

Etude des effets d'inertie dans l'instabilité de Saffman-Taylor

Christophe Chevalier*, Martine Ben Amar†, Daniel Bonn† et Anke Lindner*

* *PMMH, Ecole Supérieure de Physique et de Chimie Industrielles,
10, rue Vauquelin, 75231 Paris Cedex 05, France*

† *LPS, Ecole Normale Supérieure,
24, rue Lhomond, 75231 Paris Cedex 05, France
chevalc@ccr.jussieu.fr*

Résumé

Nous étudions l'instabilité de Saffman-Taylor, aussi nommée digitation visqueuse, dans de nouvelles conditions expérimentales où l'inertie ne peut plus être négligée.

Les forces d'inertie se rajoutent donc aux forces capillaires et visqueuses qui rentrent classiquement en compte dans l'instabilité.

Nous remarquons alors que, si l'inertie est suffisante, il est possible d'obtenir un élargissement des doigts qui va à l'opposé de la décroissance classique.

Nous nous sommes intéressés aux observations en fonction de différents nombres caractéristiques. Une brève analyse théorique et les résultats expérimentaux montrent notamment l'importance d'un nombre de Reynolds modifié Re^* comme paramètre caractéristique : ce nombre permet d'obtenir une nouvelle courbe maîtresse empirique.

Abstract

We study the Saffman-Taylor or viscous fingering instability in new experimental conditions, where corrections due to inertia become important. In addition to capillary and viscous forces, inertia has thus to be taken into account in the total force balance.

We note that, if inertia is sufficiently high, an inversion of the classical decrease of finger width with increasing velocity is obtained.

We investigate the finger width as function of different dimensionless parameters. A short theoretical analysis together with our experimental results shows the importance of a modified Reynolds number Re^ : it allows for obtaining a new empirical master curve for high velocity.*

1 Introduction

L'instabilité de Saffman-Taylor a été largement étudiée comme un système modèle pour la formation de motifs mais aussi comme facteur limitant pour la récupération du pétrole [1, 2, 3]. L'instabilité se développe quand un fluide pousse un liquide plus visqueux dans un fin canal ou cellule de Hele-Shaw. Il se forme alors un motif en forme de doigt.

Classiquement, la largeur du doigt formé résulte de la compétition entre deux types de force : les forces capillaires qui tendent à élargir le doigt et les forces visqueuses qui tendent à l'amincir. Pour une expérience donnée, la largeur du doigt est ainsi déterminée par le nombre capillaire Ca . Dans la très grande majorité des études, des huiles très visqueuses étant utilisées, les forces d'inertie peuvent en effet être négligées.

Plus récemment, des études sur l'instabilité de Saffman Taylor ont été menées pour des fluides complexes comme les solutions de polymères [4, 5]. Ces solutions, à base d'eau, ont des viscosités proches de 1 mPa.s et lors de ces expériences, il n'est alors plus possible de négliger l'inertie à vitesse élevée. En parallèle, des corrections à la loi de Darcy (qui permet de décrire l'écoulement 2D dans la cellule de Hele-Shaw) ont été développées pour

prendre en compte l'inertie dans le cas de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz [6, 7, 8]. Ces nouveaux développements expérimentaux et théoriques nous ont donc conduits à envisager l'étude précise de l'instabilité de digitation pour les fluides newtoniens dans cette limite mal connue d'une inertie non négligeable.

Le papier est organisé de la manière suivante. Dans la section 2 nous rappellerons les équations de base de l'instabilité de Saffman-Taylor et les corrections à y apporter. Nous verrons dans la section 3 le protocole expérimental employé. Les résultats expérimentaux seront présentés dans la section 4. Nous concluons par un résumé dans la section 5.

2 Théorie

2.1 Présentation de l'instabilité "classique" de Saffman-Taylor

Nous étudions l'instabilité de Saffman-Taylor dans un canal aux grands rapports d'aspect ou cellule de Hele-Shaw (Fig. 1). La largeur W de la cellule est notamment choisie grande par rapport à l'épaisseur b . La cellule est remplie d'un fluide visqueux qui est ensuite poussé par de l'air. Les caractéristiques du fluide sont sa viscosité η , sa tension de surface γ et sa densité ρ . La viscosité et la densité de l'air sont négligées.

