués et de leur présence en faible quantité, si bien que les concepts de concentration et de constante d'équilibre ne sont plus opérationnels. La modélisation permet de concevoir des expériences ou de réaliser des réseaux de régulations artificiels, oscillateurs [17] ou interrupteurs bistables [18] et de mieux comprendre le fonctionnement des réseaux de régulation naturels.

## Références

- [1] Kindzelskii, A. L., and Petty, H. R. . Intracellular calcium waves accompany neutrophil polarization, formylmethionylleucylphenylalanine stimulation, and phagocytosis: a high speed microscopy study. *J Immunol* 170, 64-72, (2003).
- [2] Dupont, G., and Goldbeter, A. . Protein phosphorylation driven by intracellular calcium oscillations: a kinetic analysis. *Biophys Chem* 42, 257-270, (1992).
- [3] Oancea, E., and Meyer, T. . Protein kinase C as a molecular machine for decoding calcium and diacylglycerol signals. *Cell* 95, 307-318, (1998).
- [4] Dolmetsch, R. E., Xu, K., and Lewis, R. S. . Calcium oscillations increase the efficiency and specificity of gene expression. *Nature* 392, 933-936, (1998).
- [5] Lewis, R. S. Calcium oscillations in T-cells: mechanisms and consequences for gene expression. *Biochem Soc Trans* 31, 925-929, (2003).
- [6] Jacquet, M., Renault, G., Lallet, S., De Mey, J., and Goldbeter, A. Oscillatory nucleocytoplasmic shuttling of the general stress response transcriptional activators Msn2 and Msn4 in *Saccharomyces cerevisiae*. *J Cell Biol* 161, 497-505, (2003).
- [7] Goldbeter, A. Computational approaches to cellular rhythms. *Nature* 420, 238-245, (2002).
- [8] Thain, S. C., Murtas, G., Lynn, J. R., McGrath, R. B., and Millar, A. J. The Circadian Clock That Controls Gene Expression in *Arabidopsis* Is Tissue Specific. *Plant Physiol* 130, 102-110, (2002).
- [9] Schibler, U., and Sassone-Corsi, P., A web of circadian pacemakers. *Cell* 111, 919-922, (2002).
- [10] Hirata, H., Yoshiura, S., Ohtsuka, T., Bessho, Y., Harada, T., Yoshikawa, K., and Kageyama, R., Oscillatory expression of the bHLH factor Hes1 regulated by a negative feedback loop. *Science* 298, 840-843, (2002).
- [11] Hoffmann, A., Levchenko, A., Scott, M. L., and Baltimore, D., The IkappaB-NF-kappaB signaling module: temporal control and selective gene activation. *Science* 298, 1241-1245, (2002).
- [12] Lahav, G., Rosenfeld, N., Sigal, A., Geva-Zatorsky, N., Levine, A. J., Elowitz, M. B., and Alon, U., Dynamics of the p53-Mdm2 feedback loop in individual cells. *Nat Genet* 36, 147-150, (2004).
- [13] Lev Bar-Or, R., Maya, R., Segel, L. A., Alon, U., Levine, A. J., and Oren, M., Generation of oscillations by the p53-Mdm2 feedback loop: a theoretical and experimental study. *Proc Natl Acad Sci U S A* 97, 11250-11255, (2000).
- [14] Monk, N. A., Oscillatory expression of Hes1, p53, and NF-kappaB driven by transcriptional time delays. *Curr Biol* 13, 1409-1413, (2003).
- [15] Shorte, S. L., Leclerc, G. M., Vazquez-Martinez, R., Leumont, D. C., Faught, W. J., Frawley, L. S., and Boockfor, F. R., PRL gene expression in individual living mammotropes displays distinct functional pulses that oscillate in a noncircadian temporal pattern. *Endocrinology* 143, 1126-1133, (2002).
- [16] Biggar, S. R., and Crabtree, G. R., Cell signaling can direct either binary or graded transcriptional responses. *Embo J* 20, 3167-3176, (2001).
- [17] Elowitz, M. B., and Leibler, S., A synthetic oscillatory network of transcriptional regulators. *Nature* 403, 335-338, (2000).
- [18] Gardner, T. S., Cantor, C. R., and Collins, J. J., Construction of a genetic toggle switch in *Escherichia coli*. *Nature* 403, 339-342, (2000).

## Décomposition Spinodale et Coalescence pour l'équation de Cahn-Hilliard unidimensionnelle

Simon Villain-Guillot

*Centre de Physique Moléculaire Optique et Hertzienne,  
Université Bordeaux I, 33406 Talence Cedex, France  
s.villain@cpmoh.u-bordeaux1.fr*

### Résumé

Nous présentons une étude analytique de la dynamique de Cahn-Hilliard décrivant un processus de coalescence unidimensionnelle. Nous avons identifié l'ensemble des profils solutions stationnaires de l'équation de Cahn-Hilliard en l'absence de bruit. Et en utilisant les propriétés des réseaux d'interfaces, ou réseaux de solitons, famille de solutions périodiques de l'équation de Ginzburg-Landau, nous avons construit un ansatz permettant de décrire continûment le phénomène de déstabilisation et de doublement de période prédit dans le scénario auto similaire de Langer[1].

Lorsqu'un mélange, initialement homogène, est mis hors équilibre, les fluctuations de composition de grandes longueurs d'onde sont amplifiées et le mélange peut spontanément se séparer. Les interfaces délimitant alors chacun des différents domaines monophasés, vont interagir mutuellement et coalescer progressivement jusqu'à la formation d'une unique interface. Ce processus de transition de phase du premier ordre décrite entre autre la ségrégation dans les mélanges binaires[2] les alliages[3], ou la séparation liquide-gaz[4].

Il peut commencer soit par un processus de nucléation, soit, lorsque le mélange se trouve dans un état linéairement instable, par une décomposition spinodale. Dans ce cas, Cahn et Hilliard [5] ont montré qu'une modulation du paramètre d'ordre de longueur d'onde  $\lambda_{C-H}$  déterminée, est sélectionnée et amplifiée jusqu'à saturation. Le motif qui résulte de ce processus est composé d'interfaces bien définies délimitant des domaines homogènes, de tailles plus ou moins égales à  $\lambda_{C-H}$  [6, 7]. La dynamique se prolonge ensuite par un processus de coalescence, beaucoup plus lent. C'est le mûrissement d'Ostwald caractérisé par une augmentation de la taille typique des domaines et aboutissant à un état asymptotique composé de seulement deux domaines.

Dans cet article, nous présentons un ansatz permettant de décrire le processus idéal de coalescence unidimensionnel comme un processus auto-similaire continue de fusion et d'évaporation des domaines, comme l'a suggéré initialement Langer[1, 8]. Cet ansatz réalise une interpolation entre deux familles périodiques d'interfaces, solutions stationnaires de l'équation de C-H, de période spatiale  $\lambda/2$  et  $\lambda$ . Il permet de décrire continûment le processus de coalescence, depuis l'état stationnaire auquel aboutit la décomposition spinodale jusqu'à l'état thermodynamiquement stable, composé d'une seule interface. Après avoir introduit une famille symétrique et périodique de solutions de l'équation de Ginzburg-Landau pour étudier la dynamique non linéaire de Cahn et Hilliard, et trouvé les profils stationnaires, nous introduirons, dans la partie II, une famille de solution période non symétrique, permettant de construire une interpolation entre deux profils stationnaires successifs. Nous interpréterons cette interpolation en terme de paysage d'énergie et discuterons de la pertinence de cet ansatz pour décrire une vraie expérience de coalescence.

## 1 Antsatz pour le modèle de Cahn-Hilliard

La théorie de Cahn-Hilliard est une équation de diffusion pour un paramètre d'ordre  $\Phi$  réel représentant les fluctuations de densité d'un fluide autour de sa valeur moyenne ou les fluctuations de concentration de l'un des composants d'un mélange binaire.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}(\mathbf{r}, t) = \nabla^2 \left( \frac{\delta F}{\delta \Phi} \right) = \nabla^2 \left( \frac{\varepsilon}{2} \Phi + 2\Phi^3 - \nabla^2 \Phi \right) \quad (1)$$

Outre les solutions stationnaires homogènes  $\Phi = 0$  pour  $\varepsilon > 0$ , et  $\Phi = \pm \frac{\sqrt{-\varepsilon}}{2}$  pour  $\varepsilon < 0$  il existe d'autres solutions stationnaires, non homogènes comme les réseaux de solitons :

$$\Psi_{k,\varepsilon}(x) = k\Delta \text{Sn}\left(\frac{x}{\xi}, k\right) \text{ avec } \xi = \Delta^{-1} = \sqrt{2 \frac{k^2 + 1}{-\varepsilon}} \quad (2)$$

$\text{Sn}(x, k)$  est la fonction Jacobienne elliptique sinus-amplitude. Cette famille de solutions de l'équation de Ginzburg-Landau ( $\frac{\delta F}{\delta \Phi} = 0$ ) est constituée de profils périodiques de période

$$\lambda = 4K(k)\xi, \text{ où } K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}} \quad (3)$$

est l'intégrale Jacobienne elliptique première.  $k \in [0, 1]$ , le module ou "paramètre de ségrégation", et  $K(k)$  caractérise la ségrégation, définie comme le rapport entre la taille d'un domaine,  $0.5 \times \lambda$ , et la largeur de l'interface,  $2 \times \xi$ . Cette famille peut être construite comme une somme infinie de solitons and d'antisoltons périodiquement espacés [9]

$$\sum_n (-1)^n \tanh(\pi s(x - n)) = \frac{2k(s)K(s)}{\pi s} \text{Sn}(x, k) \text{ avec } s = \frac{K(k)}{K(k')} \text{ et } k'^2 = 1 - k^2 \quad (4)$$

Si cet espacement est infini (lorsque  $k \rightarrow 1$ , alors  $K(k)$  diverge) on retrouve l'interface usuel

$$\Phi(x) = \frac{\sqrt{|\varepsilon|}}{2} \tanh\left(\frac{\sqrt{|\varepsilon|}x}{2}\right) \quad (5)$$

qui caractérise le système dans son état thermodynamiquement stable. Les équations (2) et (3), permettent de relier les paramètres  $\lambda$ ,  $k$  et  $\varepsilon$  :

$$\varepsilon(k) = -2(1 + k^2) \left( \frac{4K}{\lambda} \right)^2. \quad (6)$$

ou de réécrire le réseau de soliton sous la forme :

$$\Psi_{k,\lambda}(x) = \frac{4K(k) \cdot k}{\lambda} \text{Sn}\left(\frac{4K(k)}{\lambda}x, k\right). \quad (7)$$

Cette famille de solution peut être utilisée pour étudier la dynamique non linéaire de la décomposition spinodale. Comme  $K(0) = \pi/2$ , on a

$$\lim_{k \rightarrow 0} \Psi_{k,\varepsilon} = k \sqrt{\frac{|\varepsilon|}{2}} \sin\left(\sqrt{\frac{|\varepsilon|}{2}}x\right) = k \frac{2\pi}{\lambda} \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right) \quad (8)$$

qui correspond au mode Fourier mode  $q = \frac{2\pi}{\lambda}$  du bruit initial, d'amplitude  $\nu = kq$  arbitrairement petite. Comme l'analyse linéaire, les expériences et les simulations montrent

que  $\lambda$ , la période du motif, est constante au cours de la décomposition spinodale, nous allons prendre  $\lambda = \lambda_{C-H} = \frac{4\pi}{\sqrt{-\varepsilon_0}}$ , où  $\varepsilon_0$  est température de trempe. Nous obtenons alors une famille de profile dépendant d'un paramètre  $k$  (ou  $\varepsilon$ , si on utilise l'équation (6) avec  $\lambda = \lambda_{C-H}$ ), qui permet de décrire aussi bien la croissance linéaire que la dynamique non linéaire de saturation.

Si l'on considère une fonction périodique  $\Phi$  (obtenue numériquement à partir de (1) ou expérimentalement) notre hypothèse postule qu'elle correspond à un réseau de solitons, c'est à dire qu'il existe  $k$  tel que  $\Phi(x, t) \sim \Psi(x, k)$ .  $k$  peut être trouver à partir de l'amplitude de la modulation,  $4kK(k)/\lambda$ , ou de la relation  $k = 1 - ((\Psi(\lambda/2, k)/\Psi(\lambda/4, k))^2 - 1)^2$ ; enfin, une troisième méthode fait intervenir le rapport entre les deux premiers modes de Fourier. Ces trois méthodes donnent le même résultat.

$\varepsilon$  peut s'interpréter comme une température fictive : en effet, c'est la température extraite d'un profil à un instant  $t$ , en utilisant la correspondance (6) entre  $k$  et  $\varepsilon$ . Par exemple, à  $t = 0$ , l'amplitude de la modulation est petite et donc  $k(0) = \frac{\nu\lambda_m}{2\pi} \rightarrow 0$ , ce qui correspond à  $\varepsilon(0) = 8\pi^2/\lambda^2$ , différent *a priori* de  $\varepsilon_0$  ( $\varepsilon(t = 0) = \frac{\varepsilon_0}{2}$  pour  $\lambda = \lambda_{C-H}$ ) : le système sera donc hors équilibre. La dynamique saturera lorsque cette température fictive attendra la valeur de la vraie température de trempe,  $\varepsilon_0$ ; c'est à dire, d'après la relation (6) pour  $\lambda = \lambda_{C-H}$ , lorsque  $k = k_0^s$  solution de l'équation implicite :

$$2(1 + k_0^{s2})K(k_0^s)^2 = -\frac{\varepsilon_0\lambda_{C-H}^2}{16} = \pi^2 \quad \text{soit} \quad k_0^s = 0.687 \quad (9)$$

Langer a montré que le profile résultant  $\Psi(x, k_0^s, \lambda_{C-H})$  était détruit par une modulation "antiferro" de longueur d'onde  $2\lambda_{C-H}$ , conduisant à un doublement de période. Le résultat de cette déstabilisation est un deuxième réseau d'interfaces (voir Figure (1)) de période  $\lambda = 2\lambda_{C-H} = \frac{8\pi}{\sqrt{-\varepsilon_0}}$ , donné par  $\Psi(x, k_1^s, 2\lambda_{C-H})$ , avec  $k_1^s$  solution de l'équation implicite

$$2(1 + k_1^{s2})K(k_1^s)^2 = -\frac{\varepsilon_0(2\lambda_{C-H})^2}{16} = 4\pi^2 = 8(1 + k_0^{s2})K(k_0^s)^2 \quad \text{soit} \quad k_1^s = 0.985 \quad (10)$$