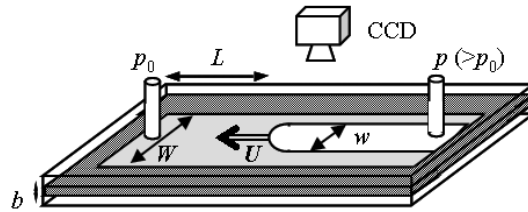


FIG. 1 – Schéma du montage expérimental.

Quand l'air pousse le fluide visqueux, l'interface est déstabilisée et, de manière générale, un doigt de largeur w et de vitesse U se forme.

L'écoulement est décrit à deux dimensions par le champ de vitesse \mathbf{u} moyenné sur l'épaisseur de la cellule. Les équations de base sont les suivantes :

$$\mathbf{u} = -\frac{b^2}{12\eta}\nabla p, \quad \Delta p = 0. \quad (1)$$

La première équation est la loi de Darcy et la seconde traduit l'incompressibilité du fluide. Par ailleurs, les conditions à l'interface sont :

- le saut de pression qui vérifie $\delta p = \gamma/R$ où R est le rayon de courbure,
- la continuité de la vitesse normale.

Pour caractériser la largeur des doigts, le paramètre de contrôle $1/B$, qui est un nombre capillaire modifié, se déduit des équations 1 et des conditions à l'interface :

$$1/B = 12 \left(\frac{W}{b}\right)^2 \frac{\eta U}{\gamma} = 12 \left(\frac{W}{b}\right)^2 Ca. \quad (2)$$

Quand la largeur relative des doigts est placée en fonction de $1/B$, tous les points expérimentaux se retrouvent sur une unique courbe maîtresse, décroissante et qui tend vers $1/2$ à vitesse élevée.

2.2 Introduction des effets d'inertie

Différents travaux sur l'instabilité de Kelvin-Helmholtz [6, 7, 8] mettent en évidence une équation de Darcy modifiée prenant en compte les effets d'inertie :

$$\rho(\alpha\partial_t\mathbf{u} + \beta\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}) = -\nabla p - \frac{12\eta}{b^2}\mathbf{u}, \quad (3)$$

où α et β diffèrent selon les travaux, mais restent de l'ordre de 1.

Il est alors possible de construire, de manière analogue à l'obtention de $1/B$, deux nouveaux nombres caractéristiques : un Reynolds modifié Re^* et un Weber modifié We^* . Ils décrivent, à l'échelle de la cellule, l'influence relative des forces d'inertie par rapport aux forces visqueuses et par rapport aux forces capillaires respectivement :

$$We^* = \frac{\rho U^2 W}{\gamma} = \frac{W}{b} We, \quad Re^* = \frac{b}{W} \frac{\rho U b}{\eta} = \frac{b}{W} Re. \quad (4)$$

3 Dispositif expérimental

Nous avons travaillé dans une cellule de Hele-Shaw linéaire et horizontale constituée de deux plaques de verre séparées par un film de Mylar et serrées entre elles par des serre-joints (Fig. 1). Nous avons ainsi pu travailler avec différentes épaisseurs ($b = 0,25$ à $1,45$ mm) et largeur ($W = 4$ ou 8 cm) de cellule. Nous avons utilisé des huiles silicone Rhodorsil 47V02, 47V05, 47V10, 47V20, 47V100 de viscosité mesurée 2,8 , 5, 10, 20 et 100 mPa.s. La tension de surface et la densité des huiles données par Rhodia Silicones sont de : $\gamma = 19,5 \pm 1$ mN/m et $\rho = 0,93 \pm 0,02$ kg/L.

Les doigts, formés en appliquant un saut de pression constant entre l'entrée et la sortie de la cellule, ont été enregistrés à l'aide d'une caméra CCD connectée à un ordinateur via une carte d'acquisition National Instrument. Cela nous a permis de mesurer la largeur relative des doigts λ en fonction de leurs vitesses U . Pour chaque configuration (type de fluide et géométrie de cellule) de 10 à 20 expériences ont été menées, nous permettant de couvrir avec précision une grande étendue de vitesse.