Il sera lui aussi instable vis-à-vis d'une perturbation "antiferro". On a en fait tout une famille ou cascade de profils, de  $\Psi(x, k_1^s, \lambda_{C-H})$  jusqu'à une unique interface  $\tanh(\frac{\sqrt{-\varepsilon_0}}{2}x)$  séparant deux domaines homogènes semi-infinis, qui seront tous états stationnaires de la dynamique de (C-H). A chaque étape successive nous pouvons caractériser le système par le réseau de solitons

$$\Psi_n(x) = \Psi(x, k_n^s, 2^n\lambda_{C-H}) = \frac{\sqrt{-\varepsilon_0}K(k_n^s) \cdot k_n^s}{2^n\pi} \text{Sn}\left(\frac{\sqrt{-\varepsilon_0}K(k_n^s)}{2^n\pi}x, k_n^s\right), \quad (11)$$

où les  $\{k_n^s\}$  sont données par la relation implicite

$$2(1 + k_n^{s2})K(k_n^s)^2 = -\frac{\varepsilon_0(2^n\lambda_{C-H})^2}{16} = \pi^2 2^{2n}. \quad (12)$$

$\{k_n^s\}$  converge vers  $k_\infty^s = 1$  et les  $K(k_n^s)$  se comporte asymptotiquement comme  $\pi 2^{n-1}$ .

## 2 Ansatz pour le processus de coalescence 1D

Afin de décrire une étape du processus de coalescence permettant de passer continûment de  $\Psi_n(x)$  à  $\Psi_{n+1}(x)$ , nous allons utiliser une autre famille de solutions de l'équation (G-L) :

$$\psi(a, k, x) = \frac{\alpha(a, k) - k/\sqrt{a}\beta(a, k)\text{Sn}(4x\frac{K(k)}{\lambda}, k)}{1 - k/\sqrt{a}\text{Sn}(4x\frac{K(k)}{\lambda}, k)} \quad (13)$$

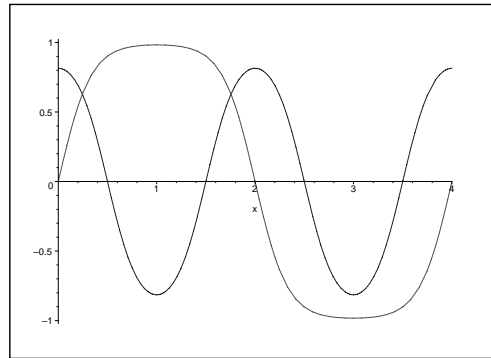


FIG. 1 – Profile des deux premiers états stationnaires de la dynamique de Cahn-Hilliard, avec  $k_1^s = 0.687$  et  $k_2^s = 0.985$ ,

où  $\alpha(a, k) = \frac{-2k^2/a+1+k^2}{((1+k^2)^2-12k^2+2(a+k^2/a)(1+k^2))^{\frac{1}{2}}}$  et  $\beta(a, k) = \frac{2a-1-k^2}{((1+k^2)^2-12k^2+2(a+k^2/a)(1+k^2))^{\frac{1}{2}}}$ .

Il s'agit maintenant d'un réseau interfaces, ou de solitons, non-symétrique, pour lequel la valeur moyenne du paramètre d'ordre est non nulle et contrôlée par  $a \geq 1$  [10].

Pour obtenir la famille symétrique précédente des  $\Psi_{k,\lambda}(x)$ , nous pouvons prendre  $a=1+k'$  (où  $k'^2 = 1-k^2$ ), et faire la somme de deux profils non symétriques. En effet, en utilisant la transformation de Gauss ou Landen [11], reliant le réseau de solitons de période  $2\lambda$  (et de module  $k$ ) au réseau de solitons de période  $\lambda$  (et de module  $\mu = \frac{1-k'}{1+k'}$ ), nous pouvons écrire

$$1 - \frac{\sqrt{5-k^2}}{2}(\psi(k, x - \frac{\lambda}{2}) + \psi(k, x + \frac{\lambda}{2})) = kSn(2x\frac{K(k)}{\lambda}, k) \quad (14)$$

$$1 - \frac{\sqrt{5-k^2}}{2}(\psi(k, x - \lambda) + \psi(k, x + \lambda)) = (1-k')Sn((4x+2\lambda)\frac{K(\mu)}{\lambda}, \mu) \quad (15)$$

où  $\psi(k, x) = \psi(1+k', k, x)$ . Ainsi, nous pouvons montrer à partir de l'équation (14) que

$$K(k) \left[ 1 - \frac{\sqrt{5-k^2}}{2}(\psi(k, x - \frac{\lambda}{2}) + \psi(k, x + \frac{\lambda}{2})) \right] = kK(k)Sn(2x\frac{K(k)}{\lambda}, k), \quad (16)$$

ce qui n'est autre que la solution symétrique de période  $2\lambda$ . De plus, en utilisant les relations

$$K(k) = \frac{2}{1+k'}K(\mu) \text{ ou } K(\mu) = \frac{1}{1+\mu}K(k) \quad (17)$$

nous pouvons alors exprimer le terme de gauche de la relation (15) comme

$$(1-k')K(k)Sn((4x+2\lambda)\frac{K(\mu)}{\lambda}, \mu) = 2\mu K(\mu)Sn((2x+\lambda)\frac{2K(\mu)}{\lambda}, \mu) \quad (18)$$

et donc réécrire la solution symétrique de période  $\lambda$  sous la forme

$$K(k) \left[ 1 - \frac{\sqrt{5-k^2}}{2}(\psi(k, x - \lambda) + \psi(k, x + \lambda)) \right] = 2\mu K(\mu)Sn((2x+\lambda)\frac{2K(\mu)}{\lambda}, \mu). \quad (19)$$

Ainsi, l'état initial  $\Psi(x, k_{n-1}^s, 2^{n-1}\lambda_{C-H})$  et final  $\Psi(x, k_n^s, 2^n\lambda_{C-H})$  d'une étape de coalescence peuvent être écrite, modulo un déphasage ou une translation, sous la même forme :

$$\Phi(x, k, \phi) = \frac{4K(k)}{\lambda} \left[ 1 - \frac{\sqrt{5-k^2}}{2}(\psi(k, x - (1-\phi/2)\lambda) + \psi(k, x + (1-\phi/2)\lambda)) \right] \quad (20)$$

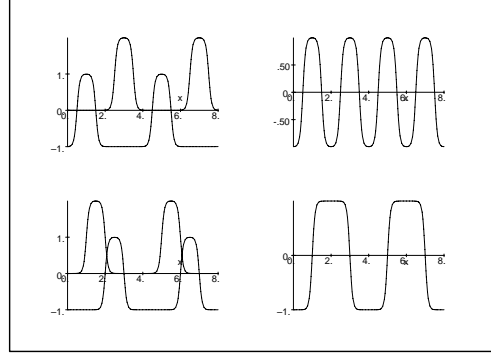


FIG. 2 – Construction des deux premiers états stationnaires de la dynamique de Cahn-Hilliard intervenant dans la première étape du processus de coalescence, avec  $k_1^s = 0.687$  et  $k_2^s = 0.985$ , en utilisant une superposition de profil non symétrique  $\psi(k, x)$ , eux mêmes solution stationnaires de Cahn-Hilliard. En faisant varier la phase relative des deux profils entrant dans cette combinaison linéaire, on obtient les deux états symétriques de périodes  $\lambda$  et  $2\lambda$ .

où  $k = k_n^s$  et  $\lambda = 2^n \lambda_{C-H}$ . Le processus idéal de coalescence 1D peut donc être décrit par une dynamique à paramètre de ségrégation  $k$  constant, ou dynamique "adiabatique", pendant lequel le degré de liberté  $\phi$ , associé à la phase relative entre les deux profils évolue de 0 à 1 selon la dynamique de Cahn-Hilliard.

$\psi(1 + k', k, x)$  peut s'interpréter comme une somme périodique infinie d'interfaces similaire à la relation (4), où on ne garde plus que deux interfaces consécutives sur quatre :

$$\psi(x) \sim \sum_p [\tanh(\pi s(x - 4 * p)) - \tanh(\pi s(x - 4 * n + 1))] . \quad (21)$$

En additionnant  $\psi(x + 2)$  et  $\psi(x)$  on retrouve la relation (4), alors qu'en additionnant

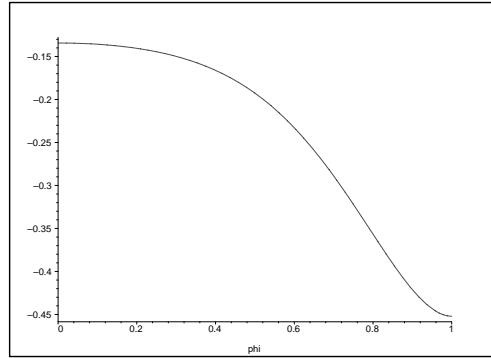


FIG. 3 – Paysage d'énergie durant une étape du processus de coalescence,  $F(\phi)$ . On débute à gauche pour  $\phi = 0$  avec un profil caractérisé par un paramètre de ségrégation  $k_1^s = 0.687$ . On remarque que dans cette région, l'énergie libre est une fonction concave de  $\phi$ ; ce profil est donc linéairement instable. Un pas du processus de coalescence idéale se terminera pour  $\phi = 1$  associée à un profil caractérisé par  $k_2^s = 0.985$ . Dans cette région, l'énergie libre est une fonction convexe de  $\phi$ , traduisant une stabilité de ce motif par rapport au fluctuation de  $\phi$  et une saturation exponentiellement lente de la dynamique.

$\psi(x + 1)$  et  $\psi(x)$  on obtient le réseau de soliton de période double, car la moitié des interfaces disparaissent du fait de l'annihilation soliton-antisoliton (voir Fig.2).

Pour montrer l'utilité de cet ansatz, nous avons tracé Figure (3) le paysage d'énergie  $\mathcal{F}(\phi) = \int F(\Phi(x, k, \phi)) dx$  (moyennée sur une période) en fonction du paramètre  $\phi$ ,  $k$  demeurant constant. Le profil  $\phi = 0$  correspond à un maximum local de l'énergie ; comme il n'y a pas de barrière d'énergie, il est linéairement instable. Si l'on s'intéresse à l'évolution du profil  $\Phi(x, k, \phi)$ , à partir de  $\phi = 0$ , nous pouvons remplacer l'équation (C-H) par une équation sur la phase  $\phi$  car  $\frac{\partial}{\partial t} \Phi(x, k, \phi)$  devient  $\frac{\partial}{\partial \phi} \Phi(x, k, \phi(t)) \cdot \frac{d\phi}{dt}$ . Cette dynamique sera similaire à celle de la décomposition spinodale, avec  $\phi$  croissant exponentiellement puis saturant pour  $\phi = 1$  (ou  $-1$ ) qui est un minimum dans le paysage d'énergie.  $\frac{\partial}{\partial \phi} \Phi(x, k, \phi)$  n'est autre que le mode le plus instable trouvé par Langer, mode antiferro caractérisé par la croissance et la disparition alternées des domaines monophasés.

### 3 Discussion

Notre approche de la coalescence idéale repose sur l'hypothèse qu'à chaque étape du processus, le profil  $\Phi(x, t)$  est caractérisé par une seule période spatiale. Plus généralement, en présence de bruit, la dynamique de la décomposition spinodale a lieu avec une modulation dont la taille typique est constante et égale à  $\lambda_{C-H}$ . [7] D'éventuelles collisions et fusions d'interfaces peuvent se produire du fait de fluctuations dans la périodicité du motif, mais manière marginale tant que cette première étape de la dynamique n'est pas arrivée à saturation. Ensuite seulement, la coalescence gouvernera la dynamique, entraînant un accroissement de la taille des domaines avec le temps.

Comme suggéré dans [1, 8], nous supposons que chaque profil périodique est déstabilisé par une fluctuations de type "antiferro". Ce processus est celui qui brisera le moins la symétrie du profil. Dans un processus de coalescence réel, cette instabilité ne concernera qu'un domaine de taille finie, pour lequel  $\phi$  variera par exemple entre 0 et 1, tandis que dans le domaine suivant,  $\phi$  variera de 0 à -1, de sorte que la symétrie par translation de  $\lambda$  ne sera pas brisée globalement. A chaque étape, la taille des domaines est doublée. Mais du fait de la non synchronisation entre les régions voisines, la taille caractéristique des domaines dans tout le système variera continûment.

### Références

- [1] J.S. Langer, *Annals of Physics* **65**, 53 (1971).
- [2] C. Wagner, *Z. Electrochem.* **65**, 581 (1961).
- [3] M. Hillert, *Acta Met.* **9**, 525 (1961).
- [4] J.S. Langer, in *Solids Far From Equilibrium*, edited by C. Godrèche (Cambridge University Press, Cambridge, England 1992), pp. 297-363.
- [5] J.W. Cahn and J.E. Hilliard, *J. Chem. Phys.* **28**, 258 (1958).
- [6] T. Izumitani and T. Hashimoto, *J. Chem. Phys.*, **83**, 3694 (1985).
- [7] S. Villain-Guillot and C. Josserand, *Phys. Rev. E* **66**, 036308 (2002).
- [8] S. Joly, A. Raquois, F. Paris, B. Hamdoun, L. Auvray, D. Ausserre and Y. Gallot, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 4394 (1996).
- [9] A. Saxena and A.R. Bishop, *Phys. Rev. A* **44**, R2251 (1991).
- [10] A. Novik-Cohen and L.A. Segel, *Physica D* **10**, 277 (1984).
- [11] M. Abramowitz and I. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions* (Dover, New York, 1965).



**Signatures dynamiques d'un auto-verrouillage de phase induit par  
compétition de processus  $\chi^{(2)}$  dans un OPO triplement résonnant:  
Observation d'une bifurcation de Hopf inverse**

J.-J. Zondy et D. Kolker

*BNM-SYRTE, Observatoire de Paris (UMR-CNRS 8630)*

*61 avenue de l'Observatoire, 75014 Paris*

jean-jacques.zondy@obspm.fr

### Résumé

Nous avons observé pour la première fois, dans un oscillateur paramétrique optique (OPO) diviseur cohérent de fréquence par 3 ( $3 \div 1$ ), les signatures dynamiques résultant de la compétition du processus paramétrique  $\chi^{(2)}(-3\omega; 2\omega, \omega)$  avec un deuxième processus  $\chi^{(2)}(-2\omega; \omega, \omega)$  auto-injectant les ondes signal et complémentaire. La paire auto-verrouillée en phase est caractérisée par un *dip* d'intensité prononcé dans l'agrégat de paires de modes sous la résonance de pompe. Pour un pompage relativement modeste ( $N \geq 3.5$  fois le seuil d'oscillation), les instabilités de Hopf du régime d'oscillation à désaccords de cavité nuls, prédites par la théorie [Zondy *et al*, Phys. Rev. A **63**, 023814 (2001)], émergent avec des périodes extrêmement lentes pour un système optique ( $f_H = 2 - 20$  kHz), dû à un phénomène de ralentissement critique de la dynamique du cas  $\Delta_{s,i} = 0$ . Nous avons également mis en évidence l'existence de plusieurs états de phase stables de la paire auto-injectée. Cet OPO à non-linéarités compétitives est prometteur pour la génération de photons intriqués, pour l'étude des corrélations quantiques spatiales de phase ou pour l'observation de structures transverses dissipatives encodées à fois en phase et en intensité.