4 Présentation des résultats : largeur relative des doigts

Nous allons, par la suite, nous intéresser à la largeur relative des doigts λ en fonction des différents paramètres caractéristiques de notre système.

Notons auparavant que nous avons testé la loi de Darcy moyennée loin du doigt $\mathbf{V} = -\frac{b^2}{12\eta}\nabla P$, où \mathbf{V} est la vitesse moyennée et ∇P le gradient de pression, et que celle-ci n'est pas modifiée par les effets d'inertie que nous allons observer par la suite.

4.1 Paramètre de contrôle classique $1/B$

Les figures 2 représentent la largeur relative des doigts en fonction du paramètre $1/B$ pour différentes viscosités à géométrie fixée (Fig. 2a) et pour différentes géométries de cellule avec un fluide donné (Fig. 2b). Nous observons que pour les faibles $1/B$, la largeur des doigts λ décroît de manière classique. Cependant, passée une certaine valeur du paramètre de contrôle $1/B_c$ (qui varie selon les configurations) λ augmente. Nous relierions cet effet surprenant aux "effets d'inertie" comme il apparaît pour des nombres de Reynolds élevés. Nous observons ainsi que nos résultats expérimentaux dévient de la

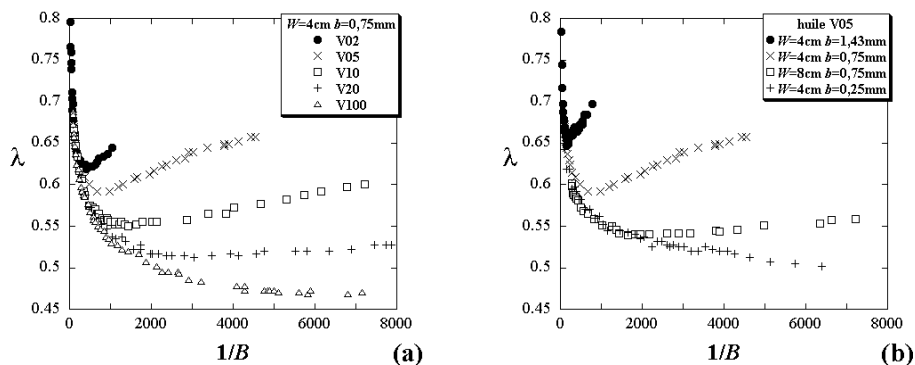


FIG. 2 – Largeur relative des doigts λ en fonction de $1/B$ à géométrie fixée (a) et pour un fluide donné (b).

courbe classique de Saffman-Taylor par une phase d'augmentation de la largeur des doigts. Cette augmentation intervient pour un paramètre $1/B_c$ d'autant plus petit que la viscosité est faible, que l'épaisseur du canal est grande ou que sa largeur est faible.

Nous allons, dans la suite, étudier la largeur relative des doigts en fonction de nombres caractéristiques faisant intervenir les forces d'inertie. Pour cela, nous nous concentrerons uniquement sur une seule géométrie ($W = 4$ cm; $b = 0,75$ mm). Les résultats sont cependant identiques pour toutes nos données.