## 1 Introduction

L'étude des OPOs à non-linéarités compétitives est intéressante du point de vue de la dynamique des systèmes dissipatifs non linéaires en optique. Un seul exemple de ces OPOs, l'IP-OPO (*Internally-Pumped* OPO) a été jusqu'à présent expérimentalement [1, 2] puis théoriquement [3, 4] étudié. L'IP-OPO est un générateur de second-harmonique (SHG,  $\omega + \omega \rightarrow 2\omega$ ) intra-cavité doublement [1] voire simplement résonnant [2] dans lequel l'harmonique  $2\omega$  peut à son tour générer deux ondes paramétriques quasi-dégénérées ( $\omega \pm \delta$ ) via la même non-linéarité  $\chi^{(2)}(-2\omega; \omega, \omega)$ . A l'inverse de l'IP-OPO, le SPL-OPO (*Self-Phase-Locked* OPO) décrit ici est un système dynamiquement plus riche car la deuxième non-linéarité SHG ne génère pas d'ondes supplémentaires mais se contente d'induire une auto-injection mutuelle des deux sous-harmoniques, entraînant un gel du processus de diffusion de phase des ondes *signal* ( $\omega_s = 2\omega$ ) et complémentaire ou *idler* ( $\omega_i = \omega$ ) caractéristique des OPOs conventionnels. Ce verrouillage de phase change drastiquement le comportement statique et dynamique de l'OPO en fonction de la configuration de résonance des trois ondes [5, 6]. Cependant, quelle que soit la configuration, le SPL-OPO présente une tri-stabilité de phase (existence de trois états de phase stables, espacés de  $2\pi/3$ , pour le même état d'intensité signal et idler).

La première réalisation expérimentale d'un SPL-OPO diviseur  $3 \div 1$  mettait l'accent sur les applications en métrologie des fréquences [7] et non sur la dynamique non linéaire proprement dite, étudiée pour la première fois en ondes planes dans la Référence [5].

L'intérêt du SPL-OPO pour la formation de structures transverses verrouillées en phase a ensuite été souligné par Longhi [8]. Il a notamment démontré que des structures en spirales à 3 branches peuvent émerger dans le profil des intensités en présence de diffraction, dans un système doublement résonnant (SPL-DRO) [8], chacune des branches portant la signature de l'une des trois phases possibles. Ainsi, l'effet de la diffraction combiné à la brisure de l'invariance de phase des OPO conventionnels lève spatialement l'indétermination de phase du modèle onde-plane, fournissant des structures spatiales encodées à la fois en intensité et en phase. En optique quantique, cette brisure de symétrie dans les OPOs où la diffusion de phase est gelée ouvre la voie à l'étude des corrélations quantiques spatiales, comme cela a été récemment démontré dans un OPO de type-II diviseur  $2 \div 1$  à verrouillage de phase induit par un couplage linéaire entre les ondes signal et idler [9].

## 2 Equations dynamiques *mean-field*

Dans le cas présent d'une configuration triplement résonnant, la dynamique du système peut être décrite par les équations champs-moyen (*mean-field*) suivantes, déduites du modèle ondes-planes propagatif décrit précédemment [5],

$$\dot{A}_p = -\gamma_p(1 - i\bar{\Delta}_p)A_p + ir_p A_i A_s - (\kappa_i r_p/2)A_p(|A_s|^2 + |A_i|^2) + E, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \dot{A}_s = & -\gamma_s(1 - i\bar{\Delta}_s)A_s + ir_s(A_p A_i^* + \chi^* A_i^2) + (\kappa_i r_s/2)A_s(|A_p|^2 - |A_i|^2) \\ & + \kappa_i r_s S^2(-2C_1 + i\xi C_2)A_s|A_i|^2 - 2\kappa_i r_s \chi^* A_p A_i A_s^*, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \dot{A}_i = & -(1 - i\bar{\Delta}_i)A_i + ir_i(A_p A_s^* + \chi A_s A_i^*) + (\kappa_i r_i/2)A_i(|A_p|^2 - |A_s|^2) \\ & - \kappa_i r_i S^2(C_1^* + i\xi C_2^*)A_i(|A_i|^2 - |A_s|^2) + \kappa_i r_s \chi[A_p^* A_s^2 - A_p(A_i^*)^2]. \end{aligned} \quad (3)$$

Pour établir ces équations, la solution des équations de propagation OPO + SHG dans le crystal portant les deux interactions en cascade (section OPO de longueur  $L_1$ , suivi de la section SHG de longueur  $L_2$ ) a été poussée jusqu'aux termes cubiques en champ (approximation MacLaurin 2 ou ML2), car les solutions ML1 (termes quadratiques uniquement) ne suffisent pas à décrire correctement le cas particulier où les désaccords de cavité des ondes paramétriques sont nuls ( $\bar{\Delta}_j = \Delta_j/\kappa_j = 0; j = s, i$ ), à cause d'un phénomène de ralentissement critique caractérisant la transition  $\bar{\Delta}_{s,i} \rightarrow 0$  [5]. Les paramètres  $\kappa_j = 1 - r_j$  sont les pertes fractionnelles en amplitude sur un aller-retour de cavité, incluant la transmission des miroirs. Le paramètre  $E$  est le champ pompe normalisé à l'intérieur de la cavité, et les coefficients  $\gamma_j = \kappa_j/\kappa_i; j = p, s, i$  sont les taux de dissipation. Dans les équations, le temps  $t$  a été normalisé au temps de vie  $t_i = \tau \mathcal{F}_i/\pi = \tau/\kappa_i$  d'un photon idler dans la cavité ( $\mathcal{F}_i$  étant la finesse de cavité correspondante et  $\tau = 2L_{\text{cav}}/c$  le temps d'un aller-retour). Enfin,  $\xi = \Delta k_{\text{SHG}} L_2/2$  est le désaccord de phase résiduel du processus SHG, dont dépendent également les constantes  $C_{1,2}$  données par

$$C_1(\xi) = \int_0^1 z \exp(i2\xi z) dz; \quad C_2(\xi) = \int_0^1 z^2 \exp(i2\xi z) dz, \quad (4)$$

qui peuvent s'intégrer par parties pour  $\xi \neq 0$ . Le couplage non linéaire est caractérisé par le facteur  $\chi = S \exp(i\xi) \sin \xi/\xi$ , où  $S = g_{\text{SHG}} L_2/g_{\text{OPO}} L_1$  est le rapport des gains paramétriques des processus SHG et OPO. Les solutions analytiques stationnaires en intensités  $I_j = |A_j|^2$  et phases  $\varphi_j$  ont été données dans le cadre de l'approximation ML1 dans la Réf. [5].

Deux régimes dynamiques sont à distinguer, selon que a):  $\bar{\Delta}_{s,i} \neq 0$  ou b):  $\bar{\Delta}_{s,i} = 0$ .