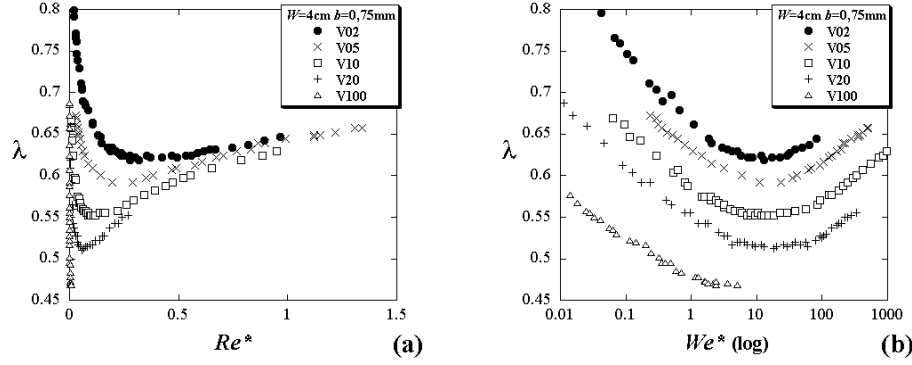
4.2 Nombre de Reynolds modifié Re^*

La figure 3a présente les résultats en fonction du nombre de Reynolds modifié. Les données semblent se placer sur une unique courbe en fonction de $Re^* = \frac{b}{W} \frac{\rho U b}{\eta}$. Les observations dans les autres configurations sont en accord avec l'existence de cette courbe maîtresse en fonction de Re^* . Nous soulignons, notamment qu'il n'y a pas de tel collapse de données si on considère simplement le nombre de Reynolds $Re = \frac{\rho U b}{\eta}$.

4.3 Nombre de Weber modifié We^*

La figure 3b présente les résultats en fonction du nombre de Weber modifié. Toutes les courbes expérimentales semblent avoir un minimum commun aux alentours d'un Weber modifié critique We_c^* de l'ordre de 15. Considérant que $We^* = \frac{\rho U^2 W}{\gamma} = \frac{1}{12} Re^* \cdot 1/B$, ce résultat peut s'interpréter comme la séparation effective de deux cas limites :

- pour We^* petit ($We^* < We_c^*$), nous avons l'instabilité de Saffman-Taylor classique avec une décroissance de la largeur relative des doigts quand $1/B$ croît. Dans ce cas, la largeur est déterminée par l'importance relative des forces capillaires et des forces visqueuses, les forces capillaires tendant à élargir les doigts et les forces visqueuses à les amincir.
- pour We^* grand ($We^* > We_c^*$) nous avons une nouvelle courbe maîtresse où le paramètre de contrôle est le Reynolds modifié Re^* , la largeur des doigts augmentant avec ce dernier. Dans cette région, la largeur des doigts s'expliquerait principalement par la compétition entre forces visqueuses et forces d'inertie. Comme les forces visqueuses tendent à amincir les doigts, nous en déduisons que les forces d'inertie ont pour effet un élargissement des doigts.


 FIG. 3 – Largeur relative des doigts λ en fonction de Re^* (a) et de We^* (b).

4.4 Extension à une courbe maîtresse globale

La figure 3b semble présenter une symétrie en fonction de We^* , ce qui nous a incité à comparer la décroissance de la largeur des doigts λ en fonction de $1/B$ avec la croissance de λ en fonction de Re^* ou, plus précisément, avec sa décroissance en fonction de $1/Re^*$.

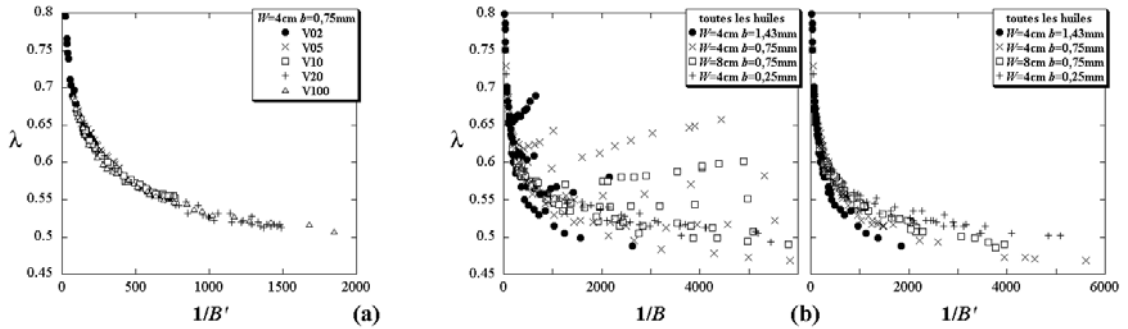
Définissons un nouveau paramètre de contrôle $1/B'$ prenant ce cross-over en compte :

$$1/B' = 1/B \left(\frac{1}{1 + We^*/We_c^*} \right). \quad (5)$$

Il est très simple de s'apercevoir que ce paramètre tend vers $1/B$ pour des petits We^* et est proportionnel à $1/Re^*$ pour des grands We^* .

La figure 4a présente λ fonction de $1/B'$. De manière surprenante, toutes les données se placent sur une seule courbe qui, de plus, est identique à la courbe maîtresse de Saffman-Taylor. Pour s'en convaincre, il suffit, par exemple, de considérer le fluide le plus visqueux.