Dans le cas  $\bar{\Delta}_{s,i} \neq 0$ , la bifurcation de l'état trivial vers l'état lasant est sous-critique, de type noeud-col [5]. La branche supérieure est stable à partir du point de rebroussement noeud-col (oscillation sous-le-seuil) jusqu'à une valeur critique du paramètre de pompe  $N_H$  ou des désaccords (*detuning*) de cavité  $\bar{\Delta}_H$  où une transition de Hopf apparaît. Pour un paramètre de pompe fixé, les franges en intensités des sous-harmoniques en fonction des *detuning* présentent alors un important élargissement, de l'ordre de plusieurs fois la largeur de cavité des franges des paires non-verrouillées en phase. A  $\bar{\Delta}_{s,i} = 0$ , les intensités  $I_{\omega,2\omega}(\bar{\Delta}_{s,i} = 0)$  sont inférieures à celles correspondant à des *detuning* non nuls, donnant une forme de frange en forme de demi-cloche (cf. Fig. 3 de la Réf. [5]). Dans le cas  $\bar{\Delta}_{s,i} = 0$ ,

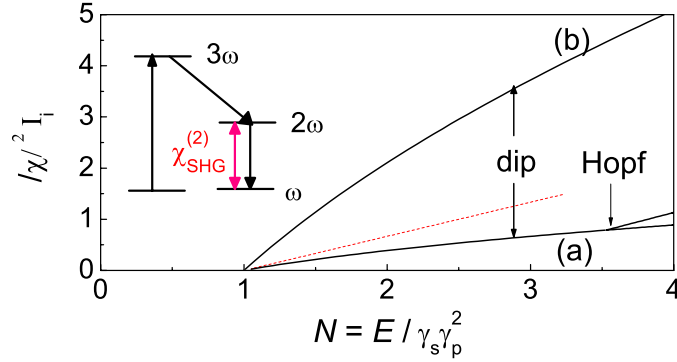


FIG. 1 – *Insert: niveaux d'énergie schématisant les non linéarités  $\chi^{(2)}$  en compétition dans le SPL-TRO. Courbes: diagrammes de bifurcation de l'intensité idler en fonction du paramètre de pompe normalisé au seuil  $N$ , calculés avec les équations (1)-(3), pour  $\bar{\Delta}_{p,s,i} = 0$  et  $r_p = 0.75$ ,  $\kappa_i = 0.0015$ ,  $\kappa_s = 0.001$ . (a):  $\chi = S = 0.2$ ; (b):  $\chi = 0$  (TRO conventionnel). La période des instabilités de Hopf est  $T = 58t_i$  au seuil  $N_H = 3.53$ , et  $T = 64t_i$  à  $N = 4$ .*

la bifurcation redevient sur-critique (Fig. 1). Les solutions stationnaires ML1 de (1)-(3) sont alors simplement

$$|\chi|^2 I_i = \gamma_s(N - 1) \quad \text{avec} \quad I_i/I_s = \gamma_s(\sqrt{N} \mp \sqrt{N-1})^2 \quad (5)$$

$$\sin(\varphi_p - \varphi_s - \varphi_i) = -1 \quad ; \quad \sin(\varphi_s - 2\varphi_i - \xi) = \pm 1. \quad (6)$$

Le signe "-" dans (5) ("+" dans (6)) correspond au cas  $\kappa_i > \kappa_s$  (et inversement à  $\kappa_i < \kappa_s$ ). La convergence vers ces états stationnaires nécessite alors plusieurs millions de temps d'aller-retour de cavité, contrastant avec le cas  $\bar{\Delta}_{s,i} \neq 0$  (quelques milliers), témoignant d'un ralentissement critique de la dynamique du système. Ce ralentissement vient du fait que lorsque  $\bar{\Delta}_{s,i} \rightarrow 0$ , le point de bifurcation noeud-col coalesce avec le point seuil  $(N_{th}, 0)$  du cas  $\bar{\Delta}_{s,i} = 0$ . Une signature dynamique de l'accrochage en phase-fréquence est l'apparition d'un *dip* d'intensité par comparaison avec une paire non-accrochée (avec  $\chi = 0$ ). De plus, et uniquement lorsque  $\kappa_i > \kappa_s$  (pertes intra-cavité à la fréquence  $\omega$  supérieures à celles à  $2\omega$ ), une transition de Hopf apparaît comme dans le cas  $\bar{\Delta}_{s,i} \neq 0$  avec un seuil  $N_H$  d'autant plus bas que la résonance de pompe est faible (lorsque  $r_p \rightarrow 0$ , ce seuil est inférieur à  $N = 2$ ). Le fait qu'elle soit absente du cas inverse  $\kappa_i < \kappa_s$  tient à l'absence de symétrie des équations (2)-(3) par interversion des indices  $i, s$ . Théoriquement, seule l'approximation ML2 permet d'en rendre compte, l'approximation ML1 (Eq.(5), en pointillé sur la Fig. 1) n'étant suffisamment précise qu'au voisinage du seuil  $N = 1$ .

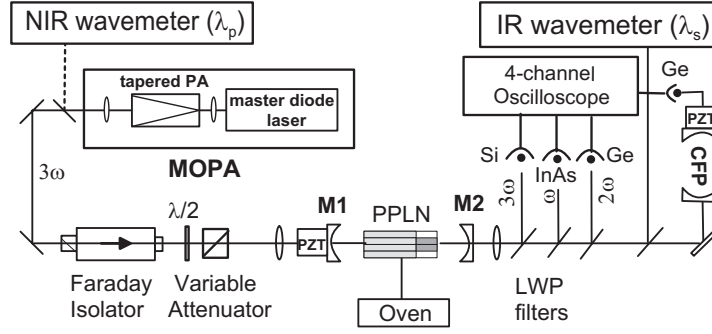


FIG. 2 – Dispositif expérimental du SPL-TRO. L'observation de l'agrégat de paires signal-idler sous la résonance de pompe ( $\mathcal{F}_p = 6$ ) se fait en mode de balayage adiabatique de la cavité OPO. Les signaux  $I_{p,s,i}$  ainsi que  $I_{CFP}$  sont observés de façon synchrone sur une oscilloscope 4-voies déclenché par la rampe de tension balayant la cavité OPO.

### 3 Expérience: SPL-TRO en régime continu

Le dispositif expérimental de l'OPO triplement résonnant (TRO) est schématisé sur la Figure 2. Le laser de pompe (semi-conducteur) est un dispositif maître-esclave (MOPA) délivrant une radiation monofréquence ( $\Delta\nu_p = 100$  kHz) accordable autour de  $\lambda_p = 845$  nm et de puissance maximale  $P = 430$  mW. Le seuil d'oscillation étant de  $P_{\text{seuil}} \simeq 100$  mW, le TRO peut être pompé à environ  $N = 4.2$  fois le seuil. Ce seuil est identique à celui mesuré en fonctionnement en TRO conventionnel [10]. Le cristal non linéaire est un niobate de lithium périodiquement polarisé (PPLN) de dimension  $11 \times 0.5 \times 30$  mm (épaisseur 0.5 mm), possédant 6 réseaux à section duale, avec une section OPO de longueur  $L_1 = 20$  mm (de période  $\Lambda_{\text{OPO}} = 28.85 \mu\text{m}$ ) suivi d'une section SHG de longueur variable  $L_2 \leq 10$  mm ( $\Lambda_{\text{SHG}} = 34.75 \mu\text{m}$ ). Les deux réseaux externes ne portent qu'une section OPO: les phénomènes décrits par la suite ne sont jamais observés lorsque l'OPO opère en TRO conventionnel, même lorsque la température d'accord de phase  $T_{\text{OPO}}$  correspond au point de division  $3 \div 1$  ( $\lambda_s = 3\lambda_p/2 = \lambda_i/2 \simeq 1267$  nm). Ce point de fonctionnement sous-harmonique  $3 \div 1$  est repéré par deux lambda-mètres à une précision de  $\pm 0.001$  nm soit  $\pm 1$  GHz. Les trois ondes  $\omega_{p,s,i}$  issues de la cavité sont détectées par trois photodiodes, et une fraction de l'onde  $\omega_s \simeq 2\omega$  est analysée spectralement par un étalon Fabry-Pérot confocal (CFP) en silice de finesse  $\mathcal{F} = 360$  à  $\lambda_s \simeq 1265$  nm, d'intervalle spectral libre  $\text{ISL}_{\text{CFP}} = 375$  MHz. Cet ISL est dégénéré (sous-multiple) avec celui de la cavité OPO quasi-concentrique ( $\text{ISL}_{\text{OPO}} = 1500$  MHz), de sorte que lorsqu'un mode signal est transmis par le CFP, les autres modes adjacents séparés d'un  $\text{ISL}_{\text{OPO}}$  devraient simultanément être transmis pour la même tension de biais appliqué sur la céramique PZT du CFP. Quant à la paire de modes signal-idler verrouillée en phase (paire SPL), l'analyse par le CFP biaisé en tension doit faire apparaître une frange bien élargie au delà de la largeur de frange définie par la finesse du CFP, soit  $\Delta\nu_{\text{CFP}} = 1$  MHz. La mesure de cette largeur de frange SPL fournit une valeur de la plage d'accrochage en phase/fréquence de la paire SPL. Les finesesses à  $\omega_{s,i}$  sont estimées à  $\mathcal{F}_{s,i} > 600$  et des mesures indépendantes de leurs pertes intra-cavité ont confirmé que nous sommes dans le cas  $\mathcal{F}_i < \mathcal{F}_s$ , soit  $\kappa_i > \kappa_s$  avec des valeurs très proches de celles utilisées pour la Figure 1. La Figure 3(A) montre une partie de l'agrégat de paires observé en mode de balayage, avec les traces synchrones des

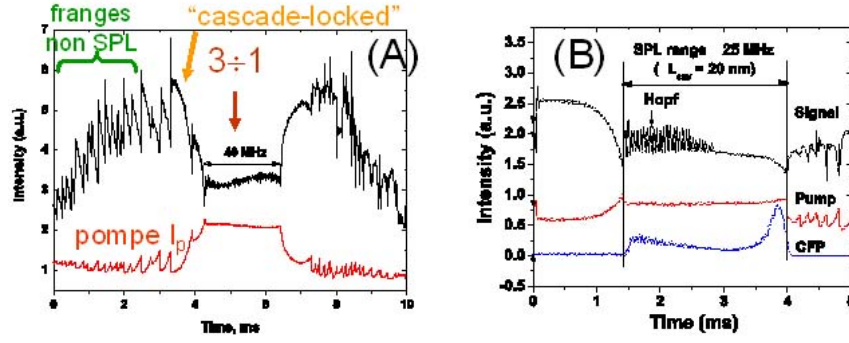


FIG. 3 – Agrégat de paires de modes sous la frange de pompe observé en mode de balayage de la cavité OPO, lorsque les deux non linéarités OPO et SHG sont simultanément activées avec un désaccord de phase SHG  $\xi = \Delta k_{\text{SHG}} L_2 / 2 \simeq 0$ . La forme "plate" de la frange SPL correspond au cas particulier où la paire SPL oscille avec  $\Delta_{s,i} = 0$  sur toute la zone d'accrochage. Une forme en demi-cloche conforme à la théorie est obtenue dans le cas général où le point  $3 \div 1$  est plus distant du mode de cavité le plus proche.

intensités pompe et signal lorsque le TRO fonctionne au point  $3 \div 1$ . Au début de la figure, on voit d'abord défiler les paires de modes non-verrouillés (non-SPL) caractérisées par des franges très étroites en forme de demi-Lorentzienne, avec un front de montée raide. Cette forme particulière est due à un phénomène de retard à la bifurcation de l'état trivial vers l'état lasant, typique des systèmes non linéaires à balayage adiabatique de l'un de leurs paramètres (ici les désaccords de cavité): l'oscillation des franges non-SPL démarre au sommet de la Lorentzienne ( $\Delta_{s,i} = 0$ , pour lequel le seuil est minium) au lieu de démarrer à un  $\Delta_{s,i} < 0$  pour lequel le seuil est en principe déjà atteint, d'où leurs formes en demi-franges. Nous voyons apparaître au milieu de l'agrégat le *dip* d'intensité attendu (Fig. 1, avec une forme de frange "plate" et élargie, constituant la signature dynamique de l'accrochage en fréquence de la paire la plus proche du point de division exact  $3 \div 1$  qui n'est déterminé que par la longueur d'onde de pompe  $\lambda_p$ . L'apparition spectaculaire de *dip* d'intensité dépend de façon critique du réglage fin de la température du PPLN, qui contrôle les deux désaccords de phase  $\Delta k$  des processus OPO et SHG en compétition. Pour un écart  $|\Delta T| < 0.1^\circ\text{C}$  de la température d'accord de phase  $T \approx 135^\circ\text{C}$ , le trou disparaît de l'agrégat. L'étendue spectrale de la zone de verrouillage, ainsi que le contraste du *dip* augmente avec la valeur du paramètre de couplage non linéaire  $|\chi| \approx S$ , qui vaut ici 0.2 ( $L_2 = 10$  mm). Remarquons aussi que l'intensité pompe intra-cavité est "clampée" durant la plage de verrouillage, témoignant de l'accrochage en fréquence de la paire SPL sur le point  $3 \div 1$  au cours du balayage.

Une deuxième signature du cas  $\Delta_{s,i} = 0$  (avec  $\kappa_i > \kappa_s$ ) est l'apparition d'instabilité temporelles périodiques de faible amplitude par-dessus la frange SPL pour  $N > 3.5$ , encore plus visible lorsque le paramètre de pompe  $N$  est maximal (Figure 3(B)). On y aperçoit nettement la bifurcation de Hopf inverse en fonction du detuning de cavité. Sur cette figure, on voit également la transmission du CFP biaisé en tension de façon à être en résonance avec la fréquence signal de la paire SPL. L'extrême largeur de la frange CFP indique que la fréquence de la paire ne varie pas sur toute la plage de verrouillage. Cependant, en sortie de plage le désaccord de cavité  $\Delta_{s,i}$  commence à prendre des valeurs non nulles, d'où la disparition des instabilités de Hopf. Ceci est confirmé par les équations (1)-(3) qui

prédisent un retour à un état stationnaire dès que  $\bar{\Delta}_{s,i} > 10^{-3}$ . Les périodes très lentes pour un système optique ( $f \sim 20$  kHz) de ces instabilités sont conformes à celles prédites sur la Fig. 1 et au phénomène de ralentissement critique prédit pour le cas à detuning nuls.