La figure 4b présente l'ensemble de nos résultats en fonction de $1/B$ et de $1/B'$. Notons qu'il ne s'agit plus seulement que de faire varier la viscosité du fluide mais aussi la géométrie de la cellule : épaisseur et largeur. Nous observons ainsi que l'ensemble des données se replace de manière très satisfaisante sur une unique courbe maîtresse.


 FIG. 4 – (a) Largeur relative des doigts λ en fonction de $1/B'$. (b) Aperçu de l'ensemble de nos données, fonction de $1/B$ et $1/B'$.

Nous pouvons, pour finir, nous interroger sur la structure de $1/B'$. Elle pourrait en effet s'interpréter par l'existence d'un paramètre effectif comme une tension de surface

modifiée de la forme $\gamma_{eff} = \gamma(1 + We^*/We_c^*) = \gamma + \frac{1}{We_c^*}\rho U^2 W$ qui prendrait alors en compte les effets similaires sur la taille des doigts (i.e. leur élargissement) de la tension de surface et de l'inertie.

5 Résumé et conclusion

Nous avons étudié, essentiellement à partir de l'expérience, les effets d'inertie dans l'instabilité de Saffman-Taylor. Ces effets deviennent importants pour des fluides de faible viscosité et des géométries de cellule à grande épaisseur et faible largeur. Pour ces configurations, on observe alors un élargissement possible des doigts à grande vitesse.

Nous avons introduit un nombre de Weber modifié We^* permettant d'établir un critère sur l'influence de ces effets.

Pour des We^* grands (supérieurs à un We_c^* estimé à 15), une augmentation de la largeur des doigts λ est ainsi observée avec des données se remplaçant sur une nouvelle courbe maîtresse en fonction d'un nombre de Reynolds modifié Re^* caractérisant l'influence relative des forces visqueuses et des forces d'inertie. Il apparaît également que les forces d'inertie tendent à élargir les doigts.

Nous avons finalement montré que l'on peut définir empiriquement un nouveau paramètre de contrôle $1/B'$ qui permet de prendre en compte les corrections dues à l'inertie. En plaçant nos données en fonction de ce nouveau paramètre, nous obtenons une unique courbe maîtresse qui correspond, de plus, à la courbe classique de Saffman-Taylor.

En conclusion, nous avons caractérisé expérimentalement l'instabilité de digitation pour les fluides newtoniens ayant une inertie non négligeable et nous avons montré empiriquement comment prendre ces corrections en compte.

Références

- [1] P.G. Saffman-Taylor et G.I. Taylor, *The penetration of a fluid into a porous medium or Hele-Shaw cell containing a more viscous liquid*, Proc. R. Soc. Lond. A **245**, 312-329 (1958).
- [2] D. Bensimon, L.P. Kadanoff, S. Liang, B.I. Shraiman et C. Tang, *Viscous flows in two dimensions*, Rev. Mod. Phys. **58**, 977-999 (1986).
- [3] G.M. Homsy, *Viscous fingering in porous media*, Ann. Rev. Fluid Mech. **19**, 271-311 (1987).
- [4] D. Bonn, H. Kellay, M. Ben-Amar et J. Meunier, *Viscous fingering widening with surfactants and polymers*, Phys. Rev. Lett. **75**, 2132-2135 (1995).
- [5] A. Lindner, D. Bonn, E. Corvera Poiré, M. Ben-Amar et J. Meunier, *Viscous fingering in non-Newtonian fluids*, J. Fluid Mech. **469**, 237-256 (2002).
- [6] P. Gondret et M. Rabaud, *Shear instability of two-fluid parallel flow in a Hele-Shaw cell*, Phys. Fluids **9**, 3267-3274 (1997).
- [7] C. Ruyer-Quil, *Inertial corrections to the Darcy law in a Hele-Shaw cell*, C.R. Acad. Sci. Ser. Iib **329**, 337-342 (2001).
- [8] F. Plouraboué et A.J. Hinch, *Kelvin-Helmholtz instability in a Hele-Shaw cell*, Phys. Fluids **14**, 922-929 (2002).