## 4 Conclusions et perspectives

Nous avons mis en évidence, sous la forme de l'apparition d'un *dip* d'intensité et d'instabilités de Hopf, des signatures dynamiques du fonctionnement en diviseur cohérent de fréquence par 3 d'un OPO sous-harmonique soumis à la compétition de deux processus non linéaire  $\chi^{(2)}$  couplant les ondes signal et idler. Il est à noter que dans une configuration simplement résonnant de l'OPO, ce *dip* devient alors un *pic* d'intensité [6]. Nous avons pour la première fois observé une bifurcation de Hopf à seuil très bas dans un OPO continu. Ces signatures dynamiques simplifient considérablement la réalisation de diviseurs optiques cohérents  $3 \div 1$  pour la métrologie de précision, sans qu'il y ait besoin de recourir à des asservissements en phase électroniques lourds et complexes [10].

Le système SPL-OPO est en outre un système dynamiquement très riche, potentiellement utile pour des applications en traitement optique de l'information. En effet, grâce à l'absence de diffusion de phase des ondes paramétriques, il constitue une source idéale pour la génération de photons intriqués [9] et l'étude des corrélations quantiques de phase, à l'inverse des OPO conventionnels. Une autre application potentielle est la génération de structures dissipatives transverses verrouillées en phase. En effet, l'inclusion de la diffraction dans le modèle de cet OPO peut conduire à une brisure de symétrie transverse, avec la formation de spirales à 3 branches évoquées en introduction [8], et donc à des structures encodées à la fois en phase et en intensité. Des études théoriques plus détaillées devront être menées afin de déterminer les conditions expérimentales adéquates pour la formation de telles structures localisées ou non. En particulier, l'effet de courbure des miroirs de cavité qui se rajoute à la diffraction devra être préalablement analysé.

## Références

- [1] S. Schiller, R.L. Byer, J. Opt. Soc. Am. B **10**, 1696 (1993).
- [2] S. Schiller, G. Breitenbach, R. Paschotta, J. Mlynek, Appl. Phys. Lett. **68**, 3374 (1996).
- [3] M.A.M. Marte, Phys. Rev. Lett. **74**, 4815 (1995); J. Opt. Soc. Am. B **12**, 2296 (1995).
- [4] P. Lohdal, M. Saffman, Phys. Rev. A **60**, 3251 (1999).
- [5] J.-J. Zondy, A. Douillet, A. Tallet, E. Ressayre, M. Le Berre, Phys. Rev. A **63**, 023814 (2001).
- [6] J.-J. Zondy, Phys. Rev. A **67**, 035801 (2003).
- [7] D.-H. Lee, M.E. Klein, J.-P. Meyn, P. Gross, R. Wallenstein, K.-J. Boller, Opt. Express **5**, 114-119 (1999).
- [8] S. Longhi, Phys. Rev. E **63**, 055202 (2001).
- [9] L. Longchambon, J. Laurat, T. Coudreau, C. Fabre, e-print arXiv:quant-ph/0311123 (2003).
- [10] A. Douillet, J.-J. Zondy, G. Santarelli, A. Makdissi, A. Clairon, IEEE Trans. Instrum. Meas. **50**, 548 (2001).

## Liste des auteurs

Abcha N. ....	1	Dur G. ....	91
Achour L. ....	7	Durniak C. ....	97
Adimy M. ....	73	Ezersky A. ....	1, 155
Aguirre J. ....	263	Fabre C. ....	61
Allain J.M. ....	13	Falcon E. ....	103
Amroun D. ....	19	Fernandez B. ....	209
Audoly B. ....	25	Finot C. ....	109
Auger P. ....	31	Forzy G. ....	137
Bavard X. ....	191	Gallois Ph. ....	137
Ben Amar M. ....	13, 281	Garzella D. ....	37, 49
Bielawski S. ....	37	Gastaud N. ....	115
Bilbault J.M. ....	143	Goedgebuer J.-P. ....	191, 233
Binczak S. ....	143	Gondret P. ....	85
Boiron M.-A. ....	197	Goldbeter A. ....	121
Bonhomme G. ....	43	Grapinet M. ....	131
Boudaoud A. ....	281	Gravier E. ....	43
Brochard F. ....	43	Hamadene W. ....	137
Brunel M. ....	19	Hanna M. ....	115
Brunet P. ....	167	Hautecoeur P. ....	137
Bruni C. ....	37, 49	Jacquir S. ....	143
Busse F. H. ....	245	Jauslin H. R. ....	131
Cadot O. ....	293	Joanny J.F. ....	13
Castaing B. ....	103	Kolker D. ....	317
Chandre C. ....	55	Lagha M. ....	149
Chembo Kouomou Y. ....	115	Larger L. ....	115, 191, 233
Chiffaudel A. ....	251	Latrache N. ....	155
Ciraolo G. ....	55	Laurat J. ....	61
Coudreau T. ....	61	Le Berre M. ....	161
Coulibaly S. ....	67	Leblond H. ....	19
Couprie M.E. ....	37, 49	Lebon L. ....	167
Coutinho R. ....	209	Le Grand N. ....	167
Crauste F. ....	73	Leloup J.-C. ....	121
Creyssels M. ....	103	Lenne B. ....	137
Cuverlier A. ....	7	Lepiller V. ....	173
Dauchot O. ....	203	Leprovost N. ....	179
Daviaud F. ....	251	Letellier C. ....	7, 19, 185, 215
Delbende I. ....	79	Lett C. ....	31
Devreker D. ....	91	Lima R. ....	55, 209
Doppler D. ....	85	Loiseleux T. ....	85
Dubrulle B. ....	179	Limat L. ....	167
Dudley J. ....	109	Locquet A. ....	191
Dumouchel F. ....	173	Longchambon L. ....	61

Loriot S. ....	215	Ravelet F. ....	251
Maïssa Ph. ....	239	Reis P.M. ....	25
Malasoma J.-M. ....	197	Residori S. ....	257
Malassenet F. ....	115	Ressayre E. ....	161
Manneville P. ....	149	Ripoll C. ....	287
Marié L. ....	251	Roche J.S. ....	167
Marin F. ....	1	Roman B. ....	25
Marty G. ....	203	Rossi M. ....	79
Mathey P. ....	131	Roulin E. ....	215
Mathis Ch. ....	239	Russo G. ....	257
Mendes E. ....	185	Rytz D. ....	131
Merolla J.M. ....	115	Sanchez F. ....	19
Meyroneinc A. ....	209	Sanjuán M. A. F. ....	263
Millot G. ....	109	Schmitt F. G. ....	91, 269
Moisy F. ....	221	Sciamarella D. ....	275
Montes C. ....	97	Seuront L. ....	269
Morin J.-P. ....	215	Souissi S. ....	91
Morize C. ....	221	Storm C. ....	13
Muir J.-F. ....	7	Sultan E. ....	281
Mutabazi I. ....	155, 173	Taki M. ....	67, 97
Neukirch S. ....	227	Tallet A. ....	161
Nguyen-Huu T. ....	31	Thellier M. ....	287
Norris V. ....	287	Titon J. H. C. ....	1, 293
Odoulov S. G. ....	131	Tlidi M. ....	161
Orlandi G. L. ....	37, 49	Tonello A. ....	299
d'Ovidio F. ....	263	Treps N. ....	61
Pallavisini A. ....	233	Udaltsov V. ....	233
Petrosyan A. ....	257	Vandenbunder B. ....	305
Peyrodie L. ....	137	Vasseur C. ....	137
Pirat C. ....	239	Villain-Guillot S. ....	311
Plaut E. ....	245	Vittot M. ....	55
Poggiale J.C. ....	31	Wabnitz S. ....	299
Prigent A. ....	173	Zondy J.-J. ....	317
Rabaud M. ....	85, 221